Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 248, 1998 г.

В. Н. Кублановская

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ. МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ

Резюме. Рассматривается решение задачи Коши для систем алгебро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, т.е. систем обыкновенных дифференциальных уравнений не разрешимых относительно старшей производной, как регулярных индекса больше нуля, так и сингулярных произвольного индекса.

Предлагается два подхода построения методов сведения решаемой задачи к задаче Коши для регулярной системы нулевого индекса.

Первый подход применим к системам первого порядка. Основан на ранговой факторизации постоянных матриц и сводит решение исходной задачи к решению нескольких систем линейно-алгебраических уравнений недоопределенного типа (СЛАУ) уменьшающихся размеров, и к решению задачи Коши меньших размеров для регулярной системы первого порядка, нулевого индекса. Число решаемых СЛАУ совпадает с индексом исходной системы.

Второй подход основан на ранговой факторизации матричного полинома, соответствующего решаемой системе дифференциальных уравнений порядка $s \geqslant 1$. Позволяет от системы порядка $s \geqslant 1$ произвольного типа индекса $\gamma \geqslant 0$ переходить к решению регулярной системы дифференциальных уравнений порядка не выше s, нулевого индекса. Предлагается новый метод решения и алгоритмы уточнения задачи Коши для регулярных систем нулевого индекса.

Введение

Пусть

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \quad x(t_0) = x_0$$

исходная задача Коши с соответствующим ей $m \times n$, ранга ρ пучком $D(\lambda) = B\lambda + A$ матриц B и A. В зависимости от соотношений

Работа поддержана грантом РФФИ No. 96-01-00701.

между числами m, n и ρ различают регулярные и сингулярные задачи Коши следующих типов: регулярная ($m = n = \rho$), недоопределенная ($\rho = m < n$), переопределенная ($\rho = n < m$) и вполне неопределенная ($\rho < \min(m, n)$).

Под индексом дифференциального оператора $B\frac{d}{dt} + A$ понимается максимальный порядок блоков в канонической форме Кронекера пучка $D(\lambda)$, соответсвующих бесконечному собственному значению.

Равносильное, но более общее определение индекса связано с канонической формой Смита матричного полинома степени $s \geqslant 1$, соответствующего дифференциальному оператору $\sum\limits_{k=0}^{s} C_k \frac{d^k}{dt^k}$ порядка $s \geqslant 1$.

Индексом дифференциального оператора $\sum\limits_{k=0}^{s} C_k \frac{d^k}{dt^k}$, порядка $s \geqslant 1$, называется максимальная степень элементарных делителей μ^k, входящих в инвариантные множители канонической формы Смита матричного полинома $\sum\limits_{k=0}^{s} \mu^k C_{s-k}$.

В статье рассматриваются задачи Коши для, так называемых, алгебро-дифференциальных уравнений, т.е. уравнений не разрешимых относительно старшей производной. К алгебро-дифференциальным уравнениям (АДУ) будем относить как регулярные системы дифференицальных уравнений индекса $\gamma > 0$, так и сингулярные системы всех типов, индекса $\gamma \geqslant 0$.

Предлагаются методы, позволяющие от задачи Коши для АДУ перейти к решению задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений регулярного типа (ОДУ) индекса $\gamma = 0$.

В основе методов лежат алгоритмы ранговой факторизации; ΔW-0 алгоритм и ΔW-1 алгоритм соответственно для факторизации постоянной матрицы и матричного полинома степени $s \geqslant 1$, а также алгоритм ∇R-факторизации*

Под ранговой факторизацией постоянной $m \times n$ матрицыB, ранга r, будем понимать любую из следующих факторизаций [1]:

$$BQ_1 = [\Delta_1, O], \quad Q_2 B = \begin{bmatrix} \Delta_2 \\ O \end{bmatrix}; \quad Q_4 B Q_3 = \begin{bmatrix} \Delta_3 & O \\ O & O \end{bmatrix}.$$

*В лаборатории Алгоритмических методов ПОМИ РАН имеется программная реализация ΔW-0, ΔW-1 и ∇R-алгоритмов [10, 11].

Здесь Δ_i – матрицы ранга r, O – нулевые матрицы, Q_i – ортогональные матрицы.

Реализация этих факторизаций осуществляется с помощью ΔW-0 алгоритма, под которым мы будем понимать или алгоритм сингулярного разложения матрицы, т.е. SVD алгоритм [2], или алгоритм нормализованного разложения [4], другими словами, QR-разложения [3].

Для простоты (с учетом, что алгоритм нормализованного разложения конечный в отличие от SVD) для описания методов будем использовать алгоритм нормализованного разложения. Все сказанное будет верно и для алгоритма SVD.

Под нормализованным разложением постоянной $m\times n$ матрицы B рагна r будем понимать каждое из следующих трех разложений:

$$\theta_1 B Q_1 = \begin{bmatrix} L_1, O \end{bmatrix}; \quad Q_2 B \theta_2 = \begin{bmatrix} L_2^T \\ O \end{bmatrix}; \quad Q_3 \theta_1 B Q_1 \theta_3 = \begin{bmatrix} L_3 & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

ссылаясь к ним соответственно как к правостороннему, левостороннему и двухстороннему нормализованному разложению. Здесь L_i, $(i = 1, 2, 3)$ – левые трапецоидальные матрицы, соответственно размеров $m \times r$, $n \times r$ и $r \times r$, элементы которых удовлетворяют неравенствам

$$|l_{ii}| \geqslant \ldots \geqslant |l_{rr}|, \quad |l_{ji}| \leqslant |l_{ii}| \quad \text{для} \quad j \geqslant i;$$

O – нулевые матрицы; Q_i – результирующие ортогональные матрицы, которые суть произведения ортогональных матриц плоских вращений или отражений, θ_i – результирующие матрицы перестановок.

Под ранговой факторизацией матричного полинома $D(\lambda)$ степени $s \geqslant 1$, размеров $m \times n$, ранга ρ будем понимать каждое из следующих разложений [1]:

$$D(\lambda) W_1(\lambda) = \begin{bmatrix} \Delta_1(\lambda), O \end{bmatrix}; \;\; W_2(\lambda) D(\lambda) = \begin{bmatrix} \Delta_2(\lambda) \\ O \end{bmatrix};$$
$$W_4(\lambda) D(\lambda) W_3(\lambda) = \begin{bmatrix} \Delta_3(\lambda) & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

ссылаясь соответственно как к правосторонней, левосторонней и двухсторонней ранговым факторизациям $D(\lambda)$. Здесь $\Delta_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3$ суть матричные полиномы степеней $s_i \leqslant s$, размеров

$m \times \rho$, $\rho \times n$ и $\rho \times \rho$ соответственно, ранга ρ, конечный спектр каждого из которых совпадает с конечным спектром $D(\lambda)$, на бесконечности нет особенности типа нуль; O – нулевые матрицы; $W_i(\lambda)$ – унимодулярные матрицы соответствующих размеров.

Реализация ранговых факторизаций $D(\lambda)$ осуществляется с помощью ΔW-1 алгоритма (см. §4, а также [1, 5]).

Под ∇R-факторизацией матричного полинома $D(\lambda)$ размеров $m \times n$, полного ранга, понимаются следующие разложения:

$$D(\lambda)P_1(\lambda) = \hat{D}_1(\lambda)$$

в случае $D(\lambda)$ полного столбцового ранга;

$$P_2(\lambda)D(\lambda) = \hat{D}_2(\lambda)$$

в случае $D(\lambda)$ полного строчного ранга.

Здесь $\hat{D}_i(\lambda)$, $i = 1, 2$ есть матричные полиномы размеров $m \times n$, ранга n, степени не выше степени $D(\lambda)$, спектр каждого из которых совпадает с конечным спектром $D(\lambda)$;

$$P_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{\gamma} T_k \operatorname{diag}\left\{I_{r_k},\, \lambda I_{n-r_k}\right\},$$
$$P_2(\lambda) = \prod_{k=1}^{\gamma} \tilde{T}_k \operatorname{diag}\left\{I_{r_k},\, \lambda I_{m-r_k}\right\},$$

$\tilde{T}_k$ и T_k – ортогональные матрицы.

Реализация ∇R-факторизации осуществляется с помощью так называемого ∇R-алгоритма, который является незначительной модификацией алгоритма исчерпывания нулевых собственных значений матричного полинома полного ранга описанного в [5].

Статья состоит из четырех параграфов.

В §1 предлагается новый метод решения задачи Коши для регулярных систем ОДУ нулевого индекса. Метод основан на построении согласованных матричных полиномов и соответствующих им дифференциальных уравнений. В случае систем ОДУ первого порядка его можно рассматривать как применение АВ-алгоритма к решению задачи Коши для системы ОДУ, позволяющего от исходной задачи перейти к системе ОДУ, соответствующий пучок матриц для которой имеет треугольную (квазитреугольную) форму. Предлагаются алгоритмы уточнения приближенного решения.

В §2 приводятся методы сведения задачи Коши для линейных систем АДУ различных типов к решению задачи Коши для регулярной системы ОДУ индекса $\gamma = 0$ или $\gamma = 1$. Для регулярных ОДУ и АДУ недоопределенного типа индекса $\gamma > 1$ процесс указанного сведения состоит из решения линейно-алгебраических систем недоопределенного типа уменьшающихся размеров. Число решаемых систем совпадает с индексом задачи. Предлагаемые методы основаны на использовании алгоритмов ранговой факторизации постоянных матриц.

В §3 рассматриваются методы сведения задачи Коши для систем АДУ порядка $s \geqslant 1$ различных типов к решению регулярных систем ОДУ индекса $\gamma = 0, 1$, порядка не выше s. Предлагаемые методы основаны на использовании алгоритмов ранговой факторизации матричных полиномов. В случае матричного полинома полного ранга, соответствующего решаемой задаче Коши индекса $\gamma > 0$, предлагаются методы сведения к аналогичной задаче Коши нулевого индекса, использующие ∇R-алгоритм.

§1. Метод решения задачи Коши для регулярных систем ОДУ нулевого индекса

Предлагается новый метод решения задачи Коши для регулярных систем ОДУ нулевого индекса порядка $s \geqslant 1$. Метод основан на построении, так называемых, согласованных матричных полиномов и им соответствующих дифференциальных операторов. В случае $s = 1$ метод можно трактовать как применение известного AB-алгоритма [6] к решению линейных регулярных ОДУ нулевого индекса, позволяющее исходную задачу с пучком матриц произвольной формы сводить к решению задачи с пучком матриц треугольной (квазитреугольной) формы, т.е. решению n задач Коши для линейных дифференциальных уравнений разрешенных относительно производной.

На базе предлагаемого метода предложены алгоритмы построения приближенных решений рассматриваемой задачи, а также алгоритмы их уточнения.

1. Решение задачи Коши для системы ОДУ первого порядка. Пусть

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1.1}$$

исходная задача Коши, которой соответствует регулярный $n \times n$ пучок $D(\lambda) = B + \lambda A$ с неособенной матрицей B.

1.1. Связь между системами дифференциальных уравнений, отвечающих согласованным пучкам.

Рассмотрим задачу Коши

$$B_1\dot{y}(t) + A_1y(t) = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \tag{1.2}$$

отвечающую согласованному с $D(\lambda)$ пучку $D_1(\lambda) = \lambda B_1 + A_1$, так что имеет место равенство*

$$BA_1 = AB_1, \tag{1.3}$$

называемое фундаментальным соотношением между согласованными пучками [8].

Известно [8], что спектры согласованных пучков совпадают, так что $\det B_1 \neq 0$, если $\det B \neq 0$.

Легко проверить с учетом (1.3), что для перехода от (1.1) к эквивалентной задаче (1.2) следует в (1.1) сделать замену переменных

$$x(t) = B_1y(t) \tag{1.4}$$

и обе части уравнения (1.1) умножить на B^{-1}, так что в (1.2) следует взять

$$y_0 = B_1^{-1}x_0, \quad g(t) = B^{-1}f(t). \tag{1.5}$$

Для проверки, подставим (1.4) в (1.1). Имеем

$$B(B_1\dot{y}(t)) + AB_1y(t) = \left[B_1\dot{y}(t) + A_1y(t)\right] = Bg(t) = f(t).$$

Отсюда $B_1\dot{y}(t) + A_1y(t) = B^{-1}f(t)$.

Из сказанного следует справедливость следующих утверждений.

Лемма 1.1. 1^0. *Если $y(t)$ есть решение уравнения*

$$B_1\dot{y}(t) + A_1y(t) = g(t),$$

то $x(t) = B_1y(t)$ есть решение уравнения

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = Bg(t).$$

2^0. *Если $y(t)$ есть решение $B_1\dot{y}(t) + A_1y(t) = 0$, то $x(t) = B_1y(t)$ есть решение $B\dot{x}(t) + Ax(t) = 0$.*

---

*Здесь столбцы $\begin{bmatrix} A_1 \\ -B_1 \end{bmatrix}$ образуют базис правого нуль-пространства матрицы $[B, A]$.

1.2. Построение приближений к решению задачи Коши.

Введем в рассмотрение вектор $X(t) := (\dot{x}(t), x(t), 1)^T$ и матрицу $\mathfrak{A}(t) := \left[B, A, -f(t)\right]$.

Если $x(t)$ есть решение (1.1), то очевидно равенство

$$\mathfrak{A}(t)X(t) = 0, \tag{1.6}$$

т.е. $X(t)$ принадлежит нуль-пространству Q матрицы $\mathfrak{A}(t)$.

Будем строить базис нуль-пространства $\mathfrak{A}$ в виде

$$Q = \begin{bmatrix} T & \widetilde{q}(t) \\ 0\ldots 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

где T есть $2n \times n$ матрица из ортонормированных столбцов такая, что

$$\left[B,\, A\right]T = 0, \tag{1.8}$$

т.е. T есть ортонормальный базис правого нуль-пространства матрицы $[B, A]$. Записав T в блочном виде $T = \begin{bmatrix} A_1 \\ -B_1 \end{bmatrix}$, из (1.8) имеем, что

$$BA_1 = AB_1,$$

т.е. блоки T образуют матрицы согласованного с $D(\lambda)$ пучка $D_1(\lambda)$.

Общее решение уравнения (1.6) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \widetilde{q}(t) \\ 1 \end{pmatrix} + Tc = \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_1(t) + A_1 c \\ \widetilde{\omega}_2(t) - B_1 c \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c – произвольный вектор из пространства n измерений над полем чисел, $\widetilde{q}(t) := \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_1(t) \\ \widetilde{\omega}_2(t) \end{pmatrix}$, $\widetilde{\omega}_1(t)$ и $\widetilde{\omega}_2(t)$ блоки вектора $\widetilde{q}_1(t)$, состоящие каждый из n компонент.

Отсюда

$$\omega_1(t) := \widetilde{\omega}_1(t) + A_1 c, \quad \omega_2(t) := \widetilde{\omega}_2(t) - B_1 c. \tag{1.9}$$

Учитывая равенство

$$\mathfrak{A}(t)\begin{pmatrix} \widetilde{q}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \tag{1.10}$$

заключаем, что $x(t)=\omega_2(t)$ будет решением задачи (1.1) в том и только в том случае, когда выполняются условия

$$\text{(а)}\qquad \dot\omega_2(t)=\omega_1(t); \qquad \text{(б)}\qquad \omega_2(t_0)=x_0.$$

Для удовлетворения условия (б), выберем в (1.9) произвольный вектор c так, чтобы выполнилось равенство

$$\omega_2(t_0)\equiv\widetilde\omega_2(t_0)-B_1c=x_0.$$

Отсюда с учетом, что $\det B_1\neq 0$, имеем

$$c=-B_1^{-1}[x_0-\widetilde\omega_2(t_0)]\equiv B_1^{-1}\zeta, \tag{1.11}$$

где $\zeta:=\widetilde\omega_2(t_0)-x_0$.

Подставив (1.11) в (1.9), получим

$$\omega_1(t)=\widetilde\omega_1(t)+A_1B_1^{-1}\zeta,\quad \omega_2(t)=\widetilde\omega_2(t)-B_1B_1^{-1}\zeta=\widetilde\omega_2(t)-\zeta. \tag{1.12}$$

Условию (а) равносильно выполнению равенства

$$\dot\omega_2(t)=\omega_1(t)\equiv\widetilde\omega_1(t)+A_1B_1^{-1}\zeta. \tag{1.12}$$

Равенство (1.10) с учетом (1.12) будет

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}(t)\begin{pmatrix}\widetilde q(t)\\1\end{pmatrix}&=\big[B,\,A,\,-f(t)\big]\begin{pmatrix}\widetilde\omega_1(t)+A_1B_1^{-1}\zeta\\ \widetilde\omega_2(t)-B_1B_1^{-1}\zeta\\1\end{pmatrix}=\\&=B\widetilde\omega_1(t)+BA_1B_1^{-1}\zeta+A\widetilde\omega_2(t)-AB_1B_1^{-1}\zeta-f(t)=\\&=\{B\widetilde\omega_1(t)+A\widetilde\omega_2(t)\}+\{BA_1B_1^{-1}\zeta-AB_1B_1^{-1}\zeta\}-f(t)=\\&=\{I\}+\{II\}-f(t)=0.\end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (1.3) имеем: $\{II\}=0$, так что

$$B\widetilde\omega_1(t)+A\widetilde\omega_2(t)=f(t). \tag{1.13}$$

Покажем, что $x(t)$ в форме

$$x(t)=\omega_2(t)\equiv\widetilde\omega_2(t)-B_1B_1^{-1}\zeta\equiv\widetilde\omega_2(t)-\zeta \tag{1.14}$$

удовлетворяет уравнению (1.1). С учетом (1.12) и (1.13) имеем

$$B\widetilde\omega_1(t)+BA_1B_1^{-1}\zeta+A\widetilde\omega_2(t)-AB_1B_1^{-1}\zeta=$$
$$B\widetilde\omega_1(t)+A\widetilde\omega_2(t)+\big\{BA_1B_1^{-1}\zeta-AB_1B_1^{-1}\zeta\big\}=B\widetilde\omega_1(t)+A\widetilde\omega_2(t)=f(t),$$

так как выражение в $\{\ldots\}$ равно нулю.

Таким образом, установлено, что $x(t)$ в форме (1.14) при выполнении (a), т.е. (1.12), удовлетворяет уравнению (1.1) и начальным условиям $x(t_0) = x_0$.

Построение базиса Q нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A}(t) := [B, A, -f(t)]$ вида

$$Q = \begin{bmatrix} T & \widetilde{q}(t) \\ 0\ldots 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} A_1 & \widetilde{\omega}_1(t) \\ -B_1 & \widetilde{\omega}_2(t) \\ 0\ldots 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\lambda B_1 + A_1$ есть пучок согласованный с $\lambda B + A$, состоит из двух стадий. На первой стадии находится матрица T, на второй — вектор $\widetilde{q}(t) := (\widetilde{\omega}_1(t), \widetilde{\omega}_2(t))^T$. Реализация первой стадии сводится к построению согласованного пучка и может быть выполнена подобно тому, как это делается в AB-алгоритме [7, 8] и в программе, его реализующем [10]. Для уменьшения числа арифметических операций пучок $A + \lambda B$, соответствующий исходной задаче (1.1), преобразуется к треугольно-хессенберговой форме с помощью ортогональных преобразований $U^T D(\lambda) V = \widehat{A} + \lambda \widehat{B} = \widehat{D}(\lambda)$. Здесь $\widehat{B}$ и $\widehat{A}$ суть соответственно треугольная и почти треугольная матрицы. Переход от $D(\lambda)$ к $\widehat{D}(\lambda)$ осуществляется за конечное число шагов, используя известный алгоритм [9].

Умножая слева уравнений (1.1) на U^T и выполняя замену переменных $x = Vz$, от задачи (1.1) перейдем к решению эквивалентной задачи

$$\widehat{B}\dot{z}(t) + \widehat{A}z(t) = \widehat{f}(t), \quad z(t_0) = V^T x_0,$$
$$\widehat{f}(t) = U^T f(t),$$

с соответствующей ей пучком $\widehat{D}(\lambda)$ в треугольно-хессенберговой форме.

В дальнейшем, не умаляя общности, будем считать, что матрицы B и A исходной задачи являются, соответственно, верхняя треугольная и верхняя почти треугольная. Так что пучок $\lambda B + A$ имеет верхнюю треугольно-хессенбергову форму.

Для построения согласованного пучка $\lambda B_1 + A_1$ с сохранением верхней треугольно-хессенберговой формы следует найти ортогональный базис правого нуль-пространства вспомогательной матрицы $[B, A]$. Для этого находится разложение вида

$$[B, A]Q = [R,\, O]. \tag{1.15}$$

Здесь $Q = \prod T_{ij}$ есть результирующая ортогональная матрица плоских вращений; R – верхняя треугольная $n \times n$ матрица, O – нулевая $n \times n$ матрица. Последние n-столбцов ортогональной матрицы $Q = [P,\, T]$ дадут искомый пучок $A_1 + \lambda B_1$: $T = \begin{bmatrix} A_1 \\ -B_1 \end{bmatrix}$. Выбор индексов (i, j) в матрицах плоских вращений T_{ij}, т.е. порядок аннулирования элементов $[B, A]$, позволяющих сохранить верхнюю треугольно-хессенбергову форму пучка, следующий [8]:

$$(k, n+k-1), (k, n+k), \ldots, (k, 2n), \quad k = n, n-1, \ldots, 2$$
$$(1, n+1), (1, n+2), \ldots, (1, 2n).$$

В результате будет построена матрица $T = \begin{bmatrix} A_1 \\ -B_1 \end{bmatrix}$.

Рассмотрим выполнение второй стадии, т.е. вычисление вектора $\widetilde{q}(t)$ из (1.7), используя разложение (1.15). Обозначим R_k – столбец с номером k треугольной матрицы $R = \{r_{ij}\}$: $R = \big[R_1, \ldots, R_n\big]$; P_k, $k = 1, \ldots, n$ – столбец с номером k матрицы P. Для вычисления $\widetilde{q}(t)$ будем строить две последовательности векторов $\{S_n^{(k)}(t)\}$ и $\{q_{2n+1}^{(k)}(t)\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, имеющих соответственно размерности n и $2n+1$, используя следующие формулы

$$S_n^{(0)}(t) = f(t) \equiv (s_{01}(t), \ldots, s_{0n}(t))^T,$$
$$q_{2n+1}^{(0)}(t) = (0, \ldots, 0, 1)^T \equiv (q_{01}, \ldots, q_{0,2n+1})^T,$$
$$S_n^{(k)}(t) = -r_{kk} S_n^{(k-1)}(t) + s_{k-1,k}(t) R_k = (s_{k1}(t), ..., s_{k,n-k}(t), \underbrace{0, ..., 0}_{k})^T,$$
$$q_{2n+1}^{(k)}(t) = -r_{kk} P_k + s_{k-1,k}(t) q_{2n+1}^{(k-1)}(t), \quad k = n, n-1, \ldots, 1. \tag{1.16}$$

По построению каждый вектор $q_{2n+1}^{(k)}(t)$, $k = 1, \ldots, n$ имеет последнюю компоненту, не зависящую от t. Нормируя вектор $q_{2n+1}^{(n)}(t)$ к единичной последней компоненте, получим искомый вектор $\widetilde{q}(t)$, как вектор, составленный из $2n$-первых компонент так нормированного вектора. Имеем

$$\begin{pmatrix} \widetilde{q}(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\varkappa} q_{2n+1}^{(n)}(t).$$

Здесь число $\prod\limits_{i=1}^{n} r_{ii}$ с точностью до знака совпадает с последней компонентой $\varkappa$ вектора $q_{2n+1}^{n)}(t)$.

1.3. Первый алгоритм уточнения приближенного решения задачи Коши.

Будем различать две ситуации. При первой ситуации предполагается, что начальное приближение $x^{(0)}(t)$ к решению задачи Коши получено алгоритмом из п.1.2. При второй ситуации никакого ограничения на способ получения $x^{(0)}(t)$ не накладывается.

Предварительно установим справедливость леммы.

Лемма 1.2. *Для того, чтобы вектор* $z(t) := x^{(0)}(t) + \Delta x(t)$ *был решением уравнения*

$$\left[B\frac{d}{dt} + A\right]z(t) = f(t),$$

необходимо и достаточно, чтобы вектор $\Delta x(t)$ *удовлетворял уравнению*

$$\left[B\frac{d}{dt} + A\right]\Delta x(t) = f(t) - \left[B\frac{d}{dt} + A\right]x^{(0)}(t). \tag{1.18}$$

Справедливость леммы следует из линейности оператора $B\frac{d}{dt} + A$.

Перейдем к рассмотрению первой ситуации. Пусть $x^{(0)}(t) = \omega_2(t)$ есть приближение к решению задачи Коши, причем

$$\omega_2(t_0) = x_0.$$

Рассмотрим задачу Коши вида

$$\left.\begin{array}{c} B_1\dot{y}(t) + A_1y(t) = \omega_1(t) - \dot{\omega}_2(t) \equiv f_1(t), \\ y(t_0) = 0. \end{array}\right\} \tag{1.19}$$

Пусть $y(t)$ есть точное решение (1.19). Покажем, что

$$x(t) = \omega_2(t) + B_1y(t)$$

есть точное решение задачи (1.1).

Для этого, согласно лемме 1.2, достаточно установить, что $\Delta x(t) := B_1y(t)$ удовлетворяет уравнению (1.18). С учетом (1.3) имеем

$$B(B_1\dot{y}(t)) + A(B_1y(t)) = B\big[B_1\dot{y}(t) + A_1y(t)\big] = B[\omega_1(t) - \dot{\omega}_2(t)]. \tag{1.20}$$

По построению $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ справедливо равенство

$$\begin{bmatrix} B, A, -f(t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$B\omega_1(t) = f(t) - A\omega_2(t). \tag{1.21}$$

Подставив (1.21) в (1.20) убеждаемся в справедливости (1.18).

Таким образом установлено, что

$$x(t) = \omega_2(t) + B_1 y(t) \tag{1.22}$$

есть точное решение задачи (1.1), если $y(t)$ есть точное решение задачи (1.19).

Алгоритм решения задачи Коши (1.19) аналогичен алгоритму, описанному в п.1.2 и сводится к выполнению следующих операций.

(1) Вычисляется базис Q_1 нуль-пространства матрицы $\mathfrak{A}_1(t) := [B_1, A_1, -f_1(t)]$ в виде

$$Q_1 = \begin{bmatrix} T_1 & \widetilde{q}_1(t) \\ 0\ldots0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(2) Для вычисления $T_1 \equiv \begin{bmatrix} A_2 \\ -B_2 \end{bmatrix}$ находится пучок $D_2(\lambda) = \lambda B_2 + A_2$ согласованный с пучком $D_1(\lambda) = \lambda B_1 + A_1$.

(3) Вектор $\widetilde{q}_1(t)$ вычисляется согласно алгоритму п.1.2 по формулам (1.16), (1.17). Пусть $\widetilde{q}_1(t) = (\widetilde{\omega}_1^{(1)}(t), \widetilde{\omega}_2^{(1)}(t))^T$.

(4) Находятся векторы

$$\omega_1^{(1)}(t) := \widetilde{\omega}_1^{(1)}(t) + A_2 c,$$
$$\omega_2^{(1)}(t) := \widetilde{\omega}_2^{(1)}(t) - B_2 c,$$

где вектор c вычисляется из равенства

$$\omega_2^{(1)}(t_0) \equiv \widetilde{\omega}_2^{(1)}(t_0) - B_2 c = 0,$$

так что $c = B_2^{-1}\widetilde{\omega}_2^{(1)}(t_0)$. Заметим, что $\det B_2 \neq 0$, что следует из свойств согласованных пучков.

В результате имеем

$$\omega_1^{(1)}(t) = \widetilde{\omega}_1^{(1)}(t) + A_2 B_2^{-1} \widetilde{\omega}_2^{(1)}(t_0),$$
$$\omega_2^{(1)}(t) = \widetilde{\omega}_2^{(1)}(t) - B_2 B_2^{-1} \widetilde{\omega}_2^{(1)}(t_0) = \widetilde{\omega}_2^{(1)}(t) - \widetilde{\omega}_2^{(1)}(t_0).$$

(5) Находится вектор

$$\eta_1(t) := \omega_1^{(1)}(t) - \dot{\omega}_2^{(1)}(t).$$

Если $\eta_1(t) = 0$ – нулевой вектор, то $\omega_2^{(1)}(t)$ есть точное решение (1.19), так что

$$y(t) = \omega_2^{(1)}(t).$$

В этом случае

$$x(t) = \omega_2(t) + B_1 \omega_2^{(1)}(t)$$

есть точное решение задачи (1.1).

Если $\eta_1(t) \neq 0$ и $\|\eta(t)\|$ не удовлетворяет заданной точности, то процесс можно аналогично продолжить, пока при некотором шаге k получим решение $y_k(t)$ задачи Коши

$$B_k \dot{y}_k(t) + A_k y_k(t) = f_k(t) \equiv \omega_1^{(k-1)}(t) - \dot{\omega}_2^{(k-1)}(t), \;\; y_k(0) = 0,$$

такое, что вектор $\eta_k(t) = \omega_1^{(k)}(t) - \dot{\omega}_2^{(k)}(t) = 0$, т.е. нулевой вектор с заданной (рабочей) точностью. В этом случае решение $x(t)$ задачи (1.1) будет

$$x(t) = \omega_2(t) + B_1 \omega_2^{(1)}(t) + \ldots + B_1 B_2 \ldots B_{k-1} \omega_2^{(k-1)}(t) + B_1 B_2 \ldots B_k y_k(t).$$

Перейдем к рассмотрению второй ситуации, когда $x^{(0)}(t)$, т.е. начальное приближение к искомому решению $x(t)$ задачи (1.1), получено другим способом, отличным от алгоритма, описанного в п.1.2.

Для уточнения $x^{(0)}(t)$ следует найти вектор-невязку

$$r(t) := f(t) - B\dot{x}^{(0)}(t) - Ax^{(0)}(t),$$

и перейти к выполнению алгоритма, рассмотренного в первой ситуации, взяв в (1.19) в качестве правой части* вектор $f_1(t) = B^{-1} r(t)$.

*Заметим, что по построению матрицы B и B_k для любого k являются верхними треугольными, так что вектор $f_1(t)$ находится как решение системы $Bz = r(t)$ с треугольной матрицей.

Тогда, если $y(t)$ есть точное решение системы (1.19) с правой частью $f_1(t)$, то по Лемме 1.1

$$x(t) = x^{(0)}(t) + B_1 y(t), \tag{1.23}$$

будет точным решением системы (1.1). Для вычисления $y(t)$ выполняются операции (1)–(5). В результате будет вычислен вектор $\eta_1(t) = \omega_1^{(1)}(t) - \dot{\omega}_2^{(1)}(t)$. Если $\eta_1(t) = 0$ – нулевой вектор с требуемой точностью, то в качестве $y(t)$ берется вектор $\omega_2^{(1)}(t)$ и уточненное решение вычисляется по формуле (1.23). В противном случае процесс уточнения продолжается подобно тому, как это делается в первой ситуации.

1.4. Применение AB-алгоритма к решению задачи Коши. Алгоритм уточнения решения задачи Коши (1.1) из п.1.3 можно рассматривать как итерационный процесс для решения задачи (1.1).

Так если условие

$$\dot{\omega}_2^{(k)}(t) = \omega_1^{(k)}(t)$$

не выполняется, то процесс продолжается до тех пор, пока строящаяся последовательность попарно согласованных пучков $\{\lambda B_k + A_k\}$ не сойдется с рабочей точностью к пучку $\lambda B_\infty + A_\infty$ с треугольными (квазитреугольными) матрицами B_∞ и A_∞.

Решение задачи Коши

$$\left.\begin{aligned} B_\infty \dot{y}(t) + A_\infty y(t) &= g_\infty(t), \\ y(0) &= 0, \end{aligned}\right\}$$

в этом случае не вызыват трудностей и сводится к решению n-задач Коши для линейных дифференциальных уравнений первого порядка с нулевыми начальными условиями.

Сходимость последовательности $\{\lambda B_k + A_k\}$ к пучку $\lambda B_\infty + A_\infty$ к пучку $\lambda B_k + A_k$ следует из сходимости AB-алгоритма [6–8].

Действительно, каждый шаг описанного выше алгоритма включает образование пучка, согласованного с пучком предыдущего шага. Построение согласованных пучков осуществляется подобно тому, как это делается в известном AB-алгоритме решения проблемы собственных значений регулярного пучка матриц [7, 8].

Следовательно, предлагаемый алгоритм решения задачи Коши будет сходится в условиях сходимости AB-алгоритма. Так в случае исходного пучка $D(\lambda) = \lambda B + A$ простой структуры алгоритм сходится к пучку $\lambda B_\infty + A_\infty$ треугольных матриц, если все собственные значения $D(\lambda)$ вещественные и принадлежащие им элементарные делители в канонической форме Жордана–Вейерштраса линейные. При наличии комплексно-сопряженных собственных значений у пучка $D(\lambda)$, в пределе будем иметь пучок квазитреугольной формы с блоками по диагонали первого и второго порядков.

1.5. Второй алгоритм уточнения приближенного решения задачи Коши.

Рассмотрим алгоритм уточнения приближенного решения задачи Коши, являющийся некоторой модификкацией алгоритма из п.1.3.

Предлагаемая модификация использует вычисления, полученные при построении только согласованного пучка $D_1(\lambda) = \lambda B_1 + A_1$. При этом преобразований исходного пучка $D(\lambda)$ (и соответствующего ему дифференциального оператора $(B\frac{d}{dt} + A)$) к треугольно хессенберговой форме не требуется.

Для реализации алгоритма уточнения предварительно находится разложение вида

$$[B,\, A]Q = [L,\, O], \tag{1.24}$$

где O есть $n \times n$ нулевая матрица, $L = [L_1, \dots, L_n] = (l_{ij})$ есть левая треугольная $n \times n$ матрица, $Q = [P, T]$ есть ортогональная порядка $2n$ матрица с блоками $P = [P_1, \dots, P_n]$ и $T := \begin{bmatrix} A_1 \\ -B_1 \end{bmatrix}$ размеров $2n \times n$ каждый. Разложение (1.24) осуществляется с помощью матриц T_{ij} плоских вращений, при этом последовательность аннулирования элементов в преобразуемой матрице равенства (1.24) осуществляется в следующем порядке

$$\begin{aligned} (ij) = (1,2), (1,3), \dots\dots, (1,2n) \\ (2,3), \dots\dots, (2,2n) \\ \dots\dots\dots \\ (n, n+1), \dots, (n, 2n). \end{aligned}$$

Последовательные приближения $x^{(i)}(t)$ к решению $x(t)$ задачи (1.1) вычисляются по формуле

$$x^{(i)}(t) = x^{(i-1)}(t) + B_1\omega^{(i-1)}(t), \tag{1.25}$$

где $x^{(0)}(t)$ – заданное приближение.

Рассмотрим ситуацию, когда $x^{(0)}(t_0) = x_0$, т.е. удовлетворяет начальному условию задачи (1.1), и пусть $x^{(i)}(t)$ есть уточнение решения (1.1), полученное на шаге i.

Для перехода к шагу $(i+1)$ надо найти вектор $\omega_2^{(1)}(t)$, выполняя следующие операции.

(1) Вычислить невязку i-го приближения

$$r_i := f(t) - \big[B\frac{d}{dt} + A\big]\, x^{(i)}(t).$$

Если вектор r_i не удовлетворяет требуемой точности, перейти к выполнению операции (2). В противном случае в качестве искомого решения $x(t)$ взять $x^{(i)}(t)$.

(2) Найти вектор $q_{2n+1}^{(n)}(t)$, размерности $2n+1$, следуя следующим рекуррентным формулам

$$\begin{aligned}
q_{2n+1}^{(0)}(t) =& (0, \dots, 0, 1)^T, \quad s_n^{(0)}(t) = r_i(t) := (s_{01}(t), \dots, s_{0n}(t))^T,\\
q_{2n+1}^{(k)}(t) =& -l_{kk}P_k + s_{k-1,k}(t) q_{2n+1}^{(k-1)}(t),\\
S_n^{(k)}(t) =& -l_{kk}S_n^{(k-1)} + s_{k-1,k}(t) L_k = (\underbrace{0, \dots, 0}_{k}, s_{k,k+1}, \dots, s_{kn})^T,
\end{aligned}$$

$k = 1, \dots, n$.

(3) Разделить вектор $q_{2n+1}^{(n)}(t)$ на его последнюю компоненту $\varkappa$ и записать его в блочном виде

$$\frac{1}{\varkappa} q_{2n+1}^{(n)}(t) = \begin{pmatrix} \widetilde{\omega}_1(t) \\ \widetilde{\omega}_2(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\widetilde{\omega}_1(t)$ и $\widetilde{\omega}_2(t)$ векторы из n компонент каждый; число $\varkappa$ может отличаться от $\prod\limits_{i=1}^{n} l_{ii}$ только знаком.

(4) Вычислить искомый вектор

$$\omega_2^{(i)}(t) := \widetilde{\omega}_2(t) - \widetilde{\omega}_2(t_0). \tag{1.25}$$

Замечание. Если приближение $x^{(0)}(t)$ не удовлетворяет начальному условию задачи (1.1): $x^{(0)}(t_0) = \widetilde{x}_0 \neq x_0$, то в выше описанном алгоритме уточнения изменяется только первый шаг, т.е.

вычисление $x^{(1)}(t) = x^{(0)}(t)+\omega_2^{(1)}(t)$. В качестве $\omega_2^{(1)}$ следует взять вектор

$$\omega_2^{(1)}(t) = \widetilde{\omega}_2(t) - \widetilde{\omega}_2(t_0) + \Delta_1, \quad \Delta_1 := x_0 - \widetilde{x}_0.$$

Во всех последующих приближениях $x^{(i)}(t)$, $i = 1, 2, \ldots$, вектор $\omega_2^{(i)}(t)$ вычисляется по формуле (1.25).

§2. Методы решения задачи Коши для системы АДУ, основанные на применении ΔW-0 алгоритма

Ниже рассматриваются методы*, позволяющие решение задачи Коши для АДУ индекса $\gamma \geqslant 1$ сводить к решению задачи для системы ОДУ нулевого индекса и к решению СЛАУ (уменьшающихся размеров), число которых равно γ.

Методы основаны на использовании ΔW-0 алгоритма. Для определенности описание методов приводим, используя в качестве ΔW-0 алгоритма нормализованное разложение. Все сказанное будет справедливо и для SVD-алгоритма. Рассматриваются регулярные и сингулярные уравнения.

Пусть требуется решить задачу Коши

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

индекса $\gamma > 0$, размеров $m \times n$.

В зависимости от типа $m\times n$ пучка $A+\lambda B$ ранга ρ, соответствующего дифференциальному оператору $B\frac{d}{dt}+A$, раздельно рассматриваются методы для системы АДУ регулярной ($\rho = m = n$), недоопределенной ($\rho = m < n$), переопределенной ($\rho = n < m$), вполне неопределенной ($\rho < \min(m, n)$).

2.1. Задача Коши для регулярной системы АДУ.

Пусть (2.1) есть регулярная задача Коши индекса $\gamma > 0$, размеров $n \times n$.

Метод сведения (2.1) к задаче Коши нулевого индекса и меньших размеров, состоит из конечного числа γ шагов.

Типичный (первый) шаг требует выполнения следующих операций:

*Предлагаемые ниже методы не требуют знания индекса. Он определяется в процессе реализации метода.

(1) От задачи (2.1), путем умножения (2.1) слева на U_1 и замены переменных

$$x^{(1)}(t) = \theta_1 x(t).$$

осуществляется переход к задаче Коши вида

$$\begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ O \end{bmatrix} \dot{x}^{(1)}(t) + \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{bmatrix} x^{(1)}(t) = f^{(1)}(t), \quad x^{(1)}(t_0) := x_0^{(1)}.$$

Здесь U_1 – ортогональная матрица, θ_1 – матрица перестановок, реализующие левосторонее нормализованное разложение матрицы $B_0 := B$, т.е. разложение вида

$$U_1 B_0 \theta_1 = \begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ O \end{bmatrix};$$

O – нулевая $(n - r_1) \times n$ матрица, r_1 – ранг B_0, $B_1^{(1)}$ – матрица размеров $r_1 \times n$.

Одновременно с разложением B_0 вычисляются матрица

$$U_1 A \theta_1 = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

с блоками $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(1)}$ соответственно размеров $r_1 \times n$ и $(n - r_1) \times n$ и вектор

$$f^{(1)}(t) = U_1 f^{(0)}(t), \quad \text{где} \quad f^{(0)}(t) := f(t).$$

(2) В результате выполнения операции (1) задача Коши (2.1) заменяется решением двух следующих задач:

- задачей Коши

$$B_1^{(1)} x^{(1)}(t) + A_1^{(1)} x^{(1)}(t) = f_1^{(1)}(t), \quad x^{(1)}(t_0) := x_0^{(1)} = \theta_1 x_0; \quad (2.2)$$

- задачей вычисления частного решения недоопределенной линейно-алгебраической системы*

$$A_2^{(1)} x^{(1)}(t) = f_2^{(1)}(t), \quad x^{(1)}(t_0) := x_0^{(1)} = \theta_1 x_0. \quad (2.3)$$

Здесь $x^{(1)}(t) = \theta_1 x^{(0)}(t)$, $x^{(0)}(t) := x(t)$, так что компоненты вектора $x_0^{(1)}$ отличаются от компонент вектора x_0 только порядком следования, $f_1^{(1)}(t)$ и $f_2^{(2)}(t)$ векторы, составленные соответственно из r_1 первых и $(n - r_1)$ последних компонент вектора $f^{(1)}(t)$.

*Матрица $A_2^{(1)}$ имеет полный строчный ранг, что следует из регулярности пучка $A + \lambda B$.

(3) Находится решение $x^{(1)}(t)$ задачи (2.3). Для этого выполняются следующие шаги:

(3.1) В системе (2.3) делается замена переменных

$$x^{(1)}(t) = V_1 y^{(1)}(t), \tag{2.4}$$

приводящая к решению недоопределенной системы алгебраических уравнений вида

$$[\,L_1,\, \mathbb{O}\,]\, y^{(1)}(t) = f_2^{(1)}(t). \tag{2.5}$$

В качестве матрицы V_1 берется ортогональная матрица, реализующая разложение**

$$A_2^{(1)} V_1 = [\,L_1,\, \mathbb{O}\,], \tag{2.6}$$

где L_1 – левая треугольная $(n-r_1)\times(n-r_1)$ неособенная матрица, $\mathbb{O}$ – нулевая $(n-r_1)\times r_1$ матрица. Из (2.4) находим

$$\begin{gathered} y^{(1)}(t) = V_1^T x^{(1)}(t) \equiv (y_1^{(1)}(t), \dots, y_n^{(1)}(t))^T, \\ y^{(1)}(t_0) = V_1^T x_0^{(1)} := y_0 = (y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})^T. \end{gathered}$$

(3.2) Решается система

$$L_1 z_1(t) = f_2^{(1)}(t),$$

(3.3) Находится частное решение $y_*^{(1)}(t)$ системы (2.5), удовлетворяющее условию $y_*^{(1)}(t_0) = y_0$.

В силу строения матрицы системы (2.5) последние r_1 компоненты искомого частного решения $y_*^{(1)}(t)$ могут быть взяты произвольными функциями. Учитывая это, в качестве $y_*^{(1)}(t)$ выберем вектор

$$y_*^{(1)}(t) = \left(L_1^{-1} f_2^{(1)}(t), y_{n-r_1+1}^{(1)}(t), \dots, y_n^{(1)}(t)\right)^T,$$

где $y_k^{(1)}(t)$, $k = n-r_1+1, \dots, n$ суть неизвестные подлежащие определени функции;

$$y_*^{(1)}(t_0) = \left(L_1^{-1} f_2^{(1)}(t_0), y_{n-r_1+1}^0, \dots, y_n^0\right)^T.$$

**Так как матрица A_2 есть матрица полного строчного ранга, разложение (2.6) можно выполнить не используя перестановку строк.

Докажем, что

$$L^{-1} f_2^{(1)}(t_0) = \left(y_1^0, \dots, y_{n-r_1}^0\right)^T. \tag{2.7}$$

Доказательство от противного. Пусть

$$L^{-1} f_2^{(1)}(t_0) = \left(\tilde{y}_1^0, \dots, \tilde{y}_{n-r_1}^0\right)^T,$$

где $\tilde{y}_k^0 \neq y_k^0$, $k = 1, \dots, n-r_1$. При условии, что решение исходной задачи (2.1) существует, заключаем, что $y^{(1)}(t)$ удовлетворяет системе (2.5). Следовательно при $t = t_0$ оба вектора $(y_1^0, \dots, y_n^0)^T$ и $(\tilde{y}_1^0, \dots, \tilde{y}_{n-r_1}^0, y_{n-r_1+1}^0, \dots, y_n^0)^T$ удовлетворяют системе (2.5).

Имеем

$$L_1(y_1^0 - \tilde{y}_1^0, \dots, y_{n-r_1}^0 - \tilde{y}_{n-r_1}^0)^T = 0.$$

Отсюда, учитывая что $\det L_1 \neq 0$, находим $\tilde{y}_k^0 = y_k^0$, $k = 1, \dots, n - r_1$. Противоречие доказывает справедливость (2.7).

(3.4) Частное решение $y^{(1)}(t)$ системы (2.3) запишем в блочном виде

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) = (L_1^{-1} f_2(t), y_{n-r_1+1}(t), \dots, y_n(t))^T \equiv \\ \equiv (X_{n-r_1}^{(1)}(t), x^{(2)}(t))^T. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Здесь $X_{n-r_1}(t)$ и $x^{(2)}(t)$ векторы, составленные из $(n - r_1)$ первых и r_1 последних компонент вектора $y^{(1)}(t)$, так что $X_{n-r_1}^{(1)}(t)$ есть вычисленная составляющая $y^{(1)}(t)$, составляющая $x^{(2)}(t)$ есть вектор, подлежащий определению.

(4) Для вычисления неизвестного вектора $x^{(2)}(t)$ в системе (2.2) делаем замену переменных $x^{(1)}(t) = V_1 y^{(1)}(t)$ осуществляя переход от решения задачи (2.2) к решению задачи Коши вида

$$B_1 \dot{x}^{(2)}(t) + A_1 x^{(2)}(t) = f^{(2)}(t), \quad x^{(2)}(t_0) = (y_{n-r_1+1}^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})^T := x_0^{(2)}. \tag{2.9}$$

Здесь B_1 и A_1 – матрицы размеров $r_1 \times r_1$, составленные соответственно из последних r_1 столбцов матриц

$$B_1^{(1)} V_1 = \left[B_0^{(1)},\, B_1\right], \quad A_1^{(1)} V_1 = \left[A_0^{(1)},\, A_1\right]$$

$$f^{(2)}(t) = f_1^{(1)}(t) - B_0^{(1)} \dot{X}_{n-r_1}^{(1)}(t) - A_0^{(1)} X_{n-r_1}^{(1)}(t),$$

$f^{(1)}(t)$ – вектор из системы (2.2).

Переходом от систем (2.2), (2.3) к системе (2.9) заканчивается выполнение первого шага предлагаемого метода.

Далее процесс решения (2.1) разветвляется в зависимости от ситуаций:

$$\det B_1 \neq 0, \quad \text{или} \quad \det B_1 = 0. \tag{2.10}$$

Если $\det B_1 \neq 0$, т.е. исходная система (2.1) имеет индекс $\gamma = 1$, то система (2.9) имеет нулевой индекс. В этом случае следует для решения (2.9) использовать известные методы решения задачи Коши для регулярной системы ОДУ, чтобы определить вектор $x^{(2)}(t)$. Тогда искомое решение задачи (2.1) будет

$$x(t) = \theta_1 V_1 \big(X^{(1)}_{n-r_1}(t),\, x^{(2)}(t)\big)^T.$$

Если $\det B_1 = 0$, что соответствует случаю, когда $\gamma > 1$, следует перейти к выполнению операций (1)–(4), беря в качестве исходной систему (2.9). Выполнение операций (1)–(4) продолжается до тех пор пока на некотором шаге будет $r_\gamma = r_{\gamma+1}$. В результате γ шагов придем к регулярной задаче Коши нулевого индекса, размеров $r_\gamma \times r_\gamma$, вида

$$B_\gamma \dot{x}^{(\gamma+1)}(t) + A_\gamma x^{(\gamma+1)}(t) = f^{(\gamma+1)}(t), \quad x^{(\gamma+1)}(t_0) := x_0^{(\gamma+1)}. \tag{2.11}$$

Решив задачу Коши для системы ОДУ (2.11), найдем вектор $x^{(\gamma+1)}(t)$.

С учетом вычисленных векторов $X^{(1)}_{n-r_1}(t), X^{(2)}_{r_1-r_2}(t), \ \ldots,$ $X^{(\gamma)}_{r_{\gamma-1}-r_\gamma}(t)$ соответственно размерностей $n-r_1, r_1-r_2, \ldots, r_{\gamma-1}-r_\gamma, r_\gamma$ будет построен вектор

$$z(t) := \big(X^{(1)}_{n-r_1}(t), \ldots, X^{(\gamma)}_{r_{\gamma-1}-r_\gamma}(t), x^{(\gamma+1)}(t)\big)^T.$$

Параллельно выполнению операций (1)–(4) вычисляется матрица

$$V := \prod_{k=1}^{\gamma} \bar{\theta}_k \bar{V}_k, \quad \text{где} \quad \bar{\theta}_k \bar{V}_k := \begin{bmatrix} I_{n-r_{k-1}} & O \\ O & \theta_k V_k \end{bmatrix}$$

$r_0 = n$.

Искомое решение $x(t)$ задачи (2.1) будет

$$x(t) = V z(t).$$

2.2 Задача Коши для недоопределенной системы дифференциальных уравнений.

Пусть (2.1) есть задача Коши для недоопределенной системы дифференциальных уравнений, решение которой существует.

Две ситуации возможны: при первой ситуации индекс системы (2.1) больше нуля, при второй – индекс системы (2.1) равен нулю. Каждую из ситуаций рассмотрим раздельно.

2.2.1.

Пусть (2.1) есть задача Коши для недоопределенной системы дифференциальных уравнений индекса индекса $\gamma > 1$.

Метод решения недоопределенной АДУ незначительно отличается от метода п.2.1 для решения регулярной задачи Коши и состоит из конечного числа шагов.

Типичный первый шаг требует выполнения следующих операций.

(1) От задачи (2.1) осуществляется переход к задаче Коши вида

$$\begin{bmatrix} B_1^{(1)} \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \dot{x}^{(1)}(t) + \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{bmatrix} x^{(1)}(t) = f^{(1)}(t), \quad x^{(1)}(t_0) = x_0^{(1)}, \qquad (2.12)$$

путем умножения (2.1) слева на U_1 и замены переменных $x^{(1)}(t) = \theta_1 x(t)$, так что $x_0^{(1)} = \theta_1 x_0$. Здесь U_1 –ортогональная матрица, θ_1 –матрица перестановок, реализующие левостороннее нормализованное разложение матрицы $B_0 = B$; $\mathbb{O}$ – нулевая $(m - r_1) \times n$ матрица, $B_1^{(1)}$ – матрица размеров $r_1 \times n$. Одновременно с разложением B_0 вычисляется матрица $U_1 A \theta_1 = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \\ A_2^{(1)} \end{bmatrix}$ с блоками $A_1^{(1)}$ и $A_2^{(1)}$ размеров $r_1 \times n$ и $(m - r_1) \times n$ соответственно, и вектор $f^{(1)}(t) = U_1 f^{(0)}(t)$, $f^{(0)}(t) := f(t)$. Заметим, что матрица $A_2^{(1)}$ имеет полный строчный ранг, что следует из полноты строчного ранга пучка $A + \lambda B$.

(2) Из вида (2.12) следует, что решение $x^{(1)}(t)$ должно удовлетворять следующим двум задачам с одним и тем же начальным условием:

- задаче Коши

$$B_1^{(1)} \dot{x}^{(1)}(t) + A_1^{(1)} x^{(1)}(t) = f_1^{(1)}(t), \quad x^{(1)}(t_0) = \theta_1 x_0 := x_0^{(1)}, \qquad (2.13)$$

• задаче вычисления частного решения недоопределенной СЛАУ

$$A_1^{(1)}x^{(1)}(t) = f_2^{(1)}(t), \quad x^{(1)}(t_0) = \theta_1 x_0 \equiv x_0^{(1)}. \qquad (2.14)$$

Здесь $x^{(1)}(t) = \theta_1 x^{(0)}(t)$, $x^{(0)}(t) := x(t)$, так что компоненты вектора $x_0^{(1)}$ отличается от компонент вектора x_0 разве лишь порядком следования; $f_1^{(1)}(t)$ и $f_2^{(1)}(t)$ суть векторы, составленные из r_1 первых и $m - r_1$ последних компонент вектора $f^{(1)}(t)$.

(3) Находится решение задачи (2.14). Для этого выполняются следующие шаги.

(3.1) В (2.14) делается замена паременных

$$x^{(1)}(t) = V_1 y^{(1)}(t), \qquad (2.15)$$

приводящая к решению недоопределенной системы

$$\big[L_1, \mathbb{O}\big] y^{(1)}(t) = f_2^{(1)}(t). \qquad (2.16)$$

В качестве матрицы V_1 берется ортогональная матрица, реализующая разложение

$$A_2^{(1)} V_1 = \big[L_1, \mathbb{O}\big], \qquad (2.17)$$

где L_1 левая треугольная порядка $(m - r_1)$ матрица с $\det L_1 \neq 0$, $\mathbb{O}$ – нулевая $(m - r_1) \times (n - m + r_1)$ матрица. Из (2.15) находим

$$y^{(1)}(t) = V_1^T x^{(1)}(t) = (y_1^{(1)}(t), \dots, y_n^{(1)}(t))^T,$$
$$y^{(1)}(t_0) = V_1^T x_0^{(1)} = y_0^{(1)} = (y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})^T.$$

(3.2) Находится решение системы $L_1 \eta = f_2^{(1)}(t)$.

(3.3) Находится частное решение $y_*^{(1)}(t)$ системы (2.16)

$$y_*^{(1)}(t) := \big(L_1^{-1} f_2^{(1)}(t), y_{m-r_1+1}(t), \dots, y_n^{(1)}(t)\big)^T;$$
$$y_*^{(1)}(t_0) = \big(L_1^{-1} f_2^{(1)}(t_0), y_{m-r_1+1}^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\big)^T.$$

С учетом, что в решении (2.16) последние $n - m + r_1$ компоненты могут быть взяты произвольными функциями, в качестве их в векторе $y_*^{(1)}(t)$ выбраны неизвестные компоненты $y_i^{(1)}(t)$, $i = m - r_1 + 1, \dots, n$, связанные с соответствующими компонентами $x^{(1)}(t)$, а следовательно, и $x(t)$ – решения (2.1), соотношением (2.15).

Как и в п.2.1 устанавливается, что

$$L_1^{-1} f_2(t_0) = \big(y_1^{(0)}, \ldots, y_{n-r_1}^{(0)}\big)^T,$$

так что $y_*^{(1)}(t_0) = y_0^{(1)}$.

(3.4) Частное решение $y^{(1)}(t)$ системы (2.16) запишем в блочном виде

$$y^{(1)}(t) = \big(L_1^{-1} f_2^{(1)}(t), y_{m-r_1+1}(t), \ldots, y_n(t)\big)^T \equiv \big(X_{m-r_1}^{(1)}(t), x^{(2)}(t)\big)^T. \tag{2.18}$$

Здесь $X_{m-r_1}^{(1)}(t)$ вектор, составленный из $(m-r_1)$ первых компонент вектора $y^{(1)}(t)$, $x^{(2)}(t)$ – вектор из последних $n-m+r_1$ компонент $y^{(1)}(t)$.

(4) Для вычисления неизвестного вектора $x^{(2)}(t)$ в системе (2.13) делаем замену переменных $x^{(1)}(t) = V_1 y^{(1)}(t)$, осуществляя переход от задачи (2.13)–(2.14) к решению задачи Коши вида

$$B_1 \dot{x}^{(2)}(t) + A_1 x^{(2)}(t) = f^{(2)}(t), \quad x^{(2)}(t_0) := x_0^{(2)}. \tag{2.19}$$

Здесь B_1, A_1 суть матрицы размеров $r_1 \times (n-m+r_1)$, составленные из последних $(n-m+r_1)$ столбцов матриц

$$B_1^{(1)} V_1 = \big[B_0^{(1)},\, B_1\big], \quad A_1^{(1)} V_1 = \big[A_0^{(1)},\, A_1\big],$$

$$f^{(2)}(t) = f_1^{(1)}(t) - B_0^{(1)} X_{m-r_1}^{(1)}(t) - A_0^{(1)} X_{m-r_1}^{(1)}(t),$$

$f_1^{(1)}(t)$ вектор из системы (2.13).

Переход от (2.13) к задаче Коши (2.19) заканчивается выполнение первого шага рассматриваемого метода.

Далее процесс решения разветвляется в зависимости от ситуации имеет ли B_1 неполный строчный ранг. Если индекс исходной системы (2.1) навен 1, то (2.19) есть система нулевого индекса. Тогда искомое решение задачи (2.1) будет

$$x(t) = \theta_1 V_1 \big(X_{m-r_1}^{(1)}(t), x_2^{(2)}(t)\big)^T,$$

где $x_2^{(2)}(t)$ есть решение задачи Коши для недоопределенной системы нулевого индекса*.

*Метод решения задачи Коши для недоопределенной системы нулевого индекса рассмотрен в п.2.2.2.

Если B_1 имеет ранг меньше $(m-r_1)$, т.е. индекс γ задачи (2.1) больше 1, то в качестве исходной задачи берется задача (2.19) и выполнение (1)–(4) продолжается до тех пор, пока на некотором шаге $r_\gamma = r_{\gamma+1}$, так что придем к задаче Коши для недоопределенной системы нулевого индекса вида

$$B_\gamma \dot{x}^{(\gamma+1)}(t) + A_\gamma x^{(\gamma+1)}(t) = f^{(\gamma+1)}(t), \quad x^{(\gamma+1)}(t_0) = x_0^{(\gamma+1)} = \theta_\gamma x_0^{(\gamma)}. \tag{2.20}$$

Решив задачу Коши для системы ОДУ (2.20), найдем вектор $x^{(\gamma+1)}(t)$. С учетом вычисленных векторов $X^{(1)}_{m-r_1}(t), X^{(2)}_{r_1-r_2}(t)$, $\ldots$, $X^{(\gamma)}_{r_\gamma - r_{\gamma+1}}(t), x^{(\gamma+1)}(t)$ соответственно размерносте $n-r_1, r_1 - r_2, \ldots, , r_{\gamma-1}-r_\gamma, r_\gamma$ будет получен вектор

$$z(t) := \left(X^{(1)}_{m-r_1}(t), \ldots, X^{(\gamma)}_{r_{\gamma-1}-r_\gamma}(t), x^{(\gamma+1)}(t)\right)^T.$$

Параллельно выполнению операций (2)–(4) вычисляется матрица

$$V := \prod_{k=1}^{\gamma} \bar{\theta}_k \bar{V}_k, \quad \text{где} \quad \bar{\theta}_k \bar{V}_k := \begin{bmatrix} I_{n-r_{k-1}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \theta_k V_k \end{bmatrix}.$$

Искомое решение задачи (2.1) будет

$$x(t) = Vz(t).$$

2.2.2. Пусть (2.1) есть задача Коши для системы дифференциальных уравнений нулевого индекса так что $m \times n$ пучок $A + \lambda B$ имеет ранг $\rho = m < n$.

Для сведения (2.1) к решению регулярной системы ОДУ требуется выполнить следующие операции.

(1) От (2.1) с помощью замены переменных $x(t) = Uy(t)$ перейти к решению задачи Коши вида

$$\begin{gathered}[L,\, \mathbb{O}]\dot{y}(t) + [A_1,\, A_2]y(t) = g(t), \\ y_0 = U^T x(t_0) := U^T x_0 = \left(y_1^0, \ldots, y_n^0\right)^T \equiv y_0. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Здесь $g(t) = \theta f(t)$;

$$\big[L,\, \mathbb{O}\big] = \theta BU$$

есть правостороннее нормализованное разложение матрицы B, так что θ есть матрица перестановок, U – ортогональная матрица, реализующая нормализованное разложение; L есть $m \times m$ левая треугольная неособенная матрица; $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times (n-m)$

матрица, A_1 и A_2 матрицы размеров $m \times m$ и $m \times (n-m)$ соответственно.

Учитывая строение матрицы $[L, \mathbb{O}]$ при $\dot{y}(t)$ в (2.21), заключаем, что $n-m$ компонент вектора $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ являются произвольными константами.

(2) Выберем $y_i(t) = y_i(t_0) \equiv y_i^0$, $i = m+1, \dots, n$. Компоненты $y_i(t)$, $i = 1, \dots, m$ вектора $y(t)$ будем определять как решение регулярной ОДУ вида

$$L\dot{z}(t) + A_1 z(t) = \widehat{g}(t), \quad z(t_0) = z_0, \tag{2.22}$$

где $z(t) := (y_1(t), \dots, y_m(t))^T$, $z_0 = (y_1^0, \dots, y_m^0)^T$; $\widehat{g}((t) := g(t) - A_2(y_{m+1}^0(t), \dots, y_n^0)^T$. Тогда искомое решение $x(t)$ задачи (2.1) будет

$$x(t) = U\big(y_1(t), \dots, y_m(t), y_{m+1}^0(t), \dots, y_n^0(t)\big)^T.$$

2.3 Задача Коши для переопределенной системы дифференциальных уравнений.

Пусть (2.1) есть задача Коши для переопределенной системы дифференциальных уравнений, так что $m \times n$ пучок $A + \lambda B$ имеет ранг $\rho = n < m$.

Метод решения (2.1) состоит из двух стадий. На первой стадии от (2.1) осуществляется переход к решению двух задач: задаче Коши для дифференциальных уравнений и задаче решения системы линейно-алгебраических уравнений, удовлетворяющих одному и тому же начальному условию. На второй стадии выявляется совместность решения указанных выше задач и их решение.

Реализация первой стадии требует выполнения следующих операций.

(1) От задачи (2.1) переходим к решению задачи Коши вида

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} \dot{z}(t) + \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} z(t) = g(t), \quad z(t) = \theta^T x(t), \quad z(t_0) = \theta^T x_0 := z_0. \tag{2.23}$$

Этот переход осуществляется умножением слева системы (2.1) на ортогональную матрицу V, реализующую левостороннее нормализованное разложение матрицы B. Здесь B_1 есть $n_1 \times n$ матрица ($n_1 \leqslant n$), $\mathbb{O}$ – нулевая $(m - n_1) \times n$ матрица, θ – матрица перестановок, n_1 – ранг B. Одновременно с нормализованным разложением B вычисляются матрица $\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = VA\theta$ и вектор

$g(t) = Vf(t) = (g_1(t), \ldots, g_m(t))^T$, где A_1 и A_2 – матрицы размеров $n_1 \times n$ и $(m - n_1) \times n$ соответственно.

(2) Решение задачи (2.23) сводится к решению двух задач:

• задачи Коши вида

$$B_1 \dot{z}(t) + A_1 z(t) = g^{(1)}(t), \quad z(t_0) = \theta^T x_0 := z_0; \tag{2.25}$$

• и вычислению частного решения линейно алгебраической системы вида

$$A_2 z(t) = g^{(2)}(t), \quad z(t_0) = \theta^T x_0 := z_0. \tag{2.26}$$

Здесь $g^{(1)}(t)$ и $g^{(2)}(t)$ суть векторы, составленные из первых n_1 и последних $(m - n_1)$ компонент вектора $g(t)$ из (2.23).

Реализация второй стадии требует дополнительных исследований. В зависимости от размеров нулевой матрицы $\mathbb{O}$ в (2.23) могут возникнуть следующие две ситуации

(а) Матрица $\mathbb{O}$ имеет размеры $(m - n) \times n$. В этом случае B_1 является квадратной, порядка n, неособенной матрицей, а следовательно, система (2.25) является регулярной системой ОДУ.

Решив ее, найдем вектор $z_*(t)$. Вектор $x(t) = \theta^T z_*(t)$ даст решение исходной задачи (2.1).

(б) Матрица $\mathbb{O}$ в (2.23) имеет размеры $(m - n_1) \times n$, $n_1 < n$, так что B_1 имеет размеры $n_1 \times n$. В этом случае (2.25) и (2.26) являются соответственно системой дифференциальных уравнений, индекса $\gamma \geqslant 1$ с матрицей B_1 полного строчного ранга и СЛАУ с матрицей A_2 размеров $(m - n_1) \times n$.

Для определения типа СЛАУ и установления совместности задачи (2.25), (2.26), а следовательно, и исходной задачи (2.1), нужны дополнительные исследования системы (2.26).

В зависимости от размеров матрицы A_2 возможны следующие варианты.

1) При $n_1 = (m - n_1)$, $\det A_2 \neq 0$, система (2.26) имеет единственное решение.

2) При $(m - n_1) > n_1$, система (2.26) является переопределенной и может быть совместной (с единственным решением) или несовместной.

3) При $(m - n_1) < n_1$ система (2.26) является недоопределенной, если ранг A_2 равен $m - n_1$. В противном случае, а также при $n_1 = (m - n_1)$ и $\det A_2 = 0$, система (2.26) является вполне неопределенной.

Из несовместности системы (2.26) следует несовместность исходной задачи*.

Если (2.26) имеет единственное решение $z_*(t)$ (вариант 1) и 2)), то для совместности задачи (2.1) достаточно, чтобы $z_*(t)$ удовлетворял системе (2.25). В этом случае решение исходной задачи (2.1) будет

$$x(t) = \theta z_*(t).$$

Если система (2.26) является недоопределенной (вариант 3)), то для решения (2.25), (2.26) применим метод, описанный в п.2.2. Используя этот метод, найдем решение $z_*(t)$ задачи (2.25), (2.26). Решение исходной задачи будет $x(t) = \theta z_*(t)$.

Случай, когда СЛАУ (2.26) является вполне неопределенной, требует методов решения задачи Коши для вполне неопределенной системы, рассматриваемых в п.2.4.

2.4 Задача Коши для вполне неопределенной системы дифференциальных уравнений.

Пусть (2.1) есть задача Коши для вполне неопределенной системы дифференциальных уравнений, так что $m \times n$ пучок $A + \lambda B$ имеет $\rho < \min(m, n)$. Метод решения состоит из выполнения следующих операций.

(1) Система (2.1) преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix} B_{11} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} \dot{y}(t) + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} y(t) = g(t), \quad y(t_0) = \theta_2^T V_1^T x_0 := y_0 \tag{2.27}$$

с помощью замены переменных $x(t) = V_1 \theta_2 y(t)$ и умножения (2.1) слева на матрицу $V_2 \theta_1$, так что $g(t) = V_2 \theta_1 f(t)$. Здесь V_i – ортогональные матрицы, θ_i – матрицы перестановок, реализующие двухстороннее нормализованное разложение $m \times n$ матрицы B. B_{11} – $r \times r$ матрица ранга r, $\mathbb{O}$ – нулевые матрицы соответствующих размеров.

(2) Задача (2.27) заменяется решением двух задач:

• задачи Коши

$$\begin{gathered} \left[B_{11}, \mathbb{O}\right] \dot{y}(t) + \left[A_{11}, A_{12}\right] y(t) = g^{(1)}(t) \equiv (g_1, \ldots, g_r)^T, \\ y(t_0) := y_0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)^T = \theta_2^T V_1^T x_0; \end{gathered} \tag{2.28}$$

*Способы определения совместности СЛАУ рассмотрены в п.2.4.2.

• задачи вычисления частного решения СЛАУ вида

$$[A_{21},\, A_{22}]\, y(t) = g^{(2)}(t) \equiv (g_{r+1}(t), \dots, g_n(t))^T \tag{2.29}$$

удовлетворяющего тому же условию $y(t_0) = y_0$.

Здесь (2.28) есть задача Коши для недоопределенной системы дифференциальных уравнений индекса $\gamma > 0$, (2.29) есть СЛАУ с прямоугольной $(m - r) \times n$ матрицей.

В зависимости от размеров $(m - r_1) \times n$ матрицы $A_2 := [A_{21},\, A_{22}]$ возможны следующие варианты.

1) При $r_1 = n$ и $\det A_2 \neq 0$ система (2.29) имеет единственное решение $y_*(t)$. Для совместности задачи достаточно, чтобы $y_*(t)$ удовлетворял задаче Коши (2.28). В этом случае решение исходной задачи (2.1) дается вектором $x(t) = V_1 \theta_2 y_*(t)$.

2) При $r_1 > n$ система (2.29) является переопределенной и, в случае совместности, ее решение $y_*(t)$ должно удовлетворять задаче Коши (2.28). Тогда $x(t) = V_1 \theta_2 y_*(t)$.

3) При $\hat{r}_1 < n$, ($\hat{r}_1 = \operatorname{rank} A_2$), система (2.29) является недоопределенной. В этом случае решение задачи (2.28), (2.29) осуществляется методом из п.2.2. Найдя решение $y_*(t)$ задачи (2.28), (2.29), получим $x(t) = V_1 \theta_2 y_*(t)$.

4) Ранг A_2 меньше $\min(r_1, n)$, т.е. (2.29) является вполне неопределенной СЛАУ, так что нужны дополнительные исследования о ее совместности. В случае совместной СЛАУ (2.29) ее решение $y_*(t)$, удовлетворяющее задаче Коши (2.28), позволит найти $x(t) = V_1 \theta_2 y_*(t)$.

2.4.2 Определение условия совместности СЛАУ.

Пусть решается СЛАУ

$$Cx = f(t),$$

C – $m \times n$ постоянная матрица ранга r, $f(t)$ – правая часть, которая может быть постоянным вектором, или зависящим от параметра t.

Условие совместности приходится выяснять, когда C есть матрица полного столбцового ранга, и в случае вполне неопределенной СЛАУ, когда $r < \min(m, n)$.

Для определения совместности переопределенной СЛАУ следует от исходной СЛАУ перейти к СЛАУ вида

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} X_1 = g(t),$$

где $\begin{bmatrix} C_1 \\ \mathbb{O} \end{bmatrix} = Q_1 C \theta$ есть левостороннее нормализованное разложение C: $\mathbb{O}$ есть $(m-n) \times n$ нулевая матрица, $g(t) = Q_1 f$, $X_1 = \theta_1 X$, Q_1 и θ_1 – ортогональная матрица и матрица перестановок, реализующие нормализованное разложение. Обозначим $Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{01} \end{bmatrix}$, где Q_{11} и Q_{01} есть $n \times m$ и $(n-m) \times m$ матрицы, строки Q_{11} образуют базис левого нуль-пространства матрицы C. Условием совместности исходной СЛАУ является равенство

$$Q_{11} f = 0,$$

где 0 – нулевой вектор.

Для определения совместности СЛАУ в случае $r < \min(m, n)$, следует получить двухстороннее нормализованное разложение C, т.е. разложение вида

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} = \theta_2 Q_1 C \theta_1 Q_2,$$

где Q_i и θ_i соответственно ортогональные матрицы и матрицы перестановок. Пусть $\theta_2 Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{10} \end{bmatrix}$ – блочное разбиение с матрицами Q_{11} и Q_{10} размеров $m \times r$ и $m \times (m-r)$ соответственно. Тогда условием совместности исходной СЛАУ будет выполнение равенства

$$Q_{10} f = \mathbb{O}.$$

§3. Применение ΔW-1 и ∇R-алгоритмов к решению задачи Коши для систем АДУ

Предлагаются методы, позволяющие решение задачи Коши для системы АДУ сводить к решению задачи Коши для системы ОДУ индекса $\gamma = 0$ или $\gamma = 1$. Рассматриваются как регулярные системы индекса $\gamma \geqslant 1$, так и сингулярные системы дифференциальных уравнений индекса $\gamma \geqslant 0$. Предлагаемые методы основаны на применении ΔW-1 алгоритма. В случае совместных систем дифференциальных уравнений индекса $\gamma \geqslant 1$, соответствующий пучок которых имеет полный ранг, предлагаются также методы, основанные на применении ∇R-алгоритма.

3.1. О некоторых преобразованиях дифференциальных операторов.

Ниже рассматриваются преобразования матричных и дифференциальных операторов, которые будут использованы при построении методов решения задачи Коши для систем с постоянными коэффициентами, неразрешимых относительно старшей производной.

3.1.1. Пусть $D(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{s} \lambda^k C_k$ есть $m \times n$ матричный полином ранга ρ, степени $s \geqslant 1$, с коэффициентами C_k, постоянными, независящими от λ матрицами.

Рассмотрим преобразования следующих видов

$$D(\lambda)P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{s_1} C_k^{(1)}\lambda^k \equiv D_1(\lambda); \tag{3.1}$$

$$P_2(\lambda)D(\lambda) = \sum_{k=0}^{s_2} C_k^{(2)}\lambda^k \equiv D_2(\lambda); \tag{3.2}$$

$$P_4(\lambda)D(\lambda)P_3(\lambda) = \sum_{k=0}^{s_3} C_k^{(3)}\lambda^k \equiv D_3(\lambda). \tag{3.3}$$

Здесь $P_k(\lambda)$, $k = 1,\dots,4$ – матричные полиномы, реализующие преобразования (3.1)–(3.3), $D_k(\lambda)$, $k = 1,2,3$ – результирующие матричные полиномы степеней s_1, s_2 и s_3 соответственно, справедлива лемма.

Лемма 3.1. *Если в преобразовании* $(3.k), k = 1,2,3$ *степень* s_k *матричного полинома* $D_k(\lambda)$ *не превосходит степени* s *исходного матричного полинома* $D(\lambda)$, *то имеют место равенства*

$$D\Big(\frac{d}{dt}\Big)P_1\Big(\frac{d}{dt}\Big) = D_1\Big(\frac{d}{dt}\Big) \quad \text{для} \quad (3.1); \tag{3.4}$$

$$P_2\Big(\frac{d}{dt}\Big)D\Big(\frac{d}{dt}\Big) = D_2\Big(\frac{d}{dt}\Big) \quad \text{для} \quad (3.2); \tag{3.5}$$

$$P_4\Big(\frac{d}{dt}\Big)D\Big(\frac{d}{dt}\Big)P_3\Big(\frac{d}{dt}\Big) = D_3\Big(\frac{d}{dt}\Big) \quad \text{для} \quad (3.3). \tag{3.6}$$

Приводим доказательство равенства (3.4).

Из (3.1) находим

$$C_kP_1(\lambda) = C_k^{(1)} + \mathcal{E}_k(\lambda), \quad k = 0,1,\dots,s_1;$$
$$C_kP_1(\lambda) = \mathbb{O} + \mathcal{E}_k(\lambda), \quad k = s_1+1,\dots,s,$$

где $\mathcal{E}_k(\lambda)$ – матричный полином.

При $\lambda = \frac{d}{dt}$ эти равенства примут вид

$$C_k P_1(\frac{d}{dt}) = C_k^{(1)} + \mathcal{E}_k(\frac{d}{dt}), \quad k = 0, 1, \ldots, s_1,$$
$$C_k P_1(\frac{d}{dt}) = \mathbb{O} + \mathcal{E}_k(\frac{d}{dt}), \quad k = s_1 + 1, \ldots, s.$$

При этом из (3.1) имеем

$$\sum \lambda^k \mathcal{E}_k(\lambda) = 0, \tag{3.7}$$

так что оператор $\sum\limits_{k=0}^{s} \frac{d^k}{dt^k}\mathcal{E}_k(\frac{d}{dt})$ является аннулирующим, т.е. при любой дифференцируемой функции $u(t)$ имеет место равенство $\sum\limits_{k=0}^{s} \frac{d^k}{dt^k}\mathcal{E}_k(\frac{d}{dt})u(t) = 0$. Отсюда из (3.7) следует справедливость (3.4).

Доказательство равенств (3.5) и (3.6) проводится аналогично. Лемма доказана.

Замечание. Учитывая, что степень s_i преобразованного матричного полинома $D_i(\lambda)$ будет меньше степени s полинома $D(\lambda)$ только в частном случае полинома $D(\lambda)$, не имеющего конечного спектра (все собственные значения $D(\lambda)$ суть бесконечные), в дальнейшем для простоты рассуждений считаем $s_i = s$.

3.1.2. Нас будут интересовать преобразования матричных полиномов и соответствующих им дифференциальных операторов, обладающие следующими свойствами.

(а) Степень преобразованного матричного полинома, а следовательно, и порядок соответствующего ему дифференциального оператора не больше степени (порядка) исходного полинома (исходного дифференциального оператора).

(б) Преобразованный полином имеет конечные собственные значения, совпадающие с конечными собственными значениями исходного полинома за исключением быть может нулевого собственного значения. Преобразованный полином не имеет особенности типа нуль на бесконечности. Преобразованный дифференциальный оператор имеет индекс $\gamma = 0$ или 1.

(в) Для матричного полинома $P_k(\lambda)$, осуществляющего рассматриваемое преобразование, существует обратный матричный полином от λ или от λ^{-1}.

Для дифференциального оператора $P_k(\frac{d}{dt})$ существует обратный дифференциальный оператор $Q_k(\frac{d}{dt})$ или обратный интегральный оператор $Q_k(\int\limits_{t_0}^{t} dt)$ полиномиального вида, т.е. $Q_k(\lambda)$ – есть матричный полином.

Для построения преобразований, обладающих свойствами (а)–(в) используем ΔW-1 и ∇R-алгоритмы [2, 3].

3.1.3. Сначала рассмотрим преобразования видов (3.1)–(3.3) (в форме дифференциальных операторов (3.4)–(3.6)), реализуемые с помощью ΔW-1 алгоритма.

В зависимости от соотношений чисел ρ, m и n возможны три ситуации.

1) При $\rho = m \leqslant n$ алгоритм ΔW-1, примененный к $D(\lambda)$, реализует разложение вида

$$D(\lambda)W_1(\lambda) = \bigl[\Delta_1(\lambda), O\bigr]. \tag{3.8}$$

Здесь O – есть $m \times (n-m)$ нулевая матрица, $\Delta_1(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{s} \widehat{C}_k^{(1)}\lambda^k$ есть матричный полином размеров $m \times m$, степени s, конечные собственные значения которого совпадают с конечными собственными значениями исходного матричного полинома $D(\lambda)$, на бесконечности $\Delta_1(\lambda)$ не имеет особенности типа нуль; $W_1(\lambda)$ есть унимодулярная $n \times n$ матрица. Полагая в (3.1) $P_1(\lambda) = W_1(\lambda)$, и, принимая во внимание Лемму 3.1, равенство (3.4) запишем в виде

$$\left[\sum_{k=0}^{s} C_k\Bigl(\frac{d^k}{d\lambda^k}\Bigr)\right] W_1\Bigl(\frac{d}{d\lambda}\Bigr) = \sum_{k=0}^{s} C_k^{(1)}\Bigl(\frac{d^k}{d\lambda^k}\Bigr), \tag{3.9}$$

где $C_k^{(1)} = [\widehat{C}_k^{(1)}, O]$, $k = 0, 1, \ldots, s$.

Заметим, что при $m = n$ нулевой блок в (3.8) отсутствует и матричный полином $\Delta_1(\lambda)$, является регулярным.

2) При $\rho = n \leqslant m$ алгоритм ΔW-1 реализует разложение вида

$$W_2(\lambda)D((\lambda) = \begin{bmatrix} \Delta_2(\lambda) \\ O \end{bmatrix}. \tag{3.10}$$

Здесь O есть $(m-n) \times n$ нулевая матрица, $\Delta_2(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{s} \hat{C}_k^{(2)}\lambda^k$ – матричный полином размеров $n \times n$, степени s, конечные собственные значения которого совпадают с конечными собственными значениями исходного полинома $D(\lambda)$, на бесконечности $\Delta_2(\lambda)$ не имеет особенности типа нуль; $W_2(\lambda)$ – унимодулярная $m \times m$ матрица. Полагая в (3.2) $P_2(\lambda) := W_2(\lambda)$, и принимая во внимание Лемму 3.1, равенство (3.5) запишем в виде

$$W_2(\frac{d}{dt})\sum_{k=0}^{s} C_k(\frac{d^k}{dt^k}) = \sum_{k=0}^{s} C_k^{(2)}\frac{d^k}{dt^k}, \tag{3.11}$$

где $C_k^{(2)} = \begin{bmatrix} \widehat{C}_k^{(2)} \\ O \end{bmatrix}$, $k = 0, 1, \ldots, s$.

Заметим, что при $n = m$ нулевой блок в разложении (3.10) отсутствует и матричный полином $\Delta_2(\lambda)$ является регулярным.

3) При $\rho < \min(m, n)$ двукратное применение ΔW-1 алгоритма, приводит к разложению вида

$$W_4(\lambda)D(\lambda)W_3(\lambda) = \begin{bmatrix} \Delta_3(\lambda) & O_{\rho,n-\rho} \\ O_{m-\rho,\rho} & O_{m-\rho,n-\rho} \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Здесь O_{pq} – нулевая $p \times q$ матрица, $\Delta_3(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{s} \widehat{C}_k^{(3)}\lambda^k$ регулярный $\rho \times \rho$ матричный полином, конечные собственные значения которого совпадают с конечными собственными значениями матричного полинома $D(\lambda)$, на бесконечности $\Delta_3(\lambda)$ не имеет особенности типа нуль. $W_3(\lambda)$ и $W_4(\lambda)$ – унимодулярные $n \times n$ и $m \times m$ матрицы соответственно.

Полагая в (3.3) $P_4(\lambda) = W_4(\lambda)$, $P_3(\lambda) = W_3(\lambda)$ и принимая во внимание Лемму 3.1, равенство (3.6) запишем в виде

$$W_4(\frac{d}{dt})\sum_{k=0}^{s} C_k\frac{d^k}{dt^k}W_3(\frac{d}{dt}) = \sum_{k=0}^{s} C_k^{(3)}\frac{d^k}{dt^k}, \tag{3.13}$$

где $C_k^{(3)} = \begin{bmatrix} \widehat{C}_k^{(3)} & O \\ O & O \end{bmatrix}$, $k = 0, \ldots, s$.

Справедливость свойств (а)–(в) для преобразований (3.8), (3.10) и (3.12) следует из свойств ΔW-1 алгоритма.

3.1.4. Рассмотрим построение преобразований, обладающих свойствами (а)–(в), полученных с помощью ∇R-алгоритма.

Пусть $D(\lambda)$ есть $m \times n$ матричный полином полного ранга. Возможны две ситуации в зависимости от соотношений чисел ρ, m и n.

Первая ситуация. Матричный полином $D(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{s} C_k \lambda^k$ имеет полный столбцовый ранг ($\rho = n \leqslant m$). Тогда применяя ∇R-алгоритм к $D(\lambda)$, имеем

$$D(\lambda)P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^{s} \widehat{C}_k^{(1)} \lambda^k \equiv \widehat{D}_1(\lambda). \tag{3.14}$$

Здесь

$$P_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{\gamma} T_k \operatorname{diag}\{I_{r_k}, \lambda I_{n-r_k}\} \equiv \sum_{k=0}^{p_1} P_k^{(1)} \lambda^k$$

матричный полином, реализующий ∇R-разложение $D(\lambda)$; T_k – ортогональная матрица. По Лемме 3.1 имеет место операторное равенство

$$D(\frac{d}{dt})P_1(\frac{d}{dt}) \equiv \sum_{k=0}^{s} C_k \frac{d^k}{dt^k} P_1(\frac{d}{dt}) = \sum_{k=1}^{s} \widehat{C}_k^{(1)} \frac{d^k}{dt^k} \equiv \widehat{D}_1(\frac{d}{dt}), \tag{3.15}$$

где $\hat{D}_1\left(\frac{d}{dt}\right)$ имеет нулевой индекс, так как из свойств ∇R-алгоритма следует, что матричный полином $\widehat{D}_1(\lambda)$ имеет только конечные собственные значения, совпадающие, за исключением нулевого собственного значения, с конечными собственными значениями $D(\lambda)$. Отсюда правое нуль-пространство матрицы $\widehat{C}_s$, коэффициента при старшей степени λ в $\widehat{D}_1(\lambda)$, есть пустое множество, а в случае $m = n$ коэффициент $\widehat{C}_s$ есть невырожденная матрица. Следовательно, свойство (б) для преобразований (3.14), (3.15) выполнено.

Легко проверить, что $P_1^{-1}(\lambda)$ существует и имеет вид

$$P_1^{-1}(\lambda) = \prod_{k=\gamma}^{1} \operatorname{diag}\{I_{r_k}, \lambda^{-1} I_{n-r_k}\} \big[T_k\big]^T = \sum_{k=0}^{q_1} Q_k^{(1)} \mu^k \equiv Q_1(\mu),$$

$$\mu = \lambda^{-1}.$$

Здесь $Q_1(\mu)$ – матричный полином от μ. Полагая $\mu = \int\limits_{t_0}^{t} dt$, получим

$$P_1^{-1}(\frac{d}{dt}) = Q_1\left(\int_0^t dt\right). \tag{3.16}$$

Таким образом, установлено, что преобразование (3.14) (или в форме дифференциальных операторов (3.15)) обладает свойствами (а)–(в).

Вторая ситуация. Матричный полином $D(\lambda)$ имеет полный строчный ранг $\rho = m \leqslant n$.

Применяя рассуждения, приведенные в первой ситуации к матрице $D^T(\lambda)$, получим

$$D^T(\lambda) P_2^T(\lambda) = \sum_{k=0}^{s} \widehat{C}_k^{(2)} \lambda^k \equiv \widehat{D}_2^T(\lambda). \tag{3.17}$$

Отсюда, полагая $\lambda = \frac{d}{dt}$, имеем

$$P_2(\frac{d}{dt}) D(\frac{d}{dt}) \equiv \widehat{D}_2(\frac{d}{dt}) = \sum_{k=0}^{s} \left[\widehat{C}_k^{(2)}\right]^T \frac{d^k}{dt^k}. \tag{3.18}$$

Здесь

$$P_2(\lambda) = \prod_{k=\gamma_2}^{1} \operatorname{diag}\left\{I_{r_k}, \lambda I_{m-r_k}\right\} \left[\widetilde{T}_k\right]^T. \tag{3.19}$$

3.1.5. Приведенные выше рассуждения конструктивно доказывают следующие утверждения.

Пусть $D(\lambda)$ есть $m \times n$ матричный полином ранга ρ степени $s \geqslant 1$, спектр которого содержит бесконечные собственные значения.

Теорема 3.2. *Для любого дифференциального оператора $D(\frac{d}{dt})$ порядка $s \geqslant 1$, индекса $\gamma \geqslant 1$ существует оператор $\Delta_i(\frac{d}{dt})$ порядка $s_i \leqslant s$, единичного индекса. Оператор $\Delta_i(\lambda)$ может быть построен с помощью ΔW-1 алгоритма в одном из следующих видов*

$$\left[\Delta_1(\frac{d}{dt}), O\right] = D(\frac{d}{dt}) W_1(\frac{d}{dt}) \quad \textit{если} \quad \rho = m \leqslant n;$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_2(\frac{d}{dt}) \\ O \end{bmatrix} = W_2(\frac{d}{dt}) D(\frac{d}{dt}) \quad \textit{если} \quad \rho = n \leqslant m;$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_3(\frac{d}{dt}) & O \\ O & O \end{bmatrix} = W_3(\frac{d}{dt}) D(\frac{d}{dt}) W_4(\frac{d}{dt}) \quad \textit{если} \quad \rho < \min(m, n).$$

Здесь $W_i(\lambda)$, $i = 1, 2, 3, 4$ унимодулярные матрицы, реализующие ранговую факторизацию $D(\lambda)$ в каждом из рассматриваемых случаев.

Пусть $m \times n$ матричный полином $D(\lambda)$ имеет полный ранг, спектр $D(\lambda)$ содержит бесконечные собственные значения.

Теорема 3.3. *Для любого дифференциального оператора $D(\frac{d}{dt})$ порядка $s \geqslant 1$, индекса $\gamma \geqslant 1$ существует оператор $\widehat{D}_i(\frac{d}{dt})$ нулевого индекса, порядка $s_i \leqslant s$. Оператор $\widehat{D}_i(\frac{d}{dt})$ может быть построен с помощью ∇R-алгоритма в одном из следующих видов*

$$\widehat{D}_1(\frac{d}{dt}) = D(\frac{d}{dt})P_1(\frac{d}{dt}) \quad \textit{при} \quad \rho = n \leqslant m;$$

$$\widehat{D}_2(\frac{d}{dt}) = P_2(\frac{d}{dt})D(\frac{d}{dt}) \quad \textit{при} \quad \rho = m \leqslant n;$$

Здесь $P_i(\lambda)$, $i = 1, 2$ матричные полиномы, реализующие ∇R-разложения $D(\lambda)$ и $D^T(\lambda)$ соответственно.

3.2. Методы сведения решения задачи Коши для системы АДУ первого порядка к решению задачи Коши для системы ОДУ.

Пусть

$$B\dot{x}(t) + Ax(t) = f(t), \qquad x(t_0) = x_0 \tag{3.21}$$

есть исходная задача Коши индекса $\gamma \geqslant 0$. Соответствующий (3.21) пучок $D(\lambda) = \lambda B + A$ имеет размеры $m \times n$ и ранг ρ.

Требуется от (3.21) перейти к решению задачи Коши

$$\hat{B}_1\dot{z}(t) + \hat{A}_1 z(t) = g(t), \quad z(t_0) = z_0 \tag{3.22}$$

индекса не больше единицы и установить связь между решениями $x(t)$ и $z(t)$, векторами x_0 и z_0 и правыми частями $f(t)$ и $g(t)$.

Для решения поставленной задачи будем использовать ΔW-1 и ∇R-алгоритмы. При этом применение ΔW-1алгоритма приводит к системе (3.22) индекса единица, применение ∇R-алгоритма приводит к системе (3.22) нулевого индекса.

3.2.1. Применение ΔW-1 алгоритма к решению задачи Коши для систем АДУ первого порядка. В зависимости от соотношения чисел* m, n и ρ (параметров пучка $\lambda B + A$), рассмотрим три ситуации.

Первая ситуация $\rho = m \leqslant n$. Система (3.21) является регулярной при $m = n$ и недоопределенной при $m < n$. Для преобразования задачи (3.21) к задаче (3.22) требуется выполнить следующие операции.

*Заметим, что число ρ заранее неизвестно и определяется ΔW-1 алгоритмом при его реализации.

(1) Используя ΔW-1 алгоритм, представить пучок в виде (3.8)

$$(A+\lambda B)W_1(\lambda) = A_1 + \lambda B_1.$$

Здесь

$$A_1 = [\widehat{A}_1, O], \quad B_1 = [\widehat{B}_1, O], \tag{3.23}$$

O – нулевая $m\times(n-m)$ матрица, $\widehat{A}_1+\lambda\widehat{B}_1$ – регулярный пучок, конечный спектр которого совпадает с конечным спектром $D(\lambda)$, на бесконечности нет особенности типа нуль; $W_1(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{p_1} U_k^{(1)}\lambda^k \equiv \big[W_{11}(\lambda), W_{10}(\lambda)\big]$ унимодулярная $n\times n$ матрица с блоками $W_{11}(\lambda)$ и $W_{10}(\lambda)$ соответственно размеров $n\times m$ и $n\times(n-m)$, причем столбцы $W_{10}(\lambda)$ образуют базис нуль-пространства из правых полиномиальных решений пучка $D(\lambda)$.

(2) В (3.21) сделать замену переменных

$$x(t) := W_1(\frac{d}{dt})y(t) = \sum_{k=0}^{p_1} U_k^{(1)}\frac{d^k}{dt^k}y(t), \text{ так что}$$

$$y(t) = W_1^{-1}(\frac{d}{dt})x(t) = \sum_{k=0}^{q_1} V_k^{(1)}\frac{d^k}{dt^k}x(t).$$

Здесь $W_1^{-1}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{q_1} V_k^{(1)}\lambda^k$ есть унимодулярная $n\times n$ матрица, обратная к $W_1(\lambda)$.

Учитывая, что равенство $W_1(\lambda)W_1^{-1}(\lambda) = W_1^{-1}(\lambda)W_1(\lambda) = I$ имеет место при любом λ, заключаем $U_0^{(1)}V_0^{(1)} = V_0^{(1)}U_0^{(1)} = I$, т.е. $U_0^{(1)}$ и $V_0^{(1)}$ – взаимно обратные матрицы.

В результате замены переменных система (3.21) примет вид

$$B_1\dot{y}(t) + A_1 y(t) = f(t), \quad y(t_0) = V_0x_0 \equiv y_0 = (y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})^T.$$

(3) Решить задачу Коши для регулярной системы дифференциальных уравнений индекса, равного единице:

$$\widehat{B}_1\dot{z}(t) + \widehat{A}_1 z(t) = \widehat{f}(t) \equiv \big(f_1(t), \dots, f_m(t)\big)^T, \quad z(t_0) = \big(y_1^0, \dots, y_m^0\big)^T. \tag{3.24}$$

Тогда

- $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{p_1} U_k^{(1)}\frac{d^k}{dt^k}y(t)$ есть решение задачи Коши (3.21);

$y(t) = \big(z(t), y^0_{m+1}, \dots, y^0_n\big)^T$.

• $X(t) = x(t) + W_{10}(\frac{d}{dt})c(t)$ есть общее решение исходной системы (3.21). Здесь $c(t)$ – произвольный вектор из пространства $(n-m)$ измерений над полем дифференцируемых функций.

Вторая ситуация $\rho = n \leqslant m$. Система (3.21) является регулярной при $n = m$, и переопределенной при $n < m$. Для преобразования задачи (3.21) к задаче (3.22) требуется выполнить следующие операции.

(1) Используя ΔW-1 алгоритм, представить пучок $D(\lambda)$ в виде (3.10):

$$W_2(\lambda)(A + \lambda B) = A_2 + \lambda B_2,$$

где

$$A_2 = \begin{bmatrix} \widehat{A}_2 \\ O \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} \widehat{B}_2 \\ O \end{bmatrix}, \tag{3.25}$$

O – нулевая $(m-n) \times n$ матрица, $\widehat{A}_2 + \lambda \widehat{B}_2$ – регулярный $n \times n$ пучок, конечный спектр которого совпадает с конечным спектром $D(\lambda)$, на бесконечности нет особенности типа нуль; $W_2(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{p_2} U_k^{(2)} \lambda^k = \begin{bmatrix} W_{21}(\lambda) \\ W_{20}(\lambda) \end{bmatrix}$ – унимодулярная $m \times m$ матрица с блоками $W_{21}(\lambda)$ и $W_{20}(\lambda)$ соответственно размеров $n \times m$ и $(m-n) \times n$, причем строки $W_{20}(\lambda)$ образуют базис нуль-пространства из левых полиномиальных решений $D(\lambda)$.

(2) Вычислить вектор $g(t) = \sum\limits_{k=0}^{p_2} U_k^{(2)} \frac{d^k}{dt^k} f(t) = \big(g_1(t), \dots, g_m(t)\big)^T$.

(3) Проверить условие совместности системы (3.21), т.е. выполнение равенства

$$W_{20}(\frac{d}{dt})f(t) \equiv \big(g_{n+1}(t), \dots, g_m(t)\big)^T = 0 \text{ – нулевой вектор.}$$

(4) В случае совместной системы (3.21), решить задачу Коши

$$\widehat{B}_2 \dot{x}(t) + \widehat{A}_2 x(t) = \big(g_1(t), \dots, g_n(t)\big)^T \equiv \widehat{g}(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.26}$$

для регулярной системы ОДУ единичного индекса.

Найденный вектор $x(t)$ дает решение исходной задачи (3.21).

Третья ситуация $\rho < \min(m, n)$. Система (3.21) является вполне неопределенной. Для преобразования задачи (3.21) к задаче (3.22) требуется выполнить следующие операции.

(1) Используя ΔW-1 алгоритм, представить пучок $D(\lambda)$ в виде (3.12)

$$W_4(\lambda)D(\lambda)W_3(\lambda) = \lambda B_3 + A_3,$$

где

$$B_3 = \begin{bmatrix} \widehat{B}_3 & O \\ O & O \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} \widehat{A}_3 & O \\ O & O \end{bmatrix}, \tag{3.27}$$

O – нулевые матрицы соответствующих размеров, $\lambda\widehat{B}_3 + \widehat{A}_3$ – регулярный пучок $\rho \times \rho$, конечный спектр которого совпадает с конечным спектром $D(\lambda)$, на бесконечности нет особенности типа нуль; $W_3(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{p_3} U_k^{(3)}\lambda^k = [W_{31}, W_{30}]$ и $W_4(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{p_4} U_k^{(4)}\lambda^k = \begin{bmatrix} W_{41}(\lambda) \\ W_{40}(\lambda) \end{bmatrix}$ – унимодулярные матрицы соотвественно размеров $n\times n$ и $m\times m$ с блоками $W_{31}(\lambda)$, $W_{30}(\lambda)$ размеров $n\times\rho$ и $n\times(n-\rho)$ и блоками $W_{41}(\lambda)$, $W_{40}(\lambda)$ соответственно размеров $\rho\times m$, $(m-\rho)\times m$.

(2) Проверить выполнение условия совместности системы (3.21), т.е. равенство

$$W_{40}(\frac{d}{dt})f(t) = 0. \tag{3.28}$$

(3) При выполнении условия совместности, найти унимодулярную матрицу $W_3^{-1}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{q_3} V_k^{(3)}\lambda^k$, вектор $y_0 = V_0$, $x_0 = (y_1^0, \ldots, y_n^0)^T$, вектор $\hat{g}(t) = W_{41}(\frac{d}{dt})f(t)$.

(4) Решить регулярную задачу Коши для системы индекса единица

$$\widehat{B}_3\dot{z}(t) + \widehat{A}_3 z(t) = \widehat{g}(t), \quad z(t_0) = (y_1^0, \ldots, y_\rho^0)^T. \tag{3.29}$$

Тогда

- $x(t) = W_3(\frac{d}{dt})y(t) \equiv \sum\limits_{k=0}^{p_3} U_k^{(3)}\frac{d^k}{dt^k}y(t)$ есть решение исходной задачи Коши;
- $X(t) = x(t) + W_{30}(\frac{d}{dt})c(t)$ есть общее решение системы (3.2.1).

Здесь $y(t) = \left(z(t), y_{\rho+1}^0, \ldots, y_n^0\right)^T$, $z(t)$ есть решение задачи (3.29); $c(t)$ есть произвольный вектор из пространства $(n-\rho)$ измерений над полем дифференцируемых функций.

3.2.2. Применение ∇R-алгоритма к решению задачи Коши для систем АДУ первого порядка.

Переход от задачи (3.21) полного ранга, индекса $\gamma > 0$ к задаче (3.22) индекса $\gamma = 0$ будем осуществлять, используя ∇R-алгоритм.

Первая ситуация. Пучок $D(\lambda)$ имеет полный столбцовый ранг. Для перехода к задаче (3.22) требуется выполнить следующие операции.

(1) К пучку $D(\lambda)$ применить ∇R-алгоритм, т.е. перейти к пучку

$$\widehat{D}_1(\lambda) \equiv \lambda \widehat{B}_1 + \widehat{A}_1 = D(\lambda) P_1(\lambda), \tag{3.30}$$

где

$$P_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{\gamma} T_k \operatorname{diag}\left\{I_{r_k}, \lambda I_{n-r_k}\right\} \equiv \sum_{k=0}^{p_1} P_k^{(1)} \lambda^k$$

матричный полином, реализующий разложение (3.30), $P_k^{(1)}$, $k = 0, 1, \ldots, p_1$, суть постоянные $n \times n$ матрицы; $\widehat{A}_1 + \lambda \widehat{B}_1$ – пучок $m \times n$, спектр которого совпадает, за исключением нулевого собственного значения, с конечным спектром $D(\lambda)$, T_k – ортогональные матрицы.

(2) Вычислить матрицу

$$P_1^{-1}(\lambda) = \prod_{k=\gamma}^{1} \operatorname{diag}\left\{I_{r_k}, \lambda^{-1} I_{n-r_k}\right\} \left(T_k\right)^T \equiv \sum_{k=0}^{q_1} \lambda^{-k} Q_k^{(1)} \equiv Q_1\left(\frac{1}{\lambda}\right), \tag{3.31}$$

где $Q_1(\frac{1}{\lambda})$ – матричный полином от $(\frac{1}{\lambda})$, $Q_k^{(1)}$, $k = 0, \ldots, q_1$, суть постоянные $(n \times n)$ матрицы.

(3) В (3.21) сделать замену переменных $x(t) = P_1(\frac{d}{dt}) y(t)$, т.е. перейти к задаче (3.22).

(4) Найти решение $y(t)$ задачи Коши (3.22) нулевого индекса*

$$\widehat{B}_1 \dot{y}(t) + \widehat{A}_1 y(t) = f(t), \quad y(t_0) = Q_0^{(1)} x_0,$$

где $\widehat{B}_1$, $\widehat{A}_1$ матрицы $m \times n$ из (3.30).

*Способы решения задачи Коши для сингулярной системы ОДУ нулевого индекса рассмотрены в §2.

(5) Найти искомое решение задачи (3.21)

$$x(t) = P_1(\frac{d}{dt})y(t) = \sum_{k=0}^{p_1} P_k^{(1)} \frac{d^k}{dt^k} y(t).$$

Вторая ситуация. Пучок $D(\lambda)$ имеет полный строчный ранг. Для перехода к задаче (3.22) требуется выполнить следующие операции.

(1) Найти матричный полином $P_2(\lambda)$ и пучок $\widehat{A}_2 + \lambda \widehat{B}_2$, применяя к $D(\lambda)$ алгоритм ∇R. В результате имеем разложение вида

$$P_2(\lambda) D(\lambda) = \widehat{A}_2 + \lambda \widehat{B}_2, \tag{3.33}$$

где

$$P_2^T(\lambda) = \prod_{k=1}^{\gamma} \widetilde{T}_k \operatorname{diag}\left\{I_{r_k}, \lambda I_{m-r_k}\right\} \equiv \sum_{k=0}^{p_2} \left[P_k^{(2)}\right]^T \lambda^k$$

матричный полином, $P_k^{(2)}$, $k = 0, \ldots, p_2$ – постоянные $m \times m$ матрицы, $\widetilde{T}_k$ суть $m \times m$ ортогональные матрицы, $\widehat{A}_2 + \lambda \widehat{B}_2$ – пучок $m \times n$, спектр которого совпадает с конечным спектром $D(\lambda)$ за исключением нулевого собственного значения.

(2) Вычислить

$$g_2(t) = \sum_{k=0}^{p_2} P_k^{(2)} \frac{d^k}{dt^k} f(t). \tag{3.34}$$

(3) Найти решение задачи Коши нулевого индекса

$$\widehat{B}_2 \dot{x}(t) + \widehat{A}_2 x(t) = g_2(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.35}$$

где $\widehat{B}_2$ и $\widehat{A}_2$ суть $m \times n$ матрицы из разложения (3.33). Так найденный вектор $x(t)$ есть решение исходной задачи (3.21).

3.3. Решение задачи Коши для системы АДУ порядка $s > 1$.

Пусть

$$\sum_{k=0}^{s} C_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) = f(t), \ \left[\frac{d^k x}{dt^k}\right]_{t=t_0} = x_0^{(k)}, \ k = 0, \ldots, s-1 \tag{3.36}$$

есть исходная задача Коши, неразрешимая относительно старшей производной. Соответствующий (3.36) матричный полином

$$D(\lambda) = \sum_{k=0}^{s} C_k \lambda^k$$

имеет размеры $m \times n$ и ранг ρ. При этом если $D(\lambda)$ – регулярный матричный полином, то система (3.36) имеет индекс $\gamma \geqslant 1$; если $D(\lambda)$ сингулярный матричный полином, то система (3.36) имеет индекс $\gamma \geqslant 0$.

Требуется от (3.36) перейти к решению задачи Коши

$$\sum_{k=0}^{s} \hat{C}_k \frac{d^k}{dt^k} z(t) = g(t), \ \left[\frac{d^k}{dt^k} z(t)\right]_{t=t_0} = z_0^{(k)}, \ k = 0, \dots, s-1 \quad (3.37)$$

разрешимой относительно старшей производной, и установить связь между решениями $x(t)$ и $z(t)$; начальными условиями $x^{(k)}(t_0)$ и $z^{(k)}(t_0)$, $k = 0, \dots, s-1$, а также между правыми частями $f(t)$ и $g(t)$.

Для решения поставленной задачи будем использовать ΔW-1 и ∇Rалгоритмы.

3.3.1. Применение ΔW-1 алгоритма к решению задачи Коши для систем АДУ порядка $s > 1$.

Как и в случае систем первого порядка в зависимости от соотношений чисел ρ, m, n будем рассматривать три ситуации.

Ситуация $\rho = m \leqslant n$. Для перехода от (3.36) к (3.37) требуется выполнить следующие операции.

(1) Используя ΔW-1 алгоритм, найти унимодулярную матрицу $W_1(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{s} U_k^{(1)} \lambda^k$, реализующую правостороннюю ранговую факторизацию вида (3.8) матричного полинома $D(\lambda)$.

(2) Найти унимодулярную матрицу $W_1^{-1}(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{q_1} V_k^{(1)} \lambda^k$.

(3) В (3.36) сделать замену переменных

$$x(t) = W_1\Big(\frac{d}{dt}\Big) y(t) = \sum_{k=0}^{p_1} U_k^{(1)} \frac{d^k}{dt^k} y(t),$$

так что

$$y(t) = W^{-1}\Big(\frac{d}{dt}\Big) x(t) = \sum_{k=0}^{q_1} V_k^{(1)} \frac{d^k}{dt^k} x(t).$$

В результате замены система (3.36) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} \left[\sum_{k=0}^{s} \hat{C}_k \frac{d^k}{dt^k}, \mathbb{O}\right] y(t) = f(t) \equiv \big(f_1(t), \dots, f_n(t)\big); \\ y_0^{(k)} = V_0 x_k^{(0)} \equiv \big(y_{01}^{(k)}, \dots, y_{0n}^{(k)}\big)^T. \end{gathered} \quad (3.38)$$

(4) Решить задачу Коши

$$\sum_{k=0}^{s} \hat{C}_k \frac{d^k}{dt^k} z(t) = f^{(1)}(t) \equiv \big(f_1(t), \dots, f_m(t)\big)^T, \qquad z^{(k)}(t_0) = \big(y_{01}^{(k)}, \dots, y_{0m}^{(k)}\big)^T \tag{3.39}$$

для регулярной системы ОДУ индекса единица.

Тогда

• $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{q_1} U_k^{(1)} \frac{d^k}{dt^k} y(t)$ есть решение исходной задачи (3.36)

$y(t) := \big(z(t), y_{m+1,0}, \dots, y_{n0}\big)^T$, $z(t)$ есть решение задачи Коши (3.39).

• При $m < n$ общее решение системы (3.36) дается формулой

$$X(t) = x(t) + W_{01}\Big(\frac{d}{dt}\Big) C(t),$$

где $W_{01}(\lambda)$ – матрица, составленная из $(n-\rho)$ последних столбцов матрицы $W_1(\lambda)$; $C(t)$ – произвольный вектор из пространства векторов $(n-m)$ измерений над полем дифференцируемых функций.

Ситуация $\rho = n < m$**.** Для перехода от задачи (3.36) к (3.37) требуется выполнить следующие операции.

(1) Используя ΔW-1 алгоритм, найти унимодулярную матрицу $W_2(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{p_2} U_k^{(2)} \lambda^k$, реализующую ранговую факкторизацию вида (3.10).

(2) К обоим частям уравнения (3.36) применить дифференциальный оператор $W_2(\frac{d}{dt})$. Имеем

$$\begin{bmatrix} \sum\limits_{k=0}^{s} \widehat{C}_k^{(2)} \frac{d^k}{dt^k} \\ O \end{bmatrix} x(t) = g(t),$$

где

$$g(t) = W_2\Big(\frac{d}{dt}\Big) f(t) = \sum_{k=0}^{p_2} U_k^{(2)} \frac{d^k}{dt^k} f(t).$$

(3) Установить выполнение совместности решаемой системы (3.36), т.е. выполнение равенства

$$W_{02}\Big(\frac{d}{dt}\Big) f(t) = 0.$$

Здесь $W_{02}(\lambda)$ – матрица, составленная из $(m-n)$ последних строк матрицы $W_2(\lambda)$.

(4) В случае совместности системы (3.36) найти решение задачи Коши

$$\sum_{k=0}^{s} \widehat{C}_k^{(2)} \frac{d^k}{dt^k} x(t) = g(t); \;\; x^{(k)}(t_0) = x_0^{(k)}, \; k = 0, \dots, s-1 \qquad (3.40)$$

для регулярной системы единичного индекса.

Найденный вектор $x(t)$ дает решение (3.36).

Ситуация $\rho < \min(m, n)$. Для перехода от (3.36) к задаче (3.37) требуется выполнить следующие операции.

(1) Используя ΔW-1 алгоритм, найти унимодулярные матрицы $W_3(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{p_3} U_k^{(3)} \lambda^k$ и $W_4(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{p_4} U_k^{(4)} \lambda^k$, реализующие двухстороннюю ранговую факторизацию вида (3.12).

(2) Найти унимодулярную матрицу

$$W_3^{-1}(\lambda) = \sum_{k=0}^{q_3} V_k^{(3)} \lambda^k.$$

(3) К обоим частям уравнения (3.36) применить дифференциальный оператор $W_4\left(\frac{d}{dt}\right)$ и сделать замену переменных $x(t) = \sum\limits_{k=0}^{p_3} U_k^{(3)} \frac{d^k}{dt^k} y(t)$.

В результате придем к системе вида

$$\begin{bmatrix} \Delta_3\left(\frac{d}{dt}\right) & O \\ O & O \end{bmatrix} y(t) = g(t); \;\; y^{(k)}(t_0) \equiv y_0^{(k)} = \left(y_{01}^{(k)}, \dots, y_{0n}^{(k)}\right).$$

Здесь

$$\Delta_3\left(\frac{d}{dt}\right) \widetilde{y}(t) = \sum_{k=0}^{s} \hat{C}_k^{(3)} \frac{d^k}{dt^k} \widetilde{y}(t);$$

$$g(t) = W_4\left(\frac{d}{dt}\right) f(t) = \sum_{k=0}^{p_4} U_k^{(4)} \frac{d^k}{dt^k} f(t) = \left(g_1(t), g_2(t)\right)^T,$$

$g_1(t)$ и $g_2(t)$ векторы, составленные соответственно из ρ первых и $(m-\rho)$ последних компонент вектора $g(t)$.

(4) Проверить выполнение совместности системы (3.36), т.е. выполнение условия

$$W_{04}\big(\frac{d}{dt}\big)f(t) \equiv g_2(t) = 0.$$

Здесь $W_{04}(\lambda)$ – матрица, составленная из $(m-\rho)$ последних строк матрицы $W_4(\lambda)$.

(5) Найти решение регулярной задачи Коши для системы единичного индекса

$$\sum_{k=0}^{s} \widehat{C}_k^{(3)} \frac{d^k}{dt^k} z(t) = g_1(t), \quad z^{(k)}(t_0) \equiv \big(z_{01}^{(k)}, \dots, z_{\rho 0}^{(k)}\big)^T, \qquad z_{i0}^{(k)} = y_{i0}^{(k)}, \ i = 1, \dots, \rho. \tag{3.41}$$

Тогда

- $x(t) = W_4(\frac{d}{dt})y(t)$ есть решение исходной задачи (3.36);

$y(t) := \big(z(t), y_{0\rho+1}, \dots, y_{0n}\big)^T$, $z(t)$ – есть решение задачи Коши (3.41).

- $X(t) = x(t) + W_{03}\big(\frac{d}{dt}\big)C(t)$ есть общее решение задачи (3.36).

Здесь $W_{03}\big(\frac{d}{dt}\big)$ – матрица, составленная из $(n-\rho)$ последних столбцов матрицы $W_3(\lambda)$; $C(t)$ – произвольный вектор из пространства векторов $(n-\rho)$ измерений над полем дифференцируемых функций.

3.3.2. Применение ∇R-алгоритма к решению задачи Коши для системы АДУ порядка $s > 1$.

Пусть $m \times n$ матричный полином $D(\lambda)$, соответствующий дифференциальному оператору уравнения (3.36), имеет полный ранг. Будем рассматривать две ситуации.

Первая ситуация $\rho = n \leqslant m$. Для перехода от задачи (3.36) к задаче нулевого индекса требуется выполнить следующие операции.

(1) Используя ∇R-алгоритм, найти матричный полином $P_1(\lambda)$, реализующий разложение (3.14).

(2) Вычислить рациональную матрицу

$$P_1^{-1}(\lambda) \equiv Q_1\big(\frac{1}{\lambda}\big) = \prod_{k=\gamma_1}^{1} \operatorname{diag}\big\{I_{r_k}, \lambda^{-1} I_{n-r_k}\big\}[T_k]^T \equiv \sum_{k=0}^{q_1} \lambda^{-k} Q_k.$$

(3) В системе (3.36) сделать замену переменных

$$x(t) = P_1\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) = \sum_{k=0}^{p_1} P_k^{(1)} \frac{d^k}{dt^k} y(t).$$

(4) Найти решение $y(t)$ задачи Коши нулевого индекса

$$\sum_{k=0}^{s} \hat{C}_k^{(1)} \frac{d^k}{dt^k} y(t) = f(t), \ \ y_0^k = Q_0^{(1)} x_0^k, \ \ k = 0, \dots, s-1.$$

(5) Найти искомое решение задачи (3.36)

$$x(t) = P_1\left(\frac{d}{dt}\right)y(t).$$

Вторая ситуация $\rho = m < n$. Для перехода от задачи (3.36) к задаче нулевого индекса требуется выполнить следующие шаги.

(1) Используя ∇R-алгоритм, найти матричный полином $P_2(\lambda)$, реализующий разложение (3.17).

(2) К обоим частям уравнения (3.36) применить дифференциальный оператор $P_2\left(\frac{d}{dt}\right) = \sum_{k=0}^{p_2} P_k^{(2)} \frac{d^k}{dt^k}$ и найти решение полученной задачи Коши нулевого индекса:

$$\sum_{k=0}^{s} \hat{C}_k^{(2)} \frac{d^k}{dt^k} x(t) = g(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Здесь $g(t) := P_2\left(\frac{d}{dt}\right)f(t)$. Так найденный вектор $x(t)$ даст решение задачи (3.36).

§4. Некоторые вспомогательные алгоритмы

Ниже приводятся алгоритмы ранговой факторизациии(ΔW-1 алгоритм и ∇R-алгоритм) для пучка матриц $D(\lambda) = A - \lambda B$ размеров $m \times n$ ранга ρ. Подробное описание этих алгоритмов для полиномиальных матриц произвольной целой степени $s \geqslant 1$ см. в [1, 5].

ΔW-1 алгоритм для пучка матриц.

Приводим алгоритм (так называемый ΔW-1 алгоритм) правосторонней ранговой факторизации для $m \times n$ пучка $D(\lambda)$, ранга $\rho \leqslant n$, вида

$$D(\lambda)W(\lambda) = \left[\Delta_1(\lambda), \mathbb{O}\right].$$

Здесь $\mathbb{O}$ есть $m\times(n-\rho)$ нулевая матрица, $W(\lambda)$ – унимодулярная $n\times n$ матрица, $\Delta_1(\lambda) = \hat{A} - \lambda\hat{B}$ есть $m\times\rho$ пучок матриц полного столбцового ранга, спектр которого совпадает с конечным спектром исходного пучка $D(\lambda)$; в точке бесконечность $\Delta_1(\lambda)$ не имеет особенности типа нуль.

Выполнение двух других (левосторонней и двухсторонней) ранговой факторизаций проводится аналогично применением ΔW-1 алгоритма к пучкам $D^T(\lambda)$ и $\Delta_1^T(\lambda)$ соответственно.

Алгоритм преобразования исходного пучка $A - \lambda B$ в пучок полного столбцового ранга $\widehat{A}-\lambda\widehat{B}$ состоит в построении конечной последовательности пучков $D_k(\lambda) = \lambda C_1^k + C_0^k$, $k = 0,1,\dots,l$ по следующему предписанию

$$\begin{aligned}
&D_{k+1}(\lambda) = D_k(\lambda)W_k(\lambda), \qquad k = 0,\dots,l-1\\
&D_0(\lambda) = \lambda C_1^0 + C_0^0 \qquad \big(C_1^0 = B_{mn} \equiv -B, \quad C_0^0 = A_{mn} \equiv A\big),
\end{aligned}$$

$D_l(\lambda) = \widehat{A}-\lambda\widehat{B}$ – искомый $m\times\rho$ пучок полного столбцового ранга, $W_k(\lambda)$ – унимодулярная матрица.

Типичный (первый) шаг алгоритма состоит в выполнении следующих операций.

(1) По коэффициентам пучка $D_0(\lambda)$ формируется постоянная матрица M. При этом могут возникнуть следующие три ситуации.

i) Среди столбцов матрицы C_1 нет нулевых. В этой ситуации полагаем $n_1 = n$, $M = C_1$ и переходим к выполнению операции (2).

ii) Среди столбцов матрицы C_1 есть нулевые. В этом случае столбцы матриц C_1 и C_0 переставляются так, чтобы*

$$C_1 = \big[\overline{C}_{11}, \mathbb{O}\big], \qquad C_0 = \big[C_{01}, C_{02}\big].$$

Здесь $\mathbb{O}$ – нулевая $m\times(n-t_1)$ матрица; $\overline{C}_{11}$ – матрица $m\times t_1$, не имеющая нулевых столбцов; C_{01} и C_{02} – матрицы соответственно размеров $m\times t_1$ и $m\times(n-t_1)$. Если C_{02} не имеет нулевых столбцов ($C_{02} = \overline{C}_{02}$), полагаем $M = [\overline{C}_{11}, \overline{C}_{02}]$, $n_1 = n$ и переходим к выполнению операции (2).

*Здесь и ниже одной и той же буквой обозначаются матрицы до и после перестановки столбцов.

iii) Среди столбцов C_{02} есть нулевые. С помощью матрицы перестановок столбцы матрицы C_{02} переставляем так, чтобы

$$C_{02} := \left[\overline{C}_{02}, \mathbb{O}\right],$$

$\overline{C}_{02}$ – блок размеров $m \times t_2$, не имеющий нулевых столбцов; $\mathbb{O}$ – нулевой $m \times (n - t_1 - t_2)$ блок.

Полагаем $M_1 = [\overline{C}_{11}, \overline{C}_{02}]$, $n = n_1$ и переходим к выполнению операции (2).

(2) Находится $n_1 \times (n_1 - r_1)$ матрица T, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы M ($r_1 = \mathrm{rank} M$), например, с помощью алгоритма ΔW-0 разложения матрицы M.

(3) Матрица T преобразуется к левой трапецеидальной матрице L размеров $n_1 \times h_1$ ($h_1 \geqslant n_1 - r_1$) с помощью правостороннего умножения T на цепочку матриц плоских вращений или отражений без перестановок строк. При этом если главный минор матрицы T нулевой, то на некотором шаге i перехода от T к L встретится ведущая строка (с номером i) нулевой длины. Эта строка вычеркивается, а соответствующий i-ый столбец заменяется столбцом единичной матрицы $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$ так, чтобы диагональный элемент был равен единице. Приведение к левой трапецеидальной матрице продолжается с преобразуемой матрицей меньших размеров (с вычеркнутой строкой). В результате будет построена матрица L, число столбцов h_1 которой не меньше $n_1 - r_1$: столбцы L содержат ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы M и, быть может, столбцы единичной матрицы.

(4) Осуществляется переход к пучку $D_1(\lambda)$. В зависимости от ситуаций, возникающих при формировании матрицы M_1, могут быть использованы следующие расчетные формулы.

Пусть в результате выполнения операций (1)–(3) алгоритма построен пучок

$$D_1(\lambda) = C_0^1 + \lambda C_1^1 \qquad C_0^1 = A_{mn_1};\ C_1^1 = B_{mn_1} \qquad n_1 \geqslant n_0, \quad n_0 = n.$$

В ситуации (i) матрица $W_1(\lambda)$, осуществляющая переход от

$D_0(\lambda)$ к $D_1(\lambda)$ имеет вид

$$W_1(\lambda) = \begin{bmatrix} & \vdots & \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ L_{n,h_1} & \vdots & \\ & \vdots & I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} & \vdots & \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ L_1 & \vdots & \\ & \vdots & I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты C_1^1 и C_0^1 пучка $D_1(\lambda)$ вычисляются по формулам

$$C_1^1 := \left[B_{mh_1}^1, B_{m,(n-h_1)}^1\right]; \quad C_0^1 := \left[A_{mh_1}^1, A_{m,(n-h_1)}^1\right],$$

где

$$B_{mh_1}^1 = C_1^0 L_1, \qquad B_{m,n-h_1}^1 = C_1^0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{bmatrix}$$

$$A_{mh_1}^1 = C_0^0 L_1, \qquad A_{m,n-h_1}^1 = C_0^0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{bmatrix}.$$

Расчетные формулы перехода от $D_0(\lambda)$ к $D_1(\lambda)$ ситуаций (ii) и (iii) рассмотрим одновременно, полагая $n_1 = n$ в ситуации (ii) и $n_1 < n$ в ситуации (iii). Пусть C_1^0 имеет нулевыми $(n_1 - t_1)$ столбцов. Будем различать 2 случая: $t_1 \geqslant h_1$ и $t_1 < h_1$. В случае $t_1 \geqslant h_1$ имеем

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{t_1h_1} \\ L_{(n_1-t_1)h_1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{W}_1 = \begin{bmatrix} L_{t_1h_1} & \vdots & \\ L_{(n_1-t_1)h_1} & \vdots & \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ \mathbb{O}_{(n-n_1)h_1} & \vdots & I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{bmatrix}.$$

Тогда коэффициенты $D_1(\lambda) = D_0(\lambda)\widetilde{W}_1(\lambda)$ и $W_1(\lambda) = W_0\widetilde{W}_1(\lambda) = \omega_0^1$ (ω_1^0 – матрица, не зависящая от λ) вычисляются по формулам

$$C_1^1 := \left[B_{mh_1}^1, B_{m,n_1-h_1}^1\right]; \quad C_0^1 := \left[A_{mh_1}^1, A_{m,n_1-h_1}^1\right],$$

где

$$B_{mh_1}^1 = \left[B_{m_1t_1}^0, A_{m(n_1-t_1)}^0\right] \begin{bmatrix} L_{t_1h_1} \\ L_{(n_1-t_1)h_1} \end{bmatrix}, \; A_{mh_1}^1 = A_{mt_1}^0 L_{t_1h_1}$$

$$B_{m(n_1-h_1)}^1 = C_1^0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n_1-h_1)} \\ I_{(n_1-h_1)(n_1-h_1)} \end{bmatrix}, \; A_{m(n_1-h_1)}^1 = A_{m(n_1-t_1)}^0 L_{(n_1-t_1)h_1},$$

$$\omega_0^1 = \begin{bmatrix} & \vdots & \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ L_1 & \vdots & \\ & \vdots & I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{bmatrix}.$$

В случае $t_1 < h_1$ имеем

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{t_1t_1} & \mathbb{O}_{t_1(h_1-t_1)} \\ L_{(n_1-t_1)t_1} & L_{(n_1-t_1)(h_1-t_1)} \end{bmatrix};$$

$$\widetilde{W}_1(\lambda) = \begin{bmatrix} L_{t_1t_1} & \mathbb{O}_{t_1(h_1-t_1)} & \\ & & \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ L_{(n_1-t_1)t_1} & L_{(n_1-t_1)(h_1-t_1)} & \\ & & I_{(n-h_1)(n-h_1)} \\ \mathbb{O}_{(n-n_1)t_1} & \mathbb{O}_{(n-n_1)(h_1-t_1)} & \end{bmatrix}.$$

Тогда коэффициенты $D_1(\lambda)$ и $W_1(\lambda) = \lambda\omega_1^1 + \omega_0^1$ вычисляются по следующим формулам

$$C_1^1 = \left[B_{mt_1}^1, B_{m(h_1-t_1)}^1, B_{m(n_1-h_1)}^1\right],$$
$$C_0^1 = \left[A_{mt_1}^1, A_{m,(h_1-t_1)}^1, A_{m(n_1-h_1)}^1\right],$$

$$B_{mt_1}^1 = \left[B_{mt_1}^0, A_{m(n_1-t_1)}^0\right] \begin{bmatrix} L_{t_1t_1} \\ L_{(n_1-t_1)t_1} \end{bmatrix}, \; B_{m(h_1-t_1)}^1 = \mathbb{O}_{m(h_1-t_1)},$$

$$B_{m(n_1-h_1)}^1 = C_1^0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n_1-h_1)} \\ I_{(n_1-h_1)(n_1-h_1)} \end{bmatrix},$$

$$A_{mt_1}^1 = \left[A_{m_1t_1}^0, \mathbb{O}_{m(n_1-t_1)}\right] \begin{bmatrix} L_{t_1t_1} \\ L_{(n_1-t_1)t_1} \end{bmatrix},$$

$$A_{m(h_1-t_1)}^1 = A_{m(n_1-t_1)}^0 L_{(n_1-t_1)(h_1-t_1)}, \; A_{m(n_1-h_1)}^1 = C_0^0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n_1-h_1)} \\ I_{(n_1-h_1)(n_1-h_1)} \end{bmatrix}.$$

$$\omega_1^1 = \left[\omega_{nt_1}^1, \omega_{n(h_1-t_1)}^1, \omega_{n(n-h_1)}^1\right],$$
$$\omega_0^1 = \left[\widehat{\omega}_{nt_1}^1, \widehat{\omega}_{n(h_1-t_1)}^1, \widehat{\omega}_{n(n-h_1)}^1\right],$$

$$\omega_{nt_1}^1 = \left[\mathbb{O}_{nt_1}, \widehat{\omega}_{n(n-t_1)}^0\right] \begin{bmatrix} L_{t_1t_1} \\ L_{(n_1-t_1)t_1} \\ \mathbb{O}_{(n-n_1)t_1} \end{bmatrix},$$

$$\omega_{n(h_1-t_1)}^1 = \widehat{\omega}_{n(h_1-t_1)}^0 \begin{bmatrix} L_{(h_1-t_1)(h_1-t_1)} \\ \mathbb{O}_{(n-h_1)(h_1-t_1)} \end{bmatrix},$$

$$\omega^1_{n(n-h_1)} = 0, \quad \widehat{\omega}^1_{nt_1} = \left[\widehat{\omega}^0_{nt_1}, \mathbb{O}_{n(n-t_1)}\right] \begin{bmatrix} L_{t_1t_1} \\ L_{(n_1-t_1)t_1} \\ \mathbb{O}_{(n-n_1)t_1} \end{bmatrix},$$

$$\widehat{\omega}_{n(h_1-t_1)} = \widehat{\omega}^0_{n(h_1-t_1)} \begin{bmatrix} L_{(h_1-t_1)(h_1-t_1)} \\ \mathbb{O}_{(n-h_1)(h_1-t_1)} \end{bmatrix}, \ \widehat{\omega}^1_{n(n-h_1)} = \omega^0_0 \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{h_1(n-h_1)} \\ I_{(n-h_1)(n-h_1)} \end{bmatrix}.$$

Операции (1)–(4) алгоритма выполняются до тех пор, пока на некотором шаге $l+1$ матрица M_{l+1} будет иметь полный столбцовый ранг. В этом случае имеем

$$A_l - \lambda B_l = \left[\widehat{A} - \lambda \widehat{B}, \mathbb{O}\right],$$

где $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times (n-\rho)$ матрица, $\widehat{A} - \lambda\widehat{B}$ – искомый пучок $m \times \rho$ полного столбцового ранга, спектр пучка $\widehat{A} - \lambda\widehat{B}$ совпадает с конечным спектром исходного пучка.

4.2. Алгоритм ∇R-факторизации для пучка матриц.

Пусть $D(\lambda) = \lambda B + A$ – пучок размеров $m \times n$ полного ранга, имеющий $\lambda = \infty$ своим собственным значением.

Под ∇R-факторизацией $D(\lambda)$ будем понимать каждую из следующих факторизаций

$$D(\lambda)P_1(\lambda) = \lambda\hat{B}_1 + \hat{A}_1, \ \text{ если ранг } D(\lambda) \text{ равен } n,$$

$$P_2(\lambda)D(\lambda) = \lambda\hat{B}_2 + \hat{A}_2, \ \text{ если ранг } D(\lambda) \text{ равен } m.$$

Здесь $\lambda\hat{B}_i + \hat{A}_i$ – пучок полного ранга (столбцового при $i = 1$ и строчного при $i = 2$) спектр которого конечный и совпадает, за исключением нулевого собственного значения, с конечным спектром исходного пучка $D(\lambda)$. $P_i(\lambda)$, $i = 1, 2$ регулярные матрицы вида

$$P_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{l_1} T_k \operatorname{diag}\left\{I_{r_k}, \lambda I_{n-r_k}\right\},$$

$$P_2(\lambda) = \prod_{k=1}^{l_2} \widetilde{T}_k \operatorname{diag}\left\{I_{r_k}, \lambda I_{m-r_k}\right\},$$

T_k и $\widetilde{T}_k$ – ортогональные матрицы.

Рассмотрим алгоритм ∇R-факторизации в случае пучка столбцового ранга. Алгоритм для пучка полного строчного ранга осуществляется аналогично переходом от $D(\lambda)$ к $D^T(\lambda)$.

Алгоритм конечный и состоит в построении пучков $D_k(\lambda) = \lambda B_k + A_k$, $k = 0, \dots, l$ ($A_0 = A$, $B_0 = B$). Переход от $D_k(\lambda)$ к $D_{k+1}(\lambda)$ осуществляется выполнением следующих операций

(1) Находится ортогональная матрица T_k, реализующая правостороннее нормализованное разложение матрицы B_k. Имеем

$$B_k T_k = \left[L_k, \mathbb{O}\right],$$

где $\mathbb{O}$ есть $m \times (n - r_k)$ нулевая матрица, $r_k = \operatorname{rank} B_k$.

(2) Матрица T_k представляется в блочном виде

$$T_k = \left[T_k^{(1)}, T_k^{(2)}\right],$$

где $T_k^{(2)}$ есть $n \times (n - r_k)$ матрица, столбцы которой образуют ортонормированный базис правого нуль-пространства матрицы B_k.

(3) Осуществляется переход к пучку

$$D_{k+1}(\lambda) = \lambda B_{k+1} + A_{k+1},$$

где $B_{k+1} := \left[B_{k+1}^{(1)}, B_{k+1}^{(2)}\right]$, $A_{k+1} := \left[A_{k+1}^{(1)}, A_{k+1}^{(2)}\right]$ есть блочное представление матриц B_{k+1} и A_{k+1} с блоками размеров $m \times r_k$ и $m \times (n - r_k)$ соответственно: $B_{k+1}^{(1)} := B_k T_k^{(1)}$, $B_{k+1}^{(2)} := A_k T_k^{(2)}$, $A_{k+1}^{(1)} := A_k T_k^{(1)}$, $A_{k+1}^{(2)} := \mathbb{O}$ – нулевая $m \times (n - r_k)$ матрица, $k = 0, \dots, l$; $\hat{A}_1 := A_l T_l$, $\hat{B}_1 := B_l T_l$.

Построение последовательности пучков $D_k(\lambda)$ продолжается до тех пор, пока на некотором шаге получим матрицу B_l полного столбцового ранга ($r_l = n$).

В результате будет построен пучок

$$D_{l+1}(\lambda) := \lambda \hat{B}_1 + \hat{A}_1$$

полного столбцового ранга, спектр которого совпадает с конечным спектром исходного пучка.

Как легко видеть, типичный шаг перехода от пучка $D_k(\lambda)$ к пучку $D_{k+1}(\lambda)$ состоит в выполнении проиведения

$$D_{k+1}(\lambda) = D_k(\lambda) T_k \operatorname{diag}\left\{I_{r_k}, \lambda I_{n-r_k}\right\},$$

так что матрица преобразования исходного пучка $D(\lambda)$ в пучок $\lambda \hat{B}_1 + \hat{A}_1$ имеет вид

$$P_1(\lambda) := \prod_{k=1}^{l} T_k \operatorname{diag}\left\{I_{r_k}, \lambda I_{n-r_k}\right\}.$$

Литература

1. V. N. Kublanovskaya, "Rank division algorithms and their applications," *J.Numer. Lin. Algebra, Appl.*, **1**, No. 2, 199–213 (1992).
2. G. Golub and W. Kahan, "Calculating the singular values and pseudoinverse of a matrix," *SIAM J. Numer. Anal., Ser. B2*, **2**, No. 2, 205–224 (1965).
3. G. Golub and C. Reinsch, "Singular value decomposition and least squares solutions," *Numer. Math.*, **14**, No. 5, 403–420 (1970).
4. Д. К. Фаддеев, В. Н. Кублановская, В. Н. Фаддеева, "Линейно-алгебраические системы с прямоугольными матрицами," в кн.: *Современные Численные Методы Линейной Алгебры. (Материалы международной школы. Киев, 1966)* (1968), с. 16–75.
5. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, В. А. Белый, "Спектральные задачи для пучков матриц. Методы и алгоритмы. III" *Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling*, **4**, No. 3 19–51 (1989).
6. V. N. Kublanovskaya, "The AB-algorithm and its modifications for spectral problems of linear pencils of matrices," *Numer. Math.*, **43**, 329–342 (1984).
7. В. Н. Кублановская, "Алгоритм AB и его свойства," *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **102**, 42–66 (1980).
8. В. Н. Кублановская, В. Н. Симонова, "О некоторых свойствах алгоритма AB," *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **111**,117–137 (1981).
9. C. B. Moller and G. M. Stewart, "An algorithm for generalized matrix eigenvalue problems," *SIAM J. Numer. Anal.*, **10**, No. 2, 241–256 (1973).
10. Т. Я. Конькова, Л. Т. Савинова, В. Н. Симонова, Н. Б. Сциборская, Т. В. Ващенко, "Пакет программ "Спектр" (1984).
11. Т. Я. Конькова, В. Н. Симонова, "Библиотека MATLAB функций для полиномиальных матриц," *Зап. научн. семин. ЛОМИ*, **219**, 53–80 (1984).

Kublanovskaya V. N. Solution of the Cauchy problem. Methods and algorithms.

The problem Cauchy for systems of algebraic-differentional equation with constant coefficients, i.e., for systems of ordinary differential equations that cannot be solved for the highest derivative both regular of index $\gamma > 0$ and singular arbitrary γ are considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 июля 1996г.