Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 248, 1998 г.

А. П. Кубанская

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ С ДВУМЕРНЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

1. Рассмотрим параболическое уравнение

$$u_t = f(t, x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} + u_{xx} + u_{yy}) \tag{1}$$

в цилиндре $Q_T = \{(x, y) \in \Pi,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, где Π – прямоугольная область $[\varkappa_1 \leqslant x \leqslant \varkappa_2,\ \varkappa_3 \leqslant y \leqslant \varkappa_4]$, при начальном условии

$$u(0, x, y) = \Phi(x, y), \quad (x, y) \in \Pi \tag{2}$$

и краевом условии на $\Gamma_T = \{x \in \partial\Pi,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$:

$$\begin{cases} u(t, \varkappa_1, y) = \varphi_1(t, y),\ u(t, \varkappa_2, y) = \varphi_2(t, y),\ \varkappa_3 \leqslant y \leqslant \varkappa_4, \\ u(t, x, \varkappa_3) = \varphi_3(t, x),\ u(t, x, \varkappa_4) = \varphi_4(t, x),\ \varkappa_1 \leqslant x \leqslant \varkappa_2, \\ 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{3}$$

Будем считать, что функция f непрерывна по всем своим аргументам и имеет непрерывные частные производные по u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} при $(t, x, y) \in Q_T$, $-\infty < u,\ u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} < \infty$, функции φ_k, $k = 1, 2, 3, 4$ непрерывно зависят от своих аргументов и непрерывно дифференцируемы по t, $\varphi_1(t, y)$ и $\varphi_2(t, y)$ дважды непрерывно дифференцируемы по y, а $\varphi_3(t, x)$ и $\varphi_4(t, x)$ дважды непрерывно дифференцируемы по x.

Предположим, что существует решение задачи (1)–(3), удовлетворяющее условию

$$u(t, x, y) \in C^{1,2}(Q_T). \tag{4}$$

Построим схему метода прямых. Оставляя переменную t непрерывной, дискретизируем переменные x и y. Обозначая $\varkappa_2 - \varkappa_1 \equiv l_1$, $\varkappa_4 - \varkappa_3 \equiv l_2$, будем считать $\frac{l_1}{l_2} = \frac{p}{q}$, где p, q – натуральные числа. Разобьем прямоугольник Π на клетки с шагом $h_x = h_y = h$, полагая $x_i = \varkappa_1 + ih$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, $y_j = \varkappa_3 + jh$, $j = 1, 2, \dots, n_2$. Введем обозначения. $X_k \equiv x_{k - n_1 E\left(\frac{k-1}{n_1}\right)}$, $Y_k \equiv y_{1 + E\left(\frac{k-1}{n_1}\right)}$, $k =$

$1, 2, \ldots, n_1 \times n_2$; $U(t) \equiv \{u(t, X_k, Y_k)\}$, $U^x(t) \equiv \{u_x(t, X_k, Y_k)\}$, $U^y(t) \equiv \{u_y(t, X_k, Y_k)\}$, $U^{xx}(t) \equiv \{u_{xx}(t, X_k, Y_k)\}$, $U^{yy}(t) \equiv \{u_{yy}(t, X_k, Y_k)\}$, $U^{xy}(t) \equiv \{u_{xy}(t, X_k, Y_k)\}$ суть вектор-функции порядка $n_1 \times n_2$;

$$B^n_{\alpha\beta\gamma} \equiv \begin{pmatrix} \beta & \gamma & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$ – квадратная

матрица порядка n, α, β, γ могут быть квадратными клетками одинакового порядка (в таком случае число n означает порядок матрицы относительно элементов-клеток); единичную и нулевую матрицы будем обозначать, соответственно, I и $[0]$. Производные, входящие в уравнение (1), в точках сетки x_i, y_j ($i = 1, 2, \ldots, n_1$, $j = 1, 2, \ldots, n_2$) заменим выражениями

$$U^x(t) \sim \frac{1}{2h} B^{n_2}_{[0]B^{n_1}_{-101}[0]} U(t) + \frac{1}{2h} R_1(t),$$

$$U^y(t) \sim \frac{1}{2h} B^{n_2}_{B^{n_1}_{0-10}[0]I} U(t) + \frac{1}{2h} R_2(t),$$

$$U^{xx}(t) \sim \frac{1}{h^2} B^{n_2}_{[0]B^{n_1}_{1-21}[0]} U(t) + \frac{1}{h^2} R_3(t),$$

$$U^{yy}(t) \sim \frac{1}{h^2} B^{n_2}_{IB^{n_1}_{0-20}I} U(t) + \frac{1}{h^2} R_4(t),$$

$$U^{xy}(t) \sim \frac{1}{h^2} B^{n_2}_{B^{n_1}_{1-10}B^{n_1}_{-110}[0]} U(t) + \frac{1}{h^2} B^{n_2}_{[0]B^{n_1}_{-110}[0]} R_5(t) + \\ + \frac{1}{h} R^y(t) + \frac{1}{2} R^{yy}(t),$$

где

$$R_1(t) = (\underbrace{-\varphi_1(t, y_1), 0, \ldots, 0, \varphi_2(t, y_1)}_{n_1}, -\underbrace{\varphi_1(t, y_2), 0, \ldots, 0, \varphi_2(t, y_2)}_{n_1}, \ldots \\ \ldots, -\underbrace{\varphi_1(t, y_{n_2}), 0, \ldots, 0, \varphi_2(t, y_{n_2})}_{n_1})^T,$$

$$R_2(t) = (-\varphi_3(t, x_1), -\varphi_3(t, x_2), \ldots, -\varphi_3(t, x_{n_1}), \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n_1}, \ldots \\ \ldots, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n_1}, \varphi_4(t, x_1), \varphi_4(t, x_2), \ldots, \varphi_4(t, x_{n_1}))^T,$$

$$R_3(t) = (\underbrace{\varphi_1(t,y_1),0,\dots,0,\varphi_2(t,y_1))}_{n_1},\underbrace{\varphi_1(t,y_2),0,\dots,0,\varphi_2(t,y_2)}_{n_1},\dots$$
$$\dots,\underbrace{\varphi_1(t_1,y_{n_2}),0,\dots,0,\varphi_2(t,y_{n_2})}_{n_1})^T,$$

$$R_4(t) = (\varphi_3(t,x_1),\varphi_3(t,x_2),\dots,\varphi_3(t,x_{n_1}),\underbrace{0,0,\dots,0}_{n_1},\dots,\underbrace{0,0,\dots,0}_{n_1},$$
$$\varphi_4(t,x_1),\varphi_4(t,x_2),\dots,\varphi_4(t,x_{n_1}))^T,$$

$$R_5(t) = (-\varphi_3(t,x_1),-\varphi_3(t,x_2),\dots,-\varphi_3(t,x_{n_1}),\underbrace{0,0,\dots,0}_{n_1},\dots$$
$$\dots,\underbrace{0,0,\dots,0}_{n_1})^T,$$

$$R^y(t) = \left(\underbrace{-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(t,y_1),0,0,\dots,0}_{n_1},\underbrace{-\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}(t,y_2),0,0,\dots,0}_{n_1},\dots\right.$$
$$\left.\dots,\underbrace{\frac{-\partial\varphi_1(t,y_{n_2})}{\partial y},0,0,\dots,0}_{n_1}\right)^T,$$

$$R^{yy}(t) = \left(\underbrace{\frac{\partial^2\varphi_1(t,y_1)}{\partial y^2},0,0,\dots,0}_{n_1},\underbrace{\frac{\partial^2\varphi_1(t,y_2)}{\partial y^2},0,0,\dots,0}_{n_1},\dots\right.$$
$$\left.\dots,\underbrace{\frac{\partial^2\varphi_1(t,y_{n_2})}{\partial y^2},0,0,\dots,0}_{n_1}\right)^T$$

суть вектор-функции порядка $n_1 \times n_2$, которые в силу условия (4) стремятся (см. [1]) при $h \to 0$, соответственно, к значениям вектор-функций $U^x(t)$, $U^y(t)$, $U^{xx}(t)$, $U^{yy}(t)$, $U^{xy}(t)$.

Задаче (1)–(3) соотнесем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dv_i}{dt} = f(t, X_i, Y_i, v_i, v_i^x(V), v_i^y(V), v_i^{xx}(V), v_i^{yy}(V), v_i^{xy}(V)), \tag{5}$$

$$v_i(0) = \Phi(X_i, Y_i), \quad i = 1, 2, \dots, n_1 \times n_2, \tag{6}$$

где $V \equiv (v_1, v_2, \dots, v_{n_1 \times n_2})^T$ – неизвестная вектор-функция, $\{v_i^x(V)\}$, $\{v_i^y(V)\}$, $\{v_i^{xx}(V)\}$, $\{v_i^{yy}(V)\}$, $\{v_i^{xy}(V)\}$ – $n_1 \times n_2$-мерные вектор-функции с компонентами, определяемыми равенствами

$$\begin{cases} \{v_i^x(V)\} = \frac{1}{2h} B^{n_2}_{[0]B^{n_1}_{-101}[0]} V + \frac{1}{2h} R_1(t), \\ \{v_i^y(V)\} = \frac{1}{2h} B^{n_2}_{B^{n_1}_{0-10}[0]I} V + \frac{1}{2h} R_2(t), \\ \{v_i^{xx}(V)\} = \frac{1}{h^2} B^{n_2}_{[0]B^{n_1}_{1-21}[0]} V + \frac{1}{h^2} R_3(t), \\ \{v_i^{yy}(V)\} = \frac{1}{h^2} B^{n_2}_{IB^{n_1}_{0-20}I} V + \frac{1}{h^2} R_4(t), \\ \{v_i^{xy}(V)\} = \frac{1}{h^2} B^{n_2}_{B^{n_1}_{100}B^{n_1}_{0-31}B^{n_1}_{010}} V + \frac{1}{h^2} B^{n_2}_{[0]B^{n_1}_{-110}[0]} R_5(t) + \\ \qquad + \frac{1}{h} R^y(t) + \frac{1}{2} R^{yy}(t) + \frac{1}{h^2}(R_3(t) + R_4(t)). \end{cases} \tag{7}$$

При выполнении условия (4) погрешность аппроксимации каждого уравнения системы (5) стремится к нулю при $h \to 0$ для $t \in [0, T]$. Оценим модуль разности между решениями задач (1), (2), (3) и (5), (6), пользуясь Теоремой 2 из [2] для случая равномерной метрики. Имеем

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n_1 \times n_2} |u(t, X_i, Y_i) - v_i(t)| \leqslant \int_0^t \max_{1 \leqslant i \leqslant n_1 \times n_2} |\tau_i(\xi)| e^{\int_\xi^t L(\eta) d\eta} d\xi; \tag{8}$$

здесь $\{\tau_i(t)\}$ – вектор невязки, а функция $L(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\gamma(J(t, V)) \leqslant L(t),$$

где $\gamma(J(t, V))$ – логарифмическая норма матрицы Якоби $(J(t, V))$ вектор-функции $\{f(t, X_i, Y_i, v_i, v_i^x(V), v_i^y(V), v_i^{xx}(V), v_i^{yy}(V), v_i^{xy}(V))\}$

по V, вычисляемая по формуле

$$\gamma(J(t,V)) = \\ = \max_{1\leqslant i\leqslant n_1\times n_2}\left(\frac{\partial f(t,X_i,Y_i,v_i,v_i^x(V),v_i^y(V),v_i^{xx}(V),v_i^{yy}(V),v_i^{xy}(V))}{\partial v_i}+ \right.\\ \left. + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n_1\times n_2}\left|\frac{\partial f(t,X_i,Y_i,v_i,\ldots)}{\partial v_k}\right|\right),$$

$-\infty < v_i < \infty$, $i = 1,2,\ldots,n_1\times n_2$.

Предположим, что функция f удовлетворяет условиям

$$f_u(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5) \leqslant K = \text{const} < \infty, \tag{9}$$

$$f_{u_{xy}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5) \geqslant 0, \tag{10}$$

$$f_{u_{xx}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5) \geqslant 0, \tag{11}$$

$$f_{u_{yy}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5) \geqslant 0, \tag{12}$$

$$|f_{u_x}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)| \leqslant M_1 f_{u_{xx}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5), \tag{13}$$

$$|f_{u_y}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)| \leqslant M_2 f_{u_{yy}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5), \tag{14}$$

$0 \leqslant t \leqslant T$, $(x,y)\in\Pi$, $-\infty < u,\ \omega_j < \infty$, $j = 1,2,3,4,5,$, где M_1, M_2 – некоторые положительные константы. Тогда логарифмическая норма матрицы Якоби ограничена для $h \leqslant \min\left(\frac{2}{M_1},\frac{2}{M_2}\right)$. Величина же $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n_1\times n_2}|\tau_i(t)|$ при удовлетворении условия (4) стремится к нулю с уменьшением h. Таким образом, из неравенства (8) следует

Теорема 1. *При выполнении условия* (4) *и неравенств* (9)–(14) *задача Коши* (5), (6) *разрешима на промежутке* $[0,T]$ *для* $h \leqslant \min\left(\frac{2}{M_1},\frac{2}{M_2}\right)$ *и справедливо соотношение*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n_1\times n_2}|u(t,X_i,Y_i)-v_i(t)| \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{15}$$

Заметим, что если вместо Теоремы 2 из [2] воспользоваться Теоремой 1 из [3], то условие (9) можно заменить (см. [4, 1])

следующим

$$f_u(t, X_i, Y_i, u, v_i^x(U(t)), v_i^y(U(t)), v_i^{xx}(U(t)), v_i^{yy}(U(t)), v_i^{xy}(U(t))) \leqslant K,$$
$$0 \leqslant t \leqslant T, \quad (x, y) \in \Pi, \quad -\infty < u < \infty. \tag{16}$$

Покажем, что решение задачи (1)–(3) единственно. Доказательство проведем от противного. Предположим, что существуют два решения: $u_1(t, x, y)$ и $u_2(t, x, y)$, $(t, x, y) \in Q_T$. Имеем

$$|u_1(t, x, y) - u_2(t, x, y)| \leqslant |u_1(t, x_i, y_j) - u_2(t, x_i, y_j)| + O(h),$$

где (x_i, y_j) – узел сетки прямых ближайший к точке (x, y). Обозначая через $u_{ij}(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n_1$, $j = 1, 2, \ldots, n_2$ решение метода прямых, в силу соотношения (15) получаем

$$|u_1(t, x, y) - u_2(t, x, y)| \leqslant |u_1(t, x_i, y_j) - u_{ij}(t)| + |u_2(t, x_i, y_j) -$$
$$- u_{ij}(t)| + O(h) \underset{h \to 0}{\to} 0,$$

то есть $u_1(t, x, y) \equiv u_2(t, x, y)$, $(t, x, y) \in Q_T$.

Теорема 2. *Если существует решение задачи* (1)–(3), *удовлетворяющее условию* (4) *и выполняются неравенства* (9) *или* (16), (10)–(14), *то это решение единственное.*

Все приведенные рассуждения можно провести для непрямоугольного основания цилиндра, если последнее преобразовано в прямоугольник. Ниже рассмотрим случай трапецевидной области.

2. Рассмотрим параболическое уравнение

$$u_t = F(t, x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}) \tag{17}$$

в цилиндре $Q_T^1 = \{(x, y) \in \Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, где Ω – замкнутая трапецевидная область, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, $y = \alpha_1 x$, $y = -\alpha_2 x$ $(\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0)$, при краевом и начальном условиях

$$u\big|_{\Gamma_T} = \psi, \quad \Gamma_T = \{(x, y) \in \partial\Omega,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}, \tag{18}$$

$$u(0, x, y) = \Phi_1(x, y). \tag{19}$$

Предположим, что существует решение задачи (17)–(19) – функция $u(t, x, y)$, удовлетворяющая условию

$$u(t, x, y) \in C^{1,2}(Q_T^1). \tag{20}$$

В задача (17)–(19) произведем замену переменных, полагая $\zeta = x\frac{l_1}{b-a}$, $\theta = \frac{y}{x}\,\frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2}$. При этом трапеция Ω перейдет в прямоугольник

$$\Pi_1 \equiv \left[a\frac{l_1}{b-a} \leqslant \zeta \leqslant b\frac{l_1}{b-a}, -\alpha_2\frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2} \leqslant \theta \leqslant \alpha_1\frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2}\right]$$

со сторонами l_1, l_2.

Построим схему метода прямых для преобразованной задачи, разбивая прямоугольник Π_1 на квадрантные клетки с шагом h. Обозначим узлы сетки через

$$Z_i = \zeta_{i-n_1E\left(\frac{i-1}{n_1}\right)}, \quad \Theta_i = \theta_{1+E\left(\frac{i-1}{n_1}\right)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n_1\times n_2,$$

а соответствующие им точки области Ω через

$$x_i = \frac{b-a}{l_1}Z_i, \quad y_i = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{l_2}x_i\Theta_i.$$

Выражая производные $u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}$ через производные от u по ζ, θ по формулам

$$u_x = \frac{l_1}{b-a}\left(u_\zeta - \frac{\theta}{\zeta}\,u_\theta\right), \quad u_y = \frac{l_1 l_2}{(b-a)(\alpha_1+\alpha_2)}\,\frac{1}{\zeta}\,u_\theta, \tag{21}$$

$$u_{xx} = \left(\frac{l_1}{b-a}\right)^2\left(u_{\zeta\zeta} - \frac{2\theta}{\zeta}\,u_{\zeta\theta} + \frac{\theta^2}{\zeta^2}\,u_{\theta\theta} + \frac{2\theta}{\zeta^2}\,u_\theta\right), \tag{22}$$

$$u_{yy} = \left(\frac{l_1 l_2}{(b-a)(\alpha_1+\alpha_2)}\,\frac{1}{\zeta}\right)^2 u_{\theta\theta}, \tag{23}$$

$$u_{xy} = \left(\frac{l_1}{b-a}\right)^2\frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2}\,\frac{1}{\zeta}\left(u_{\zeta\theta} - \frac{\theta}{\zeta}\,u_{\theta\theta} - \frac{1}{\zeta}\,u_\theta\right) \tag{24}$$

и выделяя аргумент $u_{\zeta\theta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\theta\theta}$, соотнесем задаче (17)–(19), записанной в переменных ζ, θ, задачу Коши

$$\frac{dv_i}{dt} = F(t, x_i, y_i, v_i, \rho_i^{u_x}(V), \rho_i^{u_y}(V), \rho_i^{u_{xx}}(V), \rho_i^{u_{yy}}(V), \rho_i^{u_{xy}}(V)), \tag{25}$$

$$v_i(0) = \Phi_1(x_i, y_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n_1\times n_2, \tag{26}$$

где $V \equiv (v_1, v_2, \dots, v_{n_1 \times n_2})^T$ – неизвестная вектор-функция,

$$\rho_i^{u_x}(V) = \frac{l_1}{b-a}\left(v_i^{\zeta}(V) - \frac{\Theta_i}{Z_i} v_i^{\theta}(V)\right),$$

$$\rho_i^{u_y}(V) = \frac{l_1 l_2}{(b-a)(\alpha_1+\alpha_2)}\,\frac{1}{Z_i}\,v_i^{\theta}(V),$$

$$\rho_i^{u_{xx}}(V) = \left(\frac{l_1}{b-a}\right)^2 \left\{ v_i^{\zeta\zeta}(V)\left(1 + 2\frac{\Theta_i}{Z_i}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\Theta_i}{Z_i}\left[\left(\frac{\Theta_i}{Z_i} + 2\right) v_i^{\theta\theta}(V) - 2 v_i^{\zeta\theta}(V) + \frac{2}{Z_i} v_i^{\theta}(V)\right]\right\},$$

$$\rho_i^{u_{yy}}(V) = \left(\frac{l_1 l_2}{(b-a)(\alpha_1+\alpha_2)}\right)^2 \frac{1}{Z_i^2}\,v_i^{\theta\theta}(V),$$

$$\rho_i^{u_{xy}}(V) = \left(\frac{l_1}{b-a}\right)^2 \frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2}\,\frac{1}{Z_i}\left[v_i^{\zeta\theta}(V) - v_i^{\zeta\zeta}(V) - \left(1 + \frac{\Theta_i}{Z_i}\right) \times \right.$$
$$\left. \times v_i^{\theta\theta}(V) - \frac{1}{Z_i}\,v_i^{\theta}(V)\right],$$

причем величины $v_i^{\zeta}(V)$, $v_i^{\theta}(V)$, $v_i^{\zeta\zeta}(V)$, $v_i^{\theta\theta}(V)$, $v_i^{\zeta\theta}(V)$ определяются формулами вида (7) применительно к, записанным в переменных ζ, θ, уравнению (17) с выделенным аргументом $u_{\zeta\theta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\theta\theta}$ и граничному условию (18).

Выпишем для преобразованной задачи условия типа (10)–(14), (16). Условие типа (16) запишется в виде

$$F_u(t, x_i, y_i, u, \rho_i^{u_x}(U(t)), \rho_i^{u_y}(U(t)), \rho_i^{u_{xx}}(U(t)), \rho_i^{u_{yy}}(U(t)),$$
$$\rho_i^{u_{xy}}(U(t))) \leqslant K, \quad (27)$$

$0 \leqslant t \leqslant T$, $(\Theta_i, Z_i) \in \Pi_1$, $(x_i, y_i) \in \Omega$, $-\infty < u < \infty$; здесь $U(t)$ – вектор точного решения задачи (17)–(19). Условия типа (10)–(14) запишутся в виде следующих неравенств

$$F_{u_{\zeta\theta}} \geqslant 0 : -\frac{2y}{x}\,F_{u_{xx}}(t, x, y, u, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) +$$
$$+ F_{u_{xy}}(t, x, y, u, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \geqslant 0, \quad (28)$$

$$F_{u_{\zeta\zeta}} \geqslant 0: \frac{l_1}{b-a} F_{u_{xx}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5) - \frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2}\,\frac{1}{x}\times \\ \times\left(\frac{-2y}{x} F_{u_{xx}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)+ \\ + F_{u_{xy}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)\right) \geqslant 0, \quad (29)$$

$$F_{u_{\theta\theta}} \geqslant 0: \frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2} F_{u_{yy}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)+ \\ + y\left(\frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2}\,\frac{y}{x^2} + \frac{2l_1}{b-a}\right) F_{u_{xx}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)- \\ -\left(\frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2}\,\frac{y}{x} + \frac{l_1}{b-a}x\right) F_{u_{xy}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5) \geqslant 0, \quad (30)$$

$$|F_{u_\zeta}| \leqslant M_1 F_{u_{\zeta\zeta}}: |F_{u_x}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)| \leqslant \\ \leqslant M_1\left[\frac{l_1}{b-a} F_{u_{xx}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)- \\ - \frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2}\,\frac{1}{x}\left(\frac{-2y}{x} F_{u_{xx}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)+ \\ + F_{u_{xy}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)\right)\right], \quad (31)$$

$$|F_{u_\theta}| \leqslant M_2 F_{u_{\theta\theta}}: \Bigg|\frac{2y}{x} F_{u_{xx}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)- \\ F_{u_{xy}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5) + xF_{u_y}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)- \\ yF_{u_x}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)\Bigg| \leqslant \\ \leqslant M_2\left[\frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2} F_{u_{yy}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)+ \\ y\left(\frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2}\,\frac{y}{x^2} + \frac{2l_1}{b-a}\right) F_{u_{xx}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)- \\ \left(\frac{l_2}{\alpha_1+\alpha_2}\,\frac{y}{x} + \frac{l_1 x}{b-a}\right) F_{u_{xy}}(t,x,y,u,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5)\right], \quad (32)$$

$0 \leqslant t \leqslant T,\ (x,y)\in\Omega,\ -\infty < u,\ \omega_j < \infty,\ j=1,2,3,4,5.$

Теорема 3. *Если существует решение задачи* (17)–(19), *удовлетворяющее условию* (20) *и выполняются неравенства* (27)–(32), *то это решение единственное.*

Работа поддержана Международным фондом "Культурная инициатива" и Академией естественных наук России.

Литература

1. А. П. Кубанская, *Метод прямых в применении к некоторым двумерным нелинейным параболическим уравнениям.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **159** (1987), 132–142.
2. С. М. Лозинский, *Приближенные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* — Тр. четвертого Всесоюзного математического съезда **2** (1964), 606–613.
3. М. Н. Яковлев, *К оценке приближенного решения задачи Коши.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **23** (1971), 140–142.
4. М. Н. Яковлев, *Метод прямых в нелинейных краевых задачах для нелинейных параболических уравнений.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **23** (1971), 143–150.

Kubanskaya A. P. Uniqueness of the solution of the first mixed problem for a two-dimentional nonlinear parabolic equation.

The first mixed problem for two-dimentional nonlinear parabolic equation with nonlinear second derivatives of a desired function is considered. We assume that the solution possessing continuous second derivatives with respect to coordinate variables exists in a closed cylinder under some restrictions on initial data of the problem. The uniqueness of this problem is proved by using the longitudinal version of the method of lines.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 2 декабря 1996 г.