Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 248, 1998 г.

В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов

НЕСОКРАТИМЫЕ ФАКТОРИЗАЦИИ Q-ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Введение

Рассматриваются q-параметрические рациональные матрицы, т.е. матрицы, элементы которых представлены дробями, числители и знаменатели которых суть скалярные полиномы от q параметров ($q \geqslant 1$). Статья состоит из трех параграфов и является обобщением предыдущей работы авторов [3].

В §1 приводятся некоторые сведения о q-параметрических рациональных матрицах: конечные особые точки (полюса, нули, точки неопределенности); нуль-пространства; неприводимая реализация и ее свойства. Отмечается, что используемые определения при $q = 1$ согласуются с классическими.

В §2 дается классификация факторизаций q-параметрических рациональных матриц: базовые (левая, правая), несократимые (левая, правая, двусторонняя); минимальные (по размерам, по степени). Устанавливаются свойства несократимых факторизаций, позволяющие сводить задачу определения особых точек и нуль-пространств рациональных матриц к спектральным задачам для q-параметрических полиномиальных матриц.

В §3 приводятся доказательства существования и алгоритмы построения несократимых факторизаций q-параметрических рациональных матриц (в том числе, минимальных по размерам).

§1. Некоторые сведения о q-параметрических рациональных матрицах

Пусть $R(\lambda, \bar{\mu}) = \{r_{ij}(\lambda, \bar{\mu})\}$ суть q-параметрическая рациональная $m \times n$ матрица, элементы которой являются дробно-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00701).

рациональными функциями:

$$r_{ij}(\lambda,\bar\mu)=\frac{u_{ij}(\lambda,\bar\mu)}{v_{ij}(\lambda,\bar\mu)},\quad i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,$$

где $u_{ij}(\lambda,\bar\mu)$, $v_{ij}(\lambda,\bar\mu)$ – скалярные полиномы*) от q переменных $(\lambda,\bar\mu):=(\lambda,\mu_2,\dots,\mu_q):=(\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_q)$.

Обозначим через ρ ранг матрицы $R(\lambda,\bar\mu)$. Если $\rho=m=n$, то матрица $R(\lambda,\bar\mu)$ называется *регулярной* в противном случае она называется *сингулярной*.

1.1 Конечные особые точки рациональной матрицы.

Определение особых точек типа нуль и типа полюс для однопараметрической ($q=1$) рациональной матрицы $R(\lambda)$ дается обычно, используя каноническую форму Смита–МакМилана (см., например, [3]), аналога которой для q-параметрической рациональной матрицы при $q>1$, по-видимому, не существует.

Ниже приводится определение особых точек рациональной матрицы, независящее от числа ее параметров.

Приведем вначале некоторые известные сведения [3] относительно скалярных полиномов и дробно-рациональных функцией, зависящих от q-параметров.

Лемма 1.1. *Если полином Ψ является наименьшим общим кратным (НОК) полиномов $v_1,\dots,v_t$, то выполняются равенства*

$$\Psi=v_kp_k,\quad k=1,\dots,t,$$

причем полиномы $p_1,\dots,p_t$ являются взаимно простыми.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы полином Ψ являлся НОК знаменателей $v_1,\dots,v_t$ несократимых дробей $\frac{u_1}{v_1},\dots,\frac{u_t}{v_t}$:*

$$\Psi=v_kp_k,\quad \varepsilon_k:=u_kp_k,\quad \frac{u_k}{v_k}=\frac{\varepsilon_k}{\Psi},\quad k=1,\dots,t,$$

необходимо и достаточно, чтобы полиномы Ψ, $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_t$ были взаимно простыми. Другими словами, необходимо и достаточно, чтобы система нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases}\varepsilon_k=0, & k=1,\dots,t,\\ \Psi=0\end{cases}$$

*) При записи q-параметрических матриц, векторов, скалярных дробей и полиномов для сокращения будем иногда опускать параметры.

не имела конечных $(q-1)$-мерных решений. [*)]

Рассмотрим следующую совокупность миноров q параметрической рациональной $m \times n$ матрицы R ранга ρ:

$$R\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{pmatrix} \equiv \frac{\eta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}}{\theta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}}, \tag{1.1}$$

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m, \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n, \quad k = 1, \ldots, \rho.$$

Здесь $R\binom{i_1 \dots i_k}{j_1 \dots j_k}$ – минор порядка k, образованный из элементов матрицы R, расположенных на пересечении строк и столбцов с номерами соответствено $i_1, \ldots, i_k$ и $j_1, \ldots, j_k$, который представлен в виде несократимой дробно-рациональной функции ($\eta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}$ и $\theta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}$ суть попарно взаимно простые полиномы.) Через $\bar{i}$ и $\bar{j}$ обозначены соответствующие мультииндексы: $\bar{i} = (i_1, \ldots, i_k)$, $\bar{j} = (i_1, \ldots, j_k)$.

Пусть Ψ-НОК знаменателей дробей из (1.1), так что

$$\Psi = \theta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}} \omega^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}},$$

где $\omega^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}$ являются взаимно простыми для всевозможных мультииндексов $\bar{i} = (i_1, \ldots, i_k)$, $\bar{j} = (j_1, \ldots, j_k)$, $k = 1, \ldots, \rho$. Запишем (1.1) в эквивалентном виде

$$R\begin{pmatrix} i_1 \dots i_k \\ j_1 \dots j_k \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}}{\Psi}, \quad \varepsilon^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}} := \eta^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}} \omega^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}}, \tag{1.2}$$

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m, \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n, \quad k = 1, \ldots, \rho.$$

Тогда в силу Теоремы 1.1 система нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon^{(k)}_{\bar{i}\bar{j}} = 0, \ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m, \ 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n \\ \Psi = 0, \ k = 1, \ldots, \rho, \end{cases} \tag{1.3}$$

не имеет конечных $(q-1)$-мерных решений.

[*)] Определение $(q-k)$-мерных решений систем нелинейных алгебраических уравнений от q переменных см., например, в [5].

Геометрическое место точек из $\mathbb{C}^q$, координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$\Psi = 0, \tag{1.4}$$

будем называть конечными полюсами рациональной матрицы R.

Геометрическое место точек из $\mathbb{C}^q$, координаты которых удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\varepsilon_{\overline{ij}}^{(\rho)} = 0, \quad 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\rho \leqslant m, \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_\rho \leqslant n \tag{1.5}$$

будем называть конечными нулями рациональной матрицы R.

Степень $\delta_p(R,\alpha)$ полюса или $\delta_z(R,\alpha)$ нуля матрицы R определяются как алгебраическая кратность точки $\alpha \in \mathbb{C}^q$ как корня уравнения (1.4) *или системы* (1.5), *соответственно.*

Геометричсекое место точек, координаты которых удовлетворяют системе (1.3), *будем называть конечными точками неопределенности рациональной матрицы R.*

Объединение конечных нулей, полюсов и точек неопределенности рациональной матрицы будем называть ее конечными особыми точками.

Замечания. 1. Конечные полюсы q-параметрической рациональной матрицы являются точками $(q-1)$-мерных решений уравнения (1.4).

2. Конечные нули q-параметрической рациональной матрицы являются точками $(q-k)$-мерных решений системы (1.5). Здесь $1 \leqslant k \leqslant \min\{N, q\}$, где $N := C_m^\rho C_n^\rho$ – число уравнений системы.

3. Конечные точки неопределенности q-параметрической рациональной матрицы, являющиеся точками $(q-k)$-мерных решений системы (1.3) при $k > 1$, представляют собой одновременно и полюса, и нули матрицы (координаты точек удовлетворяющие системе (1.3), будут удовлетворять, очевидно и уравнению (1.4), и системе (1.5)).

4. Приведенные выше определения конечных полюсов и нулей q-параметрической рациональной матрицы согласуются с соответствующими классическими определениями для однопараметрической рациональной матрицы, использующими ее каноническую форму Смита–МакМилана (см. доказательство в работе авторов [3]).

1.2. Нуль-пространства из полиномиальных решений рациональной матрицы.

При $n > \rho$ сингулярная рациональная матрица R имеет нетривиальное правое нуль-пространство из q-параметрических полиномиальных векторов.

Полиномиальный вектор

$$x(\lambda, \bar{\mu}) = \lambda^t x_t(\bar{\mu}) + \ldots + \lambda x_1(\bar{\mu}) + x_0(\bar{\mu})$$

называется правым полиномиальным решением рациональной матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$, если равенство

$$R(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) = 0$$

выполняется при любых значениях параметров $\lambda, \bar{\mu}$.

Пусть $X(\lambda, \bar{\mu}) := [x_1(\lambda, \bar{\mu}) \ldots x_{n-\rho}(\lambda, \bar{\mu})]$ – полиномиальная $n \times (n - \rho)$ матрица полного столбцового ранга, удовлетворяющая уравнению

$$R(\lambda, \bar{\mu}) X(\lambda, \bar{\mu}) = \mathbb{O}$$

при любых значениях параметров $\lambda, \bar{\mu}$. Столбцы матрицы $X(\lambda, \bar{\mu})$ образуют базис правого нуль-пространства q-параметрической рациональной матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$, если матрица $X(\lambda, \mu)$ не имеет конечного регулярного спектра (т.е. не имеет конечных $(q-1)$-мерных собственных значений), за исключением, быть может, собственных значений, определяемых уравнениями вида $\varphi(\bar{\mu}) = 0$ (см., например, [4]).

Если матрица $X(\lambda, \bar{\mu})$ не имеет конечного регулярного спектра, то соответствующий базис будем называть *свободным*.

Если старшие по параметру λ векторные коэффициенты базисных векторов являются линейно независимыми над*) $\mathbb{C}(\bar{\mu})$, то базис будем называть *минимальным по параметру* λ.

В случае линейной независимости над $\mathbb{C}(\mu_1, ..., \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, ..., \mu_q)$ старших по параметру μ_i векторных коэффициентов базисных векторов для всех $i = 1, \ldots, q$ базис будем называть *минимальным по всем параметрам* $(\lambda, \bar{\mu}) := (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q)$.

При $m > \rho$ аналогичным образом определяются базисы левого нуль-пространства рациональной матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$.

*) Через $\mathbb{C}(\bar{\mu})$ обозначено поле дробно-рациональных функций от $\bar{\mu}$ с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$.

Замечание. Вопрос о существовании базиса, являющегося одновременно свободным и минимальным по одному или всем параметрам остается открытым.

1.3. Неприводимая реализация рациональной матрицы.

По аналогии с однопараметрическим случаем [7, 8] будем называть *неприводимой реализацией* q-параметрической рациональной $m \times n$ матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$ представление вида

$$R(\lambda, \bar{\mu}) = S(\lambda, \bar{\mu}) T^{-1}(\lambda, \bar{\mu}) V(\lambda, \bar{\mu}) + W(\lambda, \bar{\mu}) \tag{1.6}$$

при выполнении условий:

а) $S(\lambda, \bar{\mu})$, $T(\lambda, \bar{\mu})$, $V(\lambda, \bar{\mu})$ – q-параметрические полиномиальные матрицы размеров $m \times p$, $p \times p$, $p \times n$, соответственно;

б) $T(\lambda, \bar{\mu})$ – регулярная матрица;

в)

$$M(\lambda, \bar{\mu}) := [T(\lambda, \bar{\mu}) \ \ -S(\lambda, \bar{\mu})]^B, \quad N(\lambda, \bar{\mu}) := [T(\lambda, \bar{\mu}) \ V(\lambda, \bar{\mu})] \tag{1.7}$$

– q-параметрические полиномиальные матрицы размеров $(p+m) \times p$, $p \times (p+n)$, соответственно, не имеющие конечного регулярного спектра.

Теорема 1.2. *Полиномиальные матрицы, входящие в неприводимую реализацию (1.6) рациональной матрицы, однозначно определяют ее конечные особые точки:*

• *конечные полюсы матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$ совпадают с конечными собственными значениями матрицы $T(\lambda, \bar{\mu})$;*

• *конечные нули матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$ совпадают с конечными собственными значениями полиномиальной матрицы*)*

$$P(\lambda, \bar{\mu}) := \begin{bmatrix} T(\lambda, \bar{\mu}) & V(\lambda, \bar{\mu}) \\ -S(\lambda, \bar{\mu}) & W(\lambda, \bar{\mu}) \end{bmatrix}; \tag{1.8}$$

•*конечные точки неопределенности матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$ совпадают с объединением конечных спектров матриц $M(\lambda, \bar{\mu})$, $N(\lambda, \bar{\mu})$, вида* (1.7)

Доказательство теоремы практически не отличается от доказательства аналогичной теоремы в работе [3] и основано на использовании доказанного в ней следующего утверждения.

*)В теории систем (при $q = 1$) матрицу вида (1.8) называют системной матрицей [7, 8].

Лемма 1.2. *Для того, чтобы в точках решения уравнения*

$$\det T = 0 \tag{1.9}$$

все $(p+1)\times(p+1)$ *миноры матрицы* P *из* (1.8) *вида*

$$\det \begin{bmatrix} T & v_j \\ -s_i & w_{ij} \end{bmatrix}, \quad i = 1, \ldots, m; \ j = 1, \ldots, n, \tag{1.10}$$

получаемые окаймлением ее $p\times p$ *блока* T, *обращались в нуль, необходимо и достаточно, чтобы в этих точках выполнялось хотя бы одно из условий:* $\operatorname{rank} M < p$, *или* $\operatorname{rank} N < p$.

Для доказательства Теоремы 1.2 приведем известный факт (см., например, [8]) о связи любого $k \times k$ минора матрицы R, представленной в виде (1.6) с $(p+k)\times(p+k)$ минором матрицы P вида (1.8):

$$R\binom{i_1 \ldots i_k}{j_1 \ldots j_k} = \frac{1}{\det T} P\binom{1 \ldots q \, q+i_1 \ldots q+i_k}{1 \ldots q \, q+j_1 \ldots q+j_k}, \tag{1.11}$$

$$1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m, \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant n, \quad k = 1, \ldots, \rho.$$

Выполнение аналогичных соотношений при $k \geqslant \rho$ означает, что $\operatorname{rank} P = p + \rho$.

Из (1.11) следует также, что $\det T$ является общим кратным знаменателей всех миноров всех порядков матрицы R. Для доказательства того, что он является наименьшим общим кратным, достаточно показать, что система нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \det T = 0, \\ P\binom{1\ldots q\, q+i_1 \ldots q+i_k}{1\ldots q\, q+j_1 \ldots q+j_k} = 0, \\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant m, \ 1 \leqslant j_1 < \ldots, < j_k \leqslant n, \ k = 1, \ldots, \rho, \end{cases} \tag{1.12}$$

не имеет конечных $(q-1)$-мерных решений. В силу Леммы 1.2 для этого необходимо и достаточно, чтобы матрицы M и N не имели конечных $(q-1)$-мерных собственных значений. Последнее имеет место по условию теоремы. Таким образом, конечные $(q-1)$-мерные решения уравнения

$$\det T = 0,$$

т.е. конечные $(q-1)$-мерные собственные значения матрицы T однозначно определяют конечные полюса матрицы R.

Из соотношений (1.11) при $k = \rho$ и определения конечных нулей матрицы R следует, что последние полностью определяются решениями системы

$$\begin{cases} P\binom{1\ldots q\; q+i_1\ldots q+i_\rho}{1\ldots q\; q+j_1\ldots q+j_\rho} = 0, \\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_\rho \leqslant m,\ 1 \leqslant j_1 < \ldots, < j_\rho \leqslant n, \end{cases}$$

т.е. конечными $(q-k)$-мерными собственными значениями матрицы P.

Наконец, из системы (1.3) с учетом (1.2) и соотношений (1.11) получаем, что конечные точки неопределенности матрицы R являются решениями системы (1.12). Из Леммы 1.2 следует, что эти решения представляют собой объединение конечных $(q-k)$-мерных собственных значений матриц M и N (причем $k > 1$).

§2. Классификация факторизаций q-параметрических рациональных матриц и их свойства

Ниже приводятся некоторые виды факторизаций q-параметрических рациональных матриц, построение которых позволит получать информацию об особых точках матриц.

2.1. Базовые факторизации.

Факторизации q-параметрической рациональной матрицы $R(\lambda, \bar\mu)$ вида

$$R(\lambda, \bar\mu) = K^{-1}(\lambda, \bar\mu) D(\lambda, \bar\mu), \tag{2.1}$$

$$R(\lambda, \bar\mu) = D(\lambda, \bar\mu) K^{-1}(\lambda, \bar\mu), \tag{2.2}$$

где $K(\lambda, \bar\mu)$, $D(\lambda, \bar\mu)$ – q-параметрические полиномиальные матрицы соответствующих размеров, $K(\lambda, \bar\mu)$ – регулярная матрица, будем называть соответственно правой и левой базовыми факторизациями.

Базовые факторизации являются вспомогательными и служат основой для построения факторизаций других видов.

Построить базовые факторизации можно, например, выбирая регулярную матрицу $K(\lambda, \bar\mu)$ для правой факторизации (2.1) в виде

$$K(\lambda, \bar\mu) = k(\lambda, \bar\mu) I_m, \quad \text{или} \quad K(\lambda, \bar\mu) = \operatorname{diag}\{k_1(\lambda, \bar\mu), \ldots, k_m(\lambda, \bar\mu)\},$$

а для левой факторизации (2.2) в виде

$$K(\lambda, \bar\mu) = k(\lambda, \bar\mu) I_n, \quad \text{или} \quad K(\lambda, \bar\mu) = \operatorname{diag}\{\tilde k_1(\lambda, \bar\mu), \ldots, \tilde k_n(\lambda, \bar\mu)\}.$$

Здесь $k(\lambda,\bar{\mu})$, $k_i(\lambda,\bar{\mu})$ и $\tilde{k}_j(\lambda,\bar{\mu})$ – скалярные полиномы, являющиеся НОК знаменателей всех элементов, элементов строки i $(i = 1,\dots,m)$ и элементов столбца j $(j = 1,\dots,n)$ матрицы $R(\lambda,\bar{\mu})$, соответственно.

2.2. Несократимые факторизации.

Базовые факторизации (2.1), (2.2) рациональной матрицы являются частными видами представления (1.6). При этом соответствующие матрицы вида (1.7) могут иметь конечные регулярные спектры.

Рассмотрим теперь факторизации, являющиеся частными видами неприводимой реализации (1.6) рациональной матрицы.

Факторизации q-параметрической матрицы $R(\lambda,\bar{\mu})$ вида

$$R(\lambda,\bar{\mu}) = S(\lambda,\bar{\mu})T^{-1}(\lambda,\bar{\mu}), \tag{2.3}$$

$$R(\lambda,\bar{\mu}) = T^{-1}(\lambda,\bar{\mu})V(\lambda,\bar{\mu}), \tag{2.4}$$

$$R(\lambda,\bar{\mu}) = S(\lambda,\bar{\mu})T^{-1}(\lambda,\bar{\mu})V(\lambda,\bar{\mu}), \tag{2.5}$$

удовлетворяющие условиям

а) S, T, V – *q-параметрические полиномиальные матрицы размеров $m\times p$, $p\times p$, $p\times n$, соответствено;*

б) T – *регулярная матрица;*

в) $M = [T-S]^B$, $N = [TV]$ – *q–параметрические полиномиальные матрицы размеров $(p+m)\times p$ и $p\times(p+n)$, соответственно, не имеющие конечного регулярного спектра, будем называть соответственно левой, правой и двусторонней несократимыми факторизациями.**)

Замечания 1. Для левой несократимой факторизации (2.3) имеем $p = n$, для правой несократимой факторизации (2.4) $p = m$.

2. Несократимые факторизации (2.3), (2.4) являются частными видами несократимой факторизации (2.5).

3. Все несократимые факторизации (2.3), (2.4), (2.5) являются частными видами неприводимой реализации (1.6) рациональной матрицы с $W(\lambda,\bar{\mu}) = 0$.

С учетом последнего замечания из Теоремы 1.2 получаем следующее утверждение.

*)В теории систем (см., например [6]) левую и правую факторизации рациональных матриц при $q = 1$ называют соответственно правой и левой MFD-matrix fraction description (согласно местоположению обратной матрицы).

Следствие 2.1. *Конечные полюса рациональной матрицы $R(\lambda,\bar\mu)$ совпадают с конечными собственными значениями матрицы $T(\lambda,\bar\mu)$ из каждой несократимой факторизации (2.3), (2.4), (2.5).*

Конечные нули рациональной матрицы $R(\lambda,\bar\mu)$ совпадают

- *с конечными собственными значениями матрицы $S(\lambda,\bar\mu)$ – в случае левой несократимой факторизации (2.3);*
- *с конечными собственными значениями матрицы $V(\lambda,\bar\mu)$ – в случае правой несократимой факторизации (2.4);*
- *с объединением конечных собственных значений матриц $S(\lambda,\bar\mu)$ и $V(\lambda,\bar\mu)$ – в случае двусторонней несократимой факторизации (2.5) при $p\leqslant\min\{m,n\}$.*

Конечные точки неопределенности рациональной матрицы $R(\lambda,\bar\mu)$ совпадают

- *с конечными собственными значениями матрицы $M(\lambda,\bar\mu)$ – в случае левой несократимой факторизации (2.3);*
- *с конечными собственными значениями матрицы $N(\lambda,\bar\mu)$ – в случае правой несократимой факторизации (2.4);*
- *с объединением конечных собственных значений матриц $M(\lambda,\bar\mu)$ и $N(\lambda,\bar\mu)$ – в случае двусторонней несократимой факторизации (2.5).*

Действительно, справедливость утверждений о конечных полюсах и точках неопределенности матрицы $R(\lambda,\bar\mu)$ вытекает непосредственно из Теоремы 1.2. Далее, матрица $P(\lambda,\bar\mu)$ вида (1.8), отвечающая представлению (1.6) рациональной матрицы $R(\lambda,\bar\mu)$, для несократимфх факторизаций (2.3), (2.4), (2.5) принимает, соответственно, вид

$$P(\lambda,\bar\mu)=\begin{bmatrix}T(\lambda,\bar\mu) & I_n\\ -S(\lambda,\bar\mu) & \mathbb{O}_{mn}\end{bmatrix},\quad P(\lambda,\bar\mu)=\begin{bmatrix}T(\lambda,\bar\mu) & V(\lambda,\bar\mu)\\ -I_m & \mathbb{O}_{mn}\end{bmatrix},$$

$$P(\lambda,\bar\mu)=\begin{bmatrix}T(\lambda,\bar\mu) & V(\lambda,\bar\mu)\\ -S(\lambda,\bar\mu) & \mathbb{O}_{mn}\end{bmatrix},$$

эквивалентный форме Шура (при $p\leqslant\min\{m,n\}$ в последнем случае).

Таким образом конечный спектр матрицы $P(\lambda,\bar\mu)$, определяющий по Теореме 1.2 конечные нули матрицы $R(\lambda,\bar\mu)$, совпадает

- с конечным спектром матрицы $S(\lambda,\bar\mu)$ – в первом случае,
- с конечным спектром матрицы $V(\lambda,\bar\mu)$ – во втором случае,
- с объединением конечных спектров матриц $S(\lambda,\bar\mu)$ и $V(\lambda,\bar\mu)$ – в третьем случае.

Теорема 2.1. *Левое и правое нуль-пространства рациональной матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$ совпадают соответственно с левым нуль-пространством матрицы $S(\lambda, \bar{\mu})$ из левой несократимой факторизации* (2.3) *и правым нуль-пространством матрицы $V(\lambda, \bar{\mu})$ из правой несократимойфакторизации* (2.4).

Достаточно, очевидно, доказать только одно из утверждений. Пусть $x(\lambda, \bar{\mu})$ – правое полиномиальное решение матрицы $V(\lambda, \bar{\mu})$: при любых $\lambda, \bar{\mu}$

$$V(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) = 0.$$

Тогда из (2.4) имеем при любых $\lambda, \bar{\mu}$

$$R(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) = T^{-1} V(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) = 0.$$

Обратно, пусть $x(\lambda, \bar{\mu})$ – правое полиномиальное решение матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$: при любых $\lambda, \bar{\mu}$

$$R(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) = 0.$$

Тогда с учетом представления (2.4) и регулярности матрицы $T(\lambda, \bar{\mu})$ имеем при любых $(\lambda, \bar{\mu})$

$$V(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) = T(\lambda, \bar{\mu}) R(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) = 0.$$

2.3. Минимальные несократимые факторизации.

Несократимые факторизации одной и той же рациональной матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$ каждого из видов (2.3), (2.4), (2.5) могут различаться размерами матриц-сомножителей, а также степенями по различным скалярным параметрам $\lambda = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$.

Несократимую факторизацию q-параметрической рациональной $m \times n$ матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$ ранга ρ будем называть *минимальной по размерам*, если порядок матрицы $T(\lambda, \bar{\mu})$ равен ρ.

Очевидно, что в этом случае матрицы $S(\lambda, \bar{\mu})$ и $V(\lambda, \bar{\mu})$ также должны иметь ранги, равные ρ, т.е. являться матрицами полного строчного и столбцового ранга, соответственно.

Несократимую факторизацию q-параметрической рациональной $m \times n$ матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$ будем называть *минимальной относительно параметра* λ, если степени матриц $M(\lambda, \bar{\mu}) = [T(\lambda, \bar{\mu})\ {-S(\lambda, \bar{\mu})}]^B$ и $N(\lambda, \bar{\mu}) = [T(\lambda, \bar{\mu})\ V(\lambda, \bar{\mu})]$ по параметру λ являются минимально возможными.

Аналогичные определения можно ввести для любого из q скалярных параметров $\lambda = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q$. Для краткости такие факторизации будем называть *относительно минимальными*.

Несократимую факторизацию q-параметрической рациональной $m \times n$ матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$ будем называть *минимальной по степени*, если она является минимальной относительно каждого из q скалярных параметров $\lambda = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$.

Несократимую факторизацию будем называть *минимальной*, если она является одновременно минимальной по размерам и по степени.

Теорема 2.2. *Левое и правое нуль-пространства рациональной матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$ совпадают соответственно с левым нуль-пространством матрицы $S(\lambda, \bar{\mu})$ и правым нуль-пространством матрицы $V(\lambda, \bar{\mu})$ из двусторонней минимальной по размерам несократимой факторизации* (2.5).

Достаточно, очевидно, рассмотреть только одно из утверждений. Пусть $x(\lambda, \bar{\mu})$ – первое полиномиальное решение матрицы $V(\lambda, \bar{\mu})$: при любых $\lambda, \bar{\mu}$

$$V(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) = 0.$$

Тогда из (2.5) имеем при любых $\lambda, \bar{\mu}$

$$R(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) = S(\lambda, \bar{\mu}) T^{-1}(\lambda, \bar{\mu}) V(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) = 0,$$

следовательно, $x(\lambda, \bar{\mu})$ является правым полиномиальным решением матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$.

Обратно, пусть $x(\lambda, \bar{\mu})$ – правое полиномиальное решение матрицы $R(\lambda, \bar{\mu})$: при любых $\lambda, \bar{\mu}$

$$R(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) = 0.$$

С учетом представления (2.5) имеем при любых $\lambda, \bar{\mu}$

$$S(\lambda, \bar{\mu}) T^{-1} V(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) = 0. \tag{2.6}$$

Предположим, что $x(\lambda, \bar{\mu})$ не является правым полиномиальным решением матрицы $V(\lambda, \bar{\mu})$, т.е.

$$y(\lambda, \bar{\mu}) := V(\lambda, \bar{\mu}) x(\lambda, \bar{\mu}) \not\equiv 0.$$

В силу регулярности матрицы $T(\lambda, \bar{\mu})$, а следовательно и матрицы $T^{-1}(\lambda, \mu)$, получаем рациональный вектор

$$z(\lambda, \bar{\mu}) := T^{-1}(\lambda, \bar{\mu}) y(\lambda, \bar{\mu}) \not\equiv 0.$$

В таком случае, соответствующий ему полиномиальный вектор $\tilde{z}(\lambda,\mu) := \psi(\lambda,\bar{\mu})z(\lambda,\bar{\mu}) \not\equiv 0$, где $\psi(\lambda,\bar{\mu})$ – НОК знаменателей компонент вектора $z(\lambda,\bar{\mu})$, в соответствии с (2.6) при любых $\lambda,\bar{\mu}$ удовлетворяет равенству

$$S(\lambda,\bar{\mu})\tilde{z}(\lambda,\bar{\mu}) = 0,$$

что противоречит предположению о том, что матрица $S(\lambda,\bar{\mu})$ имеет полный строчный ранг. Следовательно, $x(\lambda,\bar{\mu})$ является правым полиномиальным решением матрицы $V(\lambda,\bar{\mu})$.

§3. Существование и алгоритмы построения несократимых факторизаций

Приведем доказательства существования несократимых факторизаций (2.3), (2.4), (2.5) рациональных матриц и алгоритмы их построения.

Теорема 3.1. *Любая q-параметрическая рациональная матрица $R(\lambda,\bar{\mu})$ может быть представлена в виде*
- *левой несократимой факторизации* (2.3),
- *правой несократимой факторизации* (2.4),
- *двусторонней несократимой факторизации* (2.5).

Доказательство проведем конструктивно, описывая алгоритмы построения указанных факторизаций.

3.1. Алгоритм построения левой несократимой факторизации.

(1) Строится правая базовая факторизация $m \times n$ матрицы $R(\lambda,\bar{\mu})$

$$R(\lambda,\bar{\mu}) = K^{-1}(\lambda,\bar{\mu})D(\lambda,\bar{\mu}) \tag{3.1}$$

(например, как это описано в п. 2.1).

(2) Формируется вспомогательная q-параметрическая полиномиальная матрица

$$C(\lambda,\bar{\mu}) := [K(\lambda,\bar{\mu})\ D(\lambda,\bar{\mu})] \tag{3.2}$$

размеров $m \times (m+n)$.

(3) Применяется алгоритм ΔW-q факторизации [1] к матрице $C(\lambda,\bar{\mu})$

$$C(\lambda,\bar{\mu})W(\lambda,\bar{\mu}) = [\Delta(\lambda,\mu)\ \mathbb{O}], \tag{3.3}$$

где $W(\lambda, \bar{\mu})$ – q-параметрическая полиномиальная регулярная порядка $(m+n)$ матрица унимодулярная по λ (μ-модулярная)*); $\Delta(\lambda, \bar{\mu})$ – регулярная q-параметрическая полиномиальная матрица порядка m, $\mathbb{O}$ – нулевая $m \times n$ матрица.

(4) Формируется из последних n столбцов матрицы $W(\lambda, \bar{\mu})$ q-параметрическая полиномиальная $(m+n) \times n$ матрица $W_0(\lambda, \bar{\mu})$ полного столбцового ранга.

(5) К матрице $W_0(\lambda, \bar{\mu})$ применяется алгоритм исчерпывания конечного регулярного спектра (см. [1, 2]). Результирующая матрица (обозначаемая также $W_0(\lambda, \bar{\mu})$) представляется в блочном виде

$$W_0(\lambda, \bar{\mu}) \equiv [W_1(\lambda, \bar{\mu}) \; W_2(\lambda, \bar{\mu})]^B$$

с блоками $W_1(\lambda, \bar{\mu})$ и $W_2(\lambda, \bar{\mu})$ размеров $m \times n$ и $n \times n$, соответственно.

(6) Определяются искомые матрицы

$$S(\lambda, \bar{\mu}) := W_1(\lambda, \mu), \quad T(\lambda, \bar{\mu}) := -W_2(\lambda, \bar{\mu}).$$

Покажем, что таким образом построена левая несократимая факторизация (2.3) со свойствами (а)–(в).

Выполнение свойства (а) очевидно: матрица $S(\lambda, \bar{\mu})$ имеет размеры $m \times n$, а матрица $T(\lambda, \bar{\mu})$ – размеры $n \times n$.

От противного докажем регулярность матрицы $T(\lambda, \bar{\mu})$. Предположим, что квадратная матрица $T(\lambda, \bar{\mu}) = -W_2(\lambda, \bar{\mu})$ не является регулярной. Тогда существует правое полиномиальное решение $y(\lambda, \bar{\mu}) \not\equiv 0$, удовлетворяющее при любых $\lambda, \bar{\mu}$ уравнению

$$W_2(\lambda, \bar{\mu}) y(\lambda, \bar{\mu}) = 0.$$

Далее, так как матрицы $W_0(\lambda, \mu)$ имеет полный столбцовый ранг, то имеет место соотношение

$$W_0(\lambda, \bar{\mu}) y(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} W_1(\lambda, \bar{\mu}) \\ W_2(\lambda, \bar{\mu}) \end{bmatrix} y(\lambda, \mu) \equiv \begin{bmatrix} z(\lambda, \bar{\mu}) \\ 0 \end{bmatrix} \not\equiv 0. \tag{3.4}$$

Таким образом, полиномиальный вектор

$$z(\lambda, \bar{\mu}) := W_1(\lambda, \mu) y(\lambda, \mu) \not\equiv 0.$$

*) Определитель матрицы $W(\lambda, \bar{\mu})$ не зависит от параметра λ и является, в общем случае, полиномом от $\bar{\mu}$.

Из (3.3) следует, что столбцы матрицы $W_0(\lambda,\bar\mu)$ образуют базис правого нуль-пространства матрицы $C(\lambda,\bar\mu)$. Тогда с учетом вида (3.2) матрицы $C(\lambda,\bar\mu)$ имеем

$$C(\lambda,\bar\mu)W_0(\lambda,\bar\mu) = K(\lambda,\bar\mu)W_1(\lambda,\bar\mu) + D(\lambda,\bar\mu)W_2(\lambda,\bar\mu) = \mathbb{O}, \qquad (3.5)$$

что в комбинации с (3.4) дает

$$C(\lambda,\bar\mu)W_0(\lambda,\bar\mu)y(\lambda,\bar\mu) = \begin{bmatrix} K(\lambda,\bar\mu)z(\lambda,\mu) \\ 0 \end{bmatrix} \equiv 0.$$

Но равенство

$$K(\lambda,\bar\mu)z(\lambda,\bar\mu) \equiv 0, \quad z(\lambda,\bar\mu) \not\equiv 0$$

противоречит предположению о регулярности матрицы $K(\lambda,\bar\mu)$. Полученное противоречие доказывает выполнение свойства (б).

Выполнение свойства (в) следует из того, что матрица $M(\lambda,\bar\mu)$ вида (1.7) отличается от матрицы $W_0(\lambda,\bar\mu)$ только перестановкой блоков, а матрица $W_0(\lambda,\bar\mu)$ после выполнения шага (5) алгоритма не имеет конечного регулярного спектра.

С учетом регулярности матриц $K(\lambda,\bar\mu)$ и $W_2(\lambda,\bar\mu)$ из (3.1) и (3.5) имеем

$$R(\lambda,\bar\mu) = K^{-1}(\lambda,\bar\mu)D(\lambda,\bar\mu) = -W_1(\lambda,\bar\mu)W_2^{-1}(\lambda,\bar\mu) \equiv S(\lambda,\bar\mu)T^{-1}(\lambda,\bar\mu).$$

Таким образом, обоснование алгоритма построения левой несократимой факторизации завершено.

3.2. Алгоритм построения правой несократимой факторизации.

(1) Выполняется транспонирование исходной рациональной $m \times n$ матрицы

$$R_1(\lambda,\bar\mu) := R^\top(\lambda,\bar\mu).$$

(2) Применяется алгоритм построения левой несократимой факторизации к матрице $R_1(\lambda,\bar\mu)$

$$R_1(\lambda,\bar\mu) := S_1(\lambda,\bar\mu)T_1^{-1}(\lambda,\bar\mu),$$

где $S_1(\lambda,\bar\mu)$, $T_1(\lambda,\bar\mu)$ – q-параметрические полиномиальные матрицы размеров $n \times m$ и $m \times m$, соответственно.

(3) Определяются искомые матрицы

$$V(\lambda,\bar\mu) := S_1^\top(\lambda,\bar\mu), \quad T(\lambda,\bar\mu) := T_1^\top(\lambda,\bar\mu).$$

Выполнение свойств (а)–(в) построенной факторизации вида (2.4) матрицы $R(\lambda,\bar{\mu})$ очевидно.

Замечания. 1. Если исходная рациональная матрица имеет полный столбцовый (строчный) ранг, то применение соответствующего из описанных выше алгоритмов дает минимальную по размерам несократимую факторизацию.

2. Если на шаге (5) алгоритма построения левой несократимой факторизации находить свободный базис $W_0(\lambda,\bar{\mu})$ правого нуль-пространства матрицы $C(\lambda,\mu)$ вида (3.2), являющийся минимальным по параметру λ (минимальным по всем параметрам)*), то приведенные выше алгоритмы будут давать соответствующие минимальные относительно параметра λ (минимальные по степени) факторизации.

Справедливость первого замечания очевидна. Приведем обоснование второго замечания, например, для левой минимальной факторизации.

Для любой левой несократимой факторизации (2.3) рациональной матрицы $R(\lambda,\bar{\mu})$, представленной в виде правой базовой факторизации (3.1), имеем

$$K^{-1}(\lambda,\bar{\mu})D(\lambda,\bar{\mu}) = S(\lambda,\bar{\mu})T^{-1}(\lambda,\bar{\mu}), \tag{3.6}$$

или

$$D(\lambda,\bar{\mu})T(\lambda,\bar{\mu}) - K(\lambda,\bar{\mu})S(\lambda,\bar{\mu}) = \mathbb{O}. \tag{3.7}$$

Из выполнения свойств (а)–(в) столбцы матрицы $M(\lambda,\mu) = [T(\lambda,\bar{\mu})\ \ -S(\lambda,\bar{\mu})]$ образуют свободный базис правого нуль-пространства матрицы $C(\lambda,\bar{\mu})$ вида (3.2). При построении соответствующего относительно минимального базиса (по одному или всем параметрам) по некоторой исходной базовой факторизации (3.1) получаем матрицу $M(\lambda,\bar{\mu})$ минимальной степени. Остается отметить, что соотношения вида (3.6) и (3.7) будут выполняться для блоков полученной матрицы $M(\lambda,\bar{\mu})$ и при любых других базовых факторизациях вида (3.1) рациональной матрицы $R(\lambda,\bar{\mu})$. Из последнего вытекает инвариантность построенного правого нуль-пространства и, как следствие, минимальность построенной левой несократимой факторизации.

*) Вопрос о возможности построения указанных базисов в общем случае остается открытым (см. Замечание в конце п. 1.2).

3.3. Алгоритм построения двусторонней минимальной по размерам несократимой факторизации.

Справедливость последнего утверждения Теоремы 3.1 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Любая q-папраметрическая рациональная $m \times n$ матрица $R(\lambda, \bar{\mu})$ ранга ρ может быть представлена в виде двусторонней минимальной по размерам несократимой факторизации* (2.5).

Для матриц полного столбцового или строчного ранга двусторонняя минимальная по размерам несократимая факторизация тривиально конструируется из соответствующей левой или правой несократимой факторизации, алгоритмы построения которых приведены выше.

Доказательство теоремы для случая, когда $\rho < \min\{m, n\}$, проведем конструктивно, описывая построение указанной факторизации.

(1) Строится правая базовая факторизация $m \times n$ матрицы $R(\lambda, \mu)$

$$R(\lambda, \bar{\mu}) = K^{-1}(\lambda, \mu) D(\lambda, \bar{\mu}).$$

(2) Строится ∇V-q разложение [1, 2] матрицы $D(\lambda, \bar{\mu})$

$$D(\lambda, \bar{\mu}) = \nabla(\lambda, \bar{\mu}) V(\lambda, \bar{\mu}), \tag{3.8}$$

где $\nabla(\lambda, \bar{\mu})$ – q-параметрическа полиномиальная $m \times \rho$ матрица полного столбцового ранга, конечный регулярный спектр которой совпадает с конечным регулярным спектром матрицы $D(\lambda, \bar{\mu})$; $V(\lambda, \bar{\mu})$ – q-параметрическая полиномиальная $\rho \times n$ матрица полного строчного ранга, не имеющая конечного регулярного спектра.

(3) Формируется вспомогательная q-параметрическая рациональная $m \times \rho$ матрица

$$\tilde{R}(\lambda, \bar{\mu}) := K^{-1}(\lambda, \bar{\mu}) \nabla(\lambda, \bar{\mu}).$$

(4) Применяется алгоритм построения левой несократимой факторизации к матрице $\tilde{R}(\lambda, \bar{\mu})$

$$\tilde{R}(\lambda, \bar{\mu}) = S(\lambda, \bar{\mu}) T^{-1}(\lambda, \bar{\mu}), \tag{3.9}$$

где $S(\lambda, \bar{\mu})$, $T(\lambda, \bar{\mu})$ – q-параметрические полиномиальные матрицы размеров $m \times \rho$ и $\rho \times \rho$, соответственно.

Покажем, что полученная с учетом (3.8), (3.9) двусторонняя факторизация

$$R(\lambda,\bar{\mu}) = \tilde{R}(\lambda,\bar{\mu})V(\lambda,\bar{\mu}) = S(\lambda,\bar{\mu})T^{-1}(\lambda,\bar{\mu})V(\lambda,\bar{\mu})$$

является несократимой.

Выполнение свойств (а), (б) очевидно: матрицы $S(\lambda,\bar{\mu})$, $T(\lambda,\bar{\mu})$, $V(\lambda,\bar{\mu})$ имеют соответственно размеры $m\times\rho$, $\rho\times\rho$, $\rho\times n$, причем матрица $T(\lambda,\bar{\mu})$ является регулярной.

Выполнение свойства (в) следует из того, что матрица $M(\lambda,\bar{\mu})$ вида (1.7) не имеет конечного регулярного спектра в силу свойств построенной левой несократимой факторизации (3.9), а матрица $N(\lambda,\bar{\mu})$ вида (1.7) не имеет конечного регулярного спектра в силу отсутствия последнего у ее блока – матрицы $V(\lambda,\bar{\mu})$.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 191–246.
2. В. Н. Кублановская, В. Н. Симонова, В. Б. Хазанов, *О некоторых факторизациях q-параметрических полиномиальных матриц.* – Готовится к изданию.
3. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *О несократимых факторизациях рациональных матриц и их применении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **219** (1994), 117–157.
4. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 284–321.
5. И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии.* т. 1, М., Наука 1988.
6. T. Kailath, *Linear systems.* New Jersey, 1980.
7. R. E. Kalman, *Irreducible realizations and the degree of rational matrix.* — SIAM J. Appl. Math. **13 No. 2** (1965), 520–544.
8. H. Rosenbrock, *State-space and multivariable theory.* London, 1970.

Kublanovskaya V. N., Khazanov V. B. Irreducible factorizations of q-parameter rational matrices.

This paper considereds q-parameter rational matrices (i.e., matrices the entries of which are ratios of scalar polynomials in q variables) and extends the results of [1].

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 29 декабря 1997 г.