Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 248, 1998 г.

В. Б. Хазанов

О СОБСТВЕННЫХ ПОРОЖДАЮЩИХ ВЕКТОРАХ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ

В статье рассматриваются многопараметрические полиномиальные матрицы, имеющие конечный регулярный спектр.

В §1 приводятся известные спектральные характеристики и свойства таких матриц [1, 6].

В §2 вводится понятие собственного порождающего вектора многопараметрической полиномиальной матрицы, отвечающего ее собственному полиному, входящему в конечный регулярный спектр матрицы. Указанное понятие является обобщением собственного вектора однопараметрической полиномиальной матрицы, отвечающей ее одному или нескольким собственным значениям (см., например, [2, 5]). Устанавливаются некоторые свойства собственных полиномов, собственных порождающих векторов, полиномиальных решений и векторных характеристик, относящихся к сингулярному спектру матрицы.

В §3 описываются два метода построения собственных порождающих векторов, основанные на интерполировании по значениям аналогичных объектов, определенных для матриц, зависящих от меньшего числа параметров. В первом случае, методом неопределенных коэффициентов интерполируются значения "порождающих" векторов однопараметрических или постоянных матриц. Во втором случае, используется формула Лагранжа для интерполирования порождающих векторов для матриц, полученных фиксированием у исходной матрицы одного скалярного параметра, что приводит к рекурсии по числу параметров.

В обоих методах необходимо решать полную проблему собственных значений однопараметрических полиномиальных матриц: определять минимальные базисы нуль-пространств, находить все собственные значения и отвечающие им собственные векторы. О методах решения указанных задач смотри, например,

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00701).

в работе [2], а также в многочисленных ссылках, приведенных в ней.

По вопросу операций со скалярными полиномами смотри, например, [3, 4].

В §4 перечисляется ряд вопросов, оставшихся в настоящее время открытыми. Эти вопросы относятся к свойствам собственных порождающих векторов, к возможным перспективам использования их для решения многопараметрических спектральных задач, к эффективной реализации предлагаемых методов построения этих векторов для матриц общего вида.

§1. Введение

Пусть $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{C}^q$ – мультипараметр, определяемый q скалярными параметрами $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, q$, $q \geqslant 2$. В дальнейшем, объединяя некоторый $q-1$ скалярный параметр в мультипараметр $\boldsymbol{\mu} := (\mu_1, \dots, \mu_{q-1}) \in \mathbb{C}^{q-1}$ и обозначая оставшийся скалярный параметр через λ, будем иногда использовать представление $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda, \boldsymbol{\mu})$. Например, $\lambda := \lambda_1$, $\mu_i = \lambda_{i+1}$, $i = 1, \dots, q-1$, или $\lambda := \lambda_q$, $\mu_i = \lambda_i$, $i = 1, \dots, q-1$.

Пусть*) $F := F(\boldsymbol{\lambda})$ – q-параметрическая полиномиальная $m \times n$ матрица, элементы которой являются скалярными полиномами от $\boldsymbol{\lambda}$. Если ранг матрицы $\rho := \operatorname{rank} F < n$, то матрица F имеет правое нуль-пространство $N_c[F] := N_c(\boldsymbol{\lambda}) := N_c[F(\boldsymbol{\lambda})]$ размерности $n - \rho$ из правых полиномиальных решений $x(\boldsymbol{\lambda})$, которые удовлетворяют при любом $\boldsymbol{\lambda}$ соотношению

$$F(\boldsymbol{\lambda})x(\boldsymbol{\lambda}) \equiv 0. \tag{1}$$

Таким образом, $N_c[F(\boldsymbol{\lambda})] := \operatorname{span}\{x(\boldsymbol{\lambda}) \,\big|\, F(\boldsymbol{\lambda})x(\boldsymbol{\lambda}) \equiv 0\}$.

Конечный спектр матрицы F определяется как решение системы нелинейных алгебраических уравнений

$$F\begin{pmatrix} i_1 \dots i_\rho \\ j_1 \dots j_\rho \end{pmatrix} = 0, \qquad \begin{array}{l} 1 \leqslant i_1 < \dots < i_\rho \leqslant m, \\ 1 \leqslant j_1 < \dots < j_\rho \leqslant n, \end{array} \tag{2}$$

левые части которых представляют собой всевозможные миноры порядка ρ матрицы F.

*) При записи скалярных полиномов, полиномиальных векторов и матриц будем иногда опускать параметры.

Совокупность $(q-1)$-мерных решений системы (2) дает конечный регулярный спектр $\sigma_r[F]$ матрицы F, состоящий из $(q-1)$-мерных собственных значений, определяемых уравнениями вида

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = 0. \tag{3}$$

Полиномы $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, которые будем называть *собственными полиномами* матрицы F, являются делителями всех левых частей уравнений системы (2). Таким образом, конечный регулярный спектр однозначно характеризуется совокупностью неприводимых собственных полиномов $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ с учетом их кратностей.

Совокупность $(q-k)$-мерных решений системы (2) при $k>1$ определяет конечный сингулярный спектр $\sigma_s[F]$ матрицы F, состоящий из $(q-k)$-мерных собственных значений, характеризуемых системами нелинейных алгебраических уравнений вида*)

$$\varphi_i(\boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \tag{4}$$

Пусть $X := X(\boldsymbol{\lambda})$ и $Y := Y(\boldsymbol{\lambda})$ – соответственно $n \times (n-\rho)$ и $m \times (m-\rho)$ матрицы, столбцы которых образуют базисы правого $N_c[F]$ и левого $N_r[F]$ нуль-пространств матрицы F:

$$FX \equiv \mathbb{O}, \quad Y^H F \equiv \mathbb{O}.$$

Тогда $\sigma_s[F] = \sigma_s[X] \cup \sigma_s[Y]$. Поэтому сингулярный спектр матрицы F будем разделять соответственно на правый $\sigma_+[F] := \sigma_s[X]$ и левый $\sigma_-[F] := \sigma_s[Y]$. Очевидно, что матрица F полного столбцового ранга не имеет правого сингулярного спектра: $\sigma_+[F] = \varnothing$.

Базис подпространства из полиномиальных векторов будем называть *свободным*, если соответствующая полиномиальная матрица (например, X или Y) не имеет конечного регулярного спектра. Аналогично, полиномиальный вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ будем называть *свободным*, если $\sigma_r[x] = \varnothing$, т.е. если его компоненты не имеют общего делителя, отличного от константы.

Если полиномиальный вектор не является свободным, то для построения такового достаточно найти наибольший общий делитель (НОД) всех его компонент и разделить на него компоненты вектора.

Задача построения свободного базиса подпространства полиномиальных векторов размерности больше единицы в общем случае при $q>2$ пока однозначно не решена. Настоящая статья

*) Полагается, что система (4) не имеет $(q-l)$-мерных решений с $l<k$.

представляет собой, в частности, попытку приблизиться к решению указанной задачи.

Замечание. И полиномиальный вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ из (1), и скалярные полиномы $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, $\varphi_i(\boldsymbol{\lambda})$ из (3), (4) в действительности могут зависеть не от всех q скалярных параметров, а от меньшего числа параметров. В частности, вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ может быть постоянным, а полиномы $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, $\varphi_i(\boldsymbol{\lambda})$ – зависеть только от одного скалярного параметра.

§2. Собственные порождающие векторы

2.1. Определение собственных порождающих векторов.

Конечный спектр $\sigma[F]$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ состоит из объединения регулярного и сингулярного спектров матрицы:

$$\sigma[F] = \sigma_r[F] \cup \sigma_-[F] \cup \sigma_+[F].$$

Для любой точки $\boldsymbol{\lambda}_* := (\lambda_{1*}, \dots, \lambda_{q*}) \in \sigma[F]$ матрица $F_* := F(\boldsymbol{\lambda}_*)$ имеет ранг $\rho_* := \operatorname{rank} F_* < \rho$, так что ей соответствует, по крайней мере, один собственный вектор $x_* \notin N_c(\boldsymbol{\lambda}_*)$, который удовлетворяет соотношению

$$F(\boldsymbol{\lambda}_*)x_* = 0. \tag{5}$$

В частности, это будет иметь место для всех конечных нулей $\boldsymbol{\lambda}_*$ каждого из собственных полиномов $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$.

Для рассмотрения бесконечно удаленных точек спектра матрицы F (в частности, бесконечно удаленных нулей собственных полиномов) следует перейти от аффинного пространства $\mathbb{C}^q$ точек $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ к q-мерному проективному пространству $\mathbb{C}\Pi^q$ точек $\widetilde{\boldsymbol{\lambda}} = (\widetilde{\lambda}_0 : \widetilde{\lambda}_1 : \dots : \widetilde{\lambda}_q)$ однородных координат: $\lambda_i = \frac{\widetilde{\lambda}_i}{\widetilde{\lambda}_0}$. Точки с бесконечными координатами (по отношению к исходному пространству $\mathbb{C}^q$) имеют вид $(0 : \widetilde{\lambda}_1 : \dots : \widetilde{\lambda}_q)$.

Дадим определение, обобщающее понятие собственного вектора однопараметрической матрицы, отвечающего ее собственному значению.

Определение. *Свободный полиномиальный вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ будем называть правым собственным порождающим вектором полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, отвечающим ее собственному полиному $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, если имеет место соотношение*

$$F(\boldsymbol{\lambda})x(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi(\boldsymbol{\lambda})z(\boldsymbol{\lambda}), \tag{6}$$

где полиномиальный вектор $z(\boldsymbol{\lambda}) \not\equiv 0$, и вычисленное в любом нуле $\boldsymbol{\lambda}_* \notin \sigma_-[x]$ полинома $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ значение $x(\boldsymbol{\lambda}_*)$ является правым собственным вектором матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, отвечающим этой точке $\boldsymbol{\lambda}_* \in \sigma_r[F]$.

Из определения следует, что $F(\boldsymbol{\lambda})x(\boldsymbol{\lambda}) \not\equiv 0$, $\varphi(\boldsymbol{\lambda}_*) = 0$ и

$$F(\boldsymbol{\lambda}_*)x(\boldsymbol{\lambda}_*) = 0,$$

причем $x(\boldsymbol{\lambda}_*) \neq 0$ при $\boldsymbol{\lambda}_* \notin \sigma_-[x]$. Таким образом, для почти всех нулей $\boldsymbol{\lambda}_*$ собственного полинома $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ "порождает" соответствующие им правые собственные векторы $x(\boldsymbol{\lambda}_*)$. Тогда, сравнивая с соотношением (5), имеем

$$x(\boldsymbol{\lambda}_*) = \alpha_* x_*,$$

где α_* – некоторый нормирующий множитель.

Замечание. Понятие правого собственного порождающего вектора матрицы, отвечающего ее собственному полиному отличается от введенного в [6] понятия правого порождающего вектора матрицы, отвечающего фиксированной кратной точке ее спектра. Последний "порождает" соответствующую этой точке (которая, в частности, может принадлежать и сингулярному спектру матрицы) правую жорданову полурешетку векторов. Указанные понятия, тем не менее, близки друг другу.

Далее в статье речь будет идти только о порожденных векторах первого вида и, в основном, о правых векторных характеристиках и конечных точках спектра. Поэтому определения "правый", "собственный" и "конечный" будем чаще всего опускать.

2.2. Свойства собственных порождающих векторов.

Приведем вначале ряд соображений, относящихся к свойствам порождающих векторов, справедливость которых легко устанавливается, в том числе с помощью примеров.

1) Порождающий вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ q-параметрической полиномиальной матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ может зависеть не от всех q скалярных параметров, а от меньшего числа параметров. В частности, $x(\boldsymbol{\lambda})$ может быть постоянным вектором.

2) Порождающий вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, отвечающий ее собственному полиному $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ определяется неоднозначно (в том числе по общей степени и по степеням относительно каждого из скалярных параметров). В частности, вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ представим с

точностью до составляющей, принадлежащей $N_c[F]$, а его компоненты – с точностью до слагаемых, кратных полиному $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$.

3) Порождающий вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ может отвечать более чем одному неприводимому полиному $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, в том числе его степени.

4) Полиномиальное решение $x(\boldsymbol{\lambda})$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ можно рассматривать как особый вид порождающего вектора: $x(\boldsymbol{\lambda})$ удовлетворяет соотношению вида (6) при $\varphi(\boldsymbol{\lambda}) \equiv 0$ и любом $z(\boldsymbol{\lambda})$ или при $z(\boldsymbol{\lambda}) \equiv 0$ и любом $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, а его значения $x(\boldsymbol{\lambda}_*)$ удовлетворяют при любом $\boldsymbol{\lambda}_*$ соотношению вида (5).

Лемма 1. *Для того, чтобы порождающий вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ соответствовал ее собственному полиному $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ и только ему, необходимо и достаточно, чтобы отвечающий им вектор $z(\boldsymbol{\lambda})$ из (6) являлся свободным. Если вектор $z(\boldsymbol{\lambda})$ не является свободным и $\sigma_r[z] = \{\psi(\boldsymbol{\lambda}) = 0\}$, то $\psi(\boldsymbol{\lambda})$ также является собственным полиномом матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, а $x(\boldsymbol{\lambda})$ является порождающим вектором матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, отвечающим полиному $\widehat{\varphi}(\boldsymbol{\lambda}) := \varphi(\boldsymbol{\lambda})\psi(\boldsymbol{\lambda})$ и только ему.*

Справедливость леммы устанавливается очевидным образом. Если полином $\psi(\boldsymbol{\lambda})$ полностью определяет регулярный спектр вектора $z(\boldsymbol{\lambda})$, то $\psi(\boldsymbol{\lambda})$ является НОД его компонент. Следовательно,

$$z(\boldsymbol{\lambda}) = \psi(\boldsymbol{\lambda})\widehat{z}(\boldsymbol{\lambda}),$$

причем вектор $\widehat{z}(\boldsymbol{\lambda})$ является свободным. При этом соотношение (6) принимает вид

$$F(\boldsymbol{\lambda})x(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi(\boldsymbol{\lambda})\psi(\boldsymbol{\lambda})\widehat{z}(\boldsymbol{\lambda}) = \widehat{\varphi}(\boldsymbol{\lambda})\widehat{z}(\boldsymbol{\lambda}).$$

Лемма 2. *Если матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ имеет правое нуль-пространство, то возможно существование полинома $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ и свободных векторов $x(\boldsymbol{\lambda})$, $z(\boldsymbol{\lambda})$, удовлетворяющих соотношению (6), которые либо вовсе не имеют никакого отношения к собственным полиномам и соответствующим правым порождающим векторам матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, либо отвечают паразитическим “собственным полиномам” матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$.*

Доказательство. Пусть $x_1(\boldsymbol{\lambda})$ – произвольное (не обязательно свободное) полиномиальное решение матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$:

$$F(\boldsymbol{\lambda})x_1(\boldsymbol{\lambda}) = 0.$$

Если $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ и $x_2(\boldsymbol{\lambda})$ – произвольные полином и вектор такие, что векторы

$$z(\boldsymbol{\lambda}) = F(\boldsymbol{\lambda})x_2(\boldsymbol{\lambda}), \quad x(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi(\boldsymbol{\lambda})x_2(\boldsymbol{\lambda}) + x_1(\boldsymbol{\lambda})$$

являются свободными, то $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, $x(\boldsymbol{\lambda})$ и $z(\boldsymbol{\lambda})$ формально удовлетворяют соотношению (6). При этом $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ и $x(\boldsymbol{\lambda})$ не являются, в действительности, собственным полиномом и соответствующим порождающим векторам матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$.

Если $x_2(\boldsymbol{\lambda})$ – порождающий вектор матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, отвечающий ее собственному полиному $\varphi_2(\boldsymbol{\lambda})$:

$$F(\boldsymbol{\lambda})x_2(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_2(\boldsymbol{\lambda})z(\boldsymbol{\lambda}),$$

и вектор $z(\boldsymbol{\lambda})$ является свободным, а $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$ – произвольный полином, при котором вектор

$$x(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_1(\boldsymbol{\lambda})x_2(\boldsymbol{\lambda}) + x_1(\boldsymbol{\lambda})$$

является свободным, то полином $\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_1(\boldsymbol{\lambda})\varphi_2(\boldsymbol{\lambda})$ и векторы $x(\boldsymbol{\lambda})$, $z(\boldsymbol{\lambda})$ формально удовлетворяют соотношению (6). При этом полином $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, содержащий паразитический делитель $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$, не является, в действительности, собственным полиномом матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$.

Заметим, что во всех нулях $\boldsymbol{\lambda}_*$ полинома $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ – в первом случае и полинома $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$ – во втором случае значения вектора $x(\boldsymbol{\lambda})$ совпадают со значениями полиномиального решения $x_1(\boldsymbol{\lambda}) : x(\boldsymbol{\lambda}_*) = x_1(\boldsymbol{\lambda}_*)$.

Ниже устанавливаются некоторые свойства порождающих векторов, связанные с интеграцией и дезынтеграцией собственных полиномов матрицы.

Лемма 3. *Пусть $\varphi_i(\boldsymbol{\lambda})$, $x_i(\boldsymbol{\lambda})$, $i = 1, \ldots, p$ – собственные полиномы и соответствующие им порождающие векторы матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$:*

$$F(\boldsymbol{\lambda})x_i(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_i(\boldsymbol{\lambda})z_i(\boldsymbol{\lambda}), \quad i = 1, \ldots, p, \tag{7}$$

причем отвечающие им векторы $z_i(\boldsymbol{\lambda})$ являются свободными. Тогда полином $\varphi(\lambda)$, являющийся наименьшим общим кратным (НОК) полиномов $\varphi_i(\boldsymbol{\lambda})$, $i = 1, \ldots, p$, и полиномиальный вектор

$$x(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{\varphi(\boldsymbol{\lambda})}{\varphi_i(\boldsymbol{\lambda})}\, x_i(\boldsymbol{\lambda}), \tag{8}$$

при любых отличных от нуля констант α_i удовлетворяют соотношению вида (6) *с вектором*

$$z(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i z_i(\boldsymbol{\lambda}). \tag{9}$$

Справедливость леммы устанавливается подстановкой выражения (8) в (6) с использованием (7).

Замечания. 1. Из условий леммы не следует, что векторы $x(\boldsymbol{\lambda})$ и $z(\boldsymbol{\lambda})$ будут свободными. Если полином $\psi(\boldsymbol{\lambda})$ определяет весь регулярный спектр вектора $x(\boldsymbol{\lambda})$, то его делители могут оказаться делителями полинома $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ и (или) всех компонент вектора $z(\boldsymbol{\lambda})$. В первом случае соответствующие делители следует исчерпать из полинома $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, а во втором – из регулярного спектра вектора $z(\boldsymbol{\lambda})$.

2. Возможно существуют определенные условия, при которых векторы $x(\boldsymbol{\lambda})$ и $z(\boldsymbol{\lambda})$ будут свободными.

3. В любом случае спектр вектора $x(\boldsymbol{\lambda})$ содержит решения системы уравнений

$$\frac{\varphi(\boldsymbol{\lambda})}{\varphi_i(\boldsymbol{\lambda})} = 0, \quad i = 1, \ldots, p,$$

левые части которых представляют собой совокупность взаимно простых полиномов.

Лемма 4. *Пусть $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ – собственный полином матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, $x(\boldsymbol{\lambda})$ – соответствующий ему порождающий вектор, и отвечающий им вектор $z(\boldsymbol{\lambda})$ из* (6) *является свободным. Если степень вектора $x(\boldsymbol{\lambda})$ относительно какого-либо скалярного параметра не меньше соответствующей степени какого-либо делителя полинома $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, то может быть построен порождающий вектор матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ меньшей степени относительно этого параметра, который отвечает либо этому делителю, либо полиному $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$.*

Доказательство. Пусть $\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_1(\boldsymbol{\lambda})\varphi_2(\boldsymbol{\lambda})$ и для степеней $x(\boldsymbol{\lambda})$ и $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$ относительно некоторого скалярного параметра λ_i выполнено условие

$$\deg_i x \geqslant \deg_i \varphi_1.$$

Разделим с остатком все компоненты вектора $x(\boldsymbol{\lambda})$ на $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$ (относительно параметра λ_i):

$$x(\lambda) = \varphi_1(\lambda)x_2(\lambda) + x_1(\lambda), \tag{10}$$

Соответствующие относительные степени векторов $x_2(\boldsymbol{\lambda})$ – частного от деления и $x_1(\boldsymbol{\lambda})$ – остатка удовлетворяют соотношениям

$$\deg_i x_2 = \deg_i x - \deg_i \varphi_1, \quad \deg_i x_1 < \deg_i \varphi_1.$$

Заметим, что при $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda}) \not\equiv \mathrm{const}$ $x_1(\boldsymbol{\lambda}) \not\equiv 0$ в силу предположения о том, что вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ является свободным.

Подставляя (10) в (6), получаем

$$F(\boldsymbol{\lambda})x_1(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_1(\boldsymbol{\lambda})z_1(\boldsymbol{\lambda}), \tag{11}$$

$$z_1(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_2(\boldsymbol{\lambda})z(\boldsymbol{\lambda}) - F(\boldsymbol{\lambda})x_2(\boldsymbol{\lambda}). \tag{12}$$

Равенство $z_1(\boldsymbol{\lambda}) \equiv 0$ приводит к соотношениям

$$F(\boldsymbol{\lambda})x_1(\boldsymbol{\lambda}) = 0, \quad F(\boldsymbol{\lambda})x_2(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_2(\boldsymbol{\lambda})z(\boldsymbol{\lambda}).$$

В этом случае имеет место один из двух случаев, приведенных в доказательстве Леммы 2, что противоречит предположению о том, что $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ и $x(\boldsymbol{\lambda})$ – действительно собственный полином и соответствующий порождающий вектор матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$.

Таким образом, вектор $z_1(\boldsymbol{\lambda})$ вида (12) отличен от нулевого. Если вектор $x_1(\boldsymbol{\lambda})$ является свободным, то из (11) следует, что он является порождающим вектором матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, отвечающим, по крайней мере, ее собственному полиному $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$.

Если $\sigma_r[x_1] = \{\psi(\boldsymbol{\lambda}) = 0\}$, то из (11) следует, что на полином $\psi(\boldsymbol{\lambda})$, или его делители, должны делиться либо полином $\varphi_1(\boldsymbol{\lambda})$, либо все компоненты вектора $z_1(\boldsymbol{\lambda})$. Первое условие с учетом представления (10) приводит к противоречию с предположением о том, что вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ является свободным. Следовательно, $\{\psi(\boldsymbol{\lambda}) = 0\} \subset \sigma_r[z_1]$. Таким образом, имеем

$$x_1(\boldsymbol{\lambda}) = \psi(\boldsymbol{\lambda})\widehat{x}_1(\boldsymbol{\lambda}), \quad z_1(\boldsymbol{\lambda}) = \psi(\boldsymbol{\lambda})\widehat{z}_1(\boldsymbol{\lambda}),$$

и для свободного вектора $\widehat{x}_1(\boldsymbol{\lambda})$ получаем из (11):

$$F(\boldsymbol{\lambda})\widehat{x}_1(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_1(\boldsymbol{\lambda})\widehat{z}_1(\boldsymbol{\lambda}).$$

При этом вектор $\widehat{z}_1(\boldsymbol{\lambda})$ не обязательно является свободным.

Заметим, что если полином $\varphi_2(\boldsymbol{\lambda})$ или его делитель принадлежит регулярному спектру вектора $z_1(\boldsymbol{\lambda})$, то соотношение (12) приведет к еще одному порождающему вектору матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$.

Ниже устанавливаются свойства рассматриваемых объектов (полиномиальных матриц, их собственных полиномов, порождающих векторов, полиномиальных решений), связанные с фиксированием у мультипараметра $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda, \boldsymbol{\mu})$ либо мультипараметра $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_*$, либо скалярного параметра $\lambda = \lambda_*$. В дальнейшем для любого полиномиального объекта $a := a(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ в указанных вариантах фиксирования параметров будем использовать одно и то же обозначение a_*:

$$a_* := a_*(\lambda) = a(\lambda, \boldsymbol{\mu}_*), \tag{13}$$

$$a_* := a_*(\boldsymbol{\mu}) = a(\lambda_*, \boldsymbol{\mu}). \tag{14}$$

Лемма 5. *Если свободный вектор $x(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ является полиномиальным решением матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, то вектор x_*, в случае отличия его от нулевого вектора, является для матрицы F_* полиномиальным решением (не обязательно свободным).*

Если $x(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ является порождающим вектором матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, отвечающим ее собственному полиному $\varphi(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ и соответствующий им вектор $z(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ является свободным, то вектор x_*, в случае отличия его от нулевого вектора, является для матрицы F_*

- *порождающим вектором (не обязательно свободным), отвечающим ее собственному полиному φ_*, если $\varphi_* \not\equiv \mathrm{const}$, $z_* \not\equiv 0$ и $\{\varphi_* = 0\} \notin \sigma_r[x_*]$;*
- *полиномиальным решением (не обязательно свободным), если $\varphi_* \equiv 0$ или $z_* \equiv 0$.*

Доказательство. Соотношения (1) и (6) в условиях (13) или (14) принимают вид

$$F_* x_* = 0, \tag{15}$$

$$F_* x_* = \varphi_* z_*. \tag{16}$$

При этом возможны следующие варианты:

$$\varphi_* \not\equiv \mathrm{const}, \quad \varphi_* \equiv 0, \quad \varphi_* \equiv \mathrm{const} \neq 0;$$
$$x_* \not\equiv 0, \quad x_* \equiv 0;$$
$$z_* \not\equiv 0, \quad z_* \equiv 0;$$

Если $x_* \not\equiv 0$, то соотношение (15) означает, что вектор x_* является полиномиальным решением матрицы F_*. Если $\sigma_-[x] \neq \varnothing$, то вектор x_* может иметь и регулярный спектр (см. доказательство леммы 6).

Полином $\varphi_* \not\equiv \mathrm{const}$ имеет конечные нули в обычном смысле. Тогда, если $x_* \not\equiv 0$ и $z_* \not\equiv 0$, соотношение (16) означает, что x_* является порождающим вектором для матрицы F_* (за исключением случая, когда φ_* является собственным полиномом для вектора x_*). Если $\varphi_* \equiv 0$ или $z_* \equiv 0$, соотношение (16) принимает вид (15), и выводы очевидны.

Замечания. 1. Если матрица $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ зависит от q скалярных параметров, то матрица F_* при фиксировании параметров вида (14) может зависеть от меньшего, чем $q-1$, числа параметров, а вида (13) – оказаться постоянной.

2.Равенства $x_* \equiv 0$, $z_* \equiv 0$ не могут иметь место для случая (14), поскольку векторы $x(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, $z(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ являются свободными. Для случая (13) равенства возможны только в случае существования у этих векторов левых сингулярных спектров, которым принадлежит одномерное решение системы: $\mu_i = \mu_{i*}$, $i = 1, \ldots, q-1$.

3. Равенство $\varphi_* \equiv 0$ для случая (14) не может иметь место, если полином $\varphi(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ является неприводимым.

4. Равенство $\varphi_* \equiv \mathrm{const} \neq 0$ при $z_* \not\equiv 0$ означает, что вектор x_*, если он не является нулевым, имеет отношение к бесконечно удаленным точкам спектра матрицы F_* то же самое может иметь место, когда φ_* является собственным полиномом вектора x_*.

5. Если полином $\varphi(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ является неприводимым, то полином φ_* может не являться таковым. Число неприводимых делителей разложимого полинома $\varphi(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ при фиксировании параметров может изменяться как в одну, так и в другую сторону.

Лемма 6. *Если x_* – правый собственный вектор матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$, отвечающий точке $\boldsymbol{\lambda}_* = (\lambda_*, \boldsymbol{\mu}_*) \in \sigma_-[F]$, то этот постоянный вектор является для матрицы F_*:*

- *значением ее правого полиномиального решения,*
- *значением правого порождающего вектора, отвечающего ее собственному полиному,*
- *собственным вектором, отвечающей точке из $\sigma_-[F_*]$,*

при фиксированном значении оставшихся параметров.

Доказательство. Пусть координаты точки $\boldsymbol{\lambda}_* \in \sigma_-[F]$ удовлетворяют системе вида (4), определяющей $(q-k)$-мерное собственное значение матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$. В условиях (13) или (14) эта система принимает вид:

$$\varphi_{i*} = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

При этом возможны следующие варианты.

Все $\varphi_{i*} \equiv 0$, тогда вектор x_* является соответствующим значением правого полиномиального решения (при фиксировании оставшихся скалярных параметров) матрицы F_*.

Не все φ_{i*} тождественно равны нулю. Тогда, если их НОД $\psi_* \not\equiv \mathrm{const}$, полином ψ_* является собственным полиномом матрицы F_*, так что вектор x_* – соответствующее значение отвечающего ему порождающего вектора.

Если ли же $\psi_* \equiv \mathrm{const}$, то решение рассматриваемой системы принадлежит конечному сингулярному спектру матрицы F_*. Конечность спектра предопределена конечностью координат точки $\boldsymbol{\lambda}_*$ и тем, что значения оставшихся скалярных параметров будут удовлетворять системе. Таким образом, вектор x_* является соответствующим собственным вектором матрицы F_*, отвечающим точке ее сингулярного спектра.

Замечания. 1. Первый случай не может иметь место при фиксировании параметров вида (14), т.к. это противоречило бы предположению от том, что система (4) не имеет $(q-l)$-мерных решений с $l < k$.

2. Третий случай не может иметь место при фиксировании параметров вида (13), т.к. однопараметрическая матрица не имеет сингулярного спектра.

3. Утверждения Лемм 5, 6 будут справедливы и при промежуточных вариантах фиксирования l параметров, когда $1 < l < q-1$. При этом возможны все три случая, приведенные в Лемме 6.

§3. Построение собственных порождающих векторов

Описываемые ниже методы построения правых порождающих векторов многопараметрической полиномиальной матрицы основаны на использовании Лемм 5, 6 и других свойств порождающих векторов. Эти методы представляют собой интерполирование с неопределенными коэффициентами правых векторных спектральных характеристик матриц, зависящих от меньшего числа параметров.

Наиболее просто задача построения порождающего вектора решается в случае, когда исходная матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ обладает следующими свойствами:

$$N_c[F] = 0, \tag{17}$$

$$\sigma_-[F] = \varnothing, \tag{18}$$

$$\sigma_r[F] = \{\varphi(\boldsymbol{\lambda}) = 0\}, \quad \varphi(\boldsymbol{\lambda}) \text{ -- неприводим}, \tag{19}$$

$$\forall \boldsymbol{\lambda}_* \in \sigma_r[F], \quad \rho_* = \operatorname{rank} F(\boldsymbol{\lambda}_*) = \rho - 1, \tag{20}$$

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) \text{ -- известен}. \tag{21}$$

Однако, даже при выполнении этих условий (они перечислены в порядке их важности) представление порождающего вектора является неоднозначным, в том числе по степеням относительно всех параметров.

Оба метода аппробированы на ряде примеров. Вопросы, связанные с влиянием ошибок (как в смысле обусловленности задачи, так и в смысле обусловленности методов) не рассматриваются.

3.1. Интерполирование методом неопределенных коэффициентов.

Описываемый ниже метод построения порождающего вектора матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ основан на сведении исходной задачи к однопараметрической при фиксировании параметров вида (13): $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_*$.

Так как степень порождающего вектора заранее не известна будем строить последовательность полиномиальных векторов, степени которых возрастают. Построение вектора фиксированной степени, интерполирующего векторные спектральные характеристики постоянных матриц, которые отвечают набору различных фиксированных значений всех q параметров, прерывается, когда имеется основание предполагать, что получен искомый вектор. После этого выполняется проверка, действительно ли полученный вектор является порождающим для исходной матрицы. При неудачном результате проверки процесс продолжается.

Приведем вначале описание метода для наиболее простого случая, когда для матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ выполнены условия (17)–(20).

На шаге k процесса, $k = 0, 1, \dots$, разыскиваются векторные коэффициенты q-параметрического полиномиального вектора $x(\boldsymbol{\lambda})$ в одном из двух видов:

•общей степени k

$$x(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{l=0}^{k} \sum_{i_1+\ldots+i_q=l} a_{i_1\ldots i_q} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_q^{i_q}, \tag{22}$$

•степени k по каждому скалярному параметру

$$x(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i_1=0}^{k} \ldots \sum_{i_q=0}^{k} a_{i_1\ldots i_q} \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_q^{i_q}. \tag{23}$$

Для числа M_k векторных коэффициентов, определяющих вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$, имеем: в представлении (22) $M_k = \sum\limits_{j=0}^{k} C_q^j$, в представлении (23) $M_k = (k+1)^q$.

В начале процесса, при $k = 0$ выбираются две различные точки $\boldsymbol{\lambda}_1$, $\boldsymbol{\lambda}_2$, и далее при $k > 0$ последующая, отличная от предыдущих точка $\boldsymbol{\lambda}_i := (\lambda_{1i}, \dots, \lambda_{qi})$ спектра матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, для каждой из которых вычисляется соответствующий собственный вектор x_i:

$$F(\boldsymbol{\lambda}_i) x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

как базис $ker F(\boldsymbol{\lambda}_i)$.

Способ нахождения некоторой точки $\boldsymbol{\lambda}_* \in \sigma_r[F]$ может быть следующим. Выбираем фиксированное $\boldsymbol{\mu}_* = (\mu_{1*}, \dots, \mu_{q-1,*})$ и находим матрицу $F_* := F_*(\lambda) = F(\lambda, \boldsymbol{\mu}_*)$. Матрица F_*, которая в частном случае является постоянной, может

•иметь конечный спектр,

•иметь одно правое полиномиальное решение,

•не иметь ни того, ни другого.

В первом случае вычисляем все различные собственные значения λ_{*j} матрицы F_* и соответствующие им собственные векторы x_{*j}. Во втором случае для правого полиномиального решения $x_*(\lambda)$ степени s для $s+1$ различного фиксированного значения λ_{*j} вычисляем его значения $x_{*j} = x_*(\lambda_{*j})$. В обоих случаях имеем одно или совокупность равенств вида

$$F(\lambda_{*j}) x_{*j} = 0. \tag{24}$$

Третий случай означает неудачный выбор $\boldsymbol{\mu}_*$, которое следует исключить из дальнейшего рассмотрения, после чего выбирается другое фиксированное значение $\boldsymbol{\mu}_*$.

Заметим, что выполнение условия (21), т.е. знание собственного полинома $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$, облегчило бы задачу выбора подходящего значения $\boldsymbol{\mu}_*$.

Определив очередную пару $\boldsymbol{\lambda}_N$, x_N, формируем систему интерполяционных уравнений

$$x(\boldsymbol{\lambda}_i) = \alpha_i x_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{25}$$

с неопределенными нормирующими коэффициентами α_i. Система (25) из Nn уравнений относительно $M_k n + N$ неизвестных является однородной. Естественно начинать исследование систем вида (25) при таком N, что $Nn \geqslant M_k n + N$.

Если система (25) имеет решение с хотя бы одним предписанным $\alpha_i = 0$, то это означает, что текущее значение k степени вектора $x(\boldsymbol{\lambda})$ не является достаточным для представления вектора $\alpha_i x_i$ в качестве своего значения $x(\boldsymbol{\lambda}_i)$. В этом случае переходим к следующему шагу: $k := k + 1$.

Если система (25) имеет нетривиальное решение, которое не содержит предписанных значений $\alpha_i = 0$, то не любое ее частное решение может определять искомый вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$, даже когда степень k является достаточной для его представления. Признаком возможности построения порождающего вектора $x(\boldsymbol{\lambda})$ является равенство $L_N = L_{N-1}$, где L_N – число фундаментального ряда решений системы (25). Если $L_N < L_{N-1}$, построение последовательностей $\boldsymbol{\lambda}_i$, x_i продолжается.

Если $L_N = L_{N-1}$ (при условии одной и той же степени k для обеих систем), находим частное решение одной из систем, присваивая L_N свободным неизвестным произвольные значения, не все равные нулю. Естественно в качестве свободных максимально использовать компоненты неизвестных векторных коэффициентов из соответствующего представления вектора $x(\boldsymbol{\lambda})$. Нормирующие множителем α_i, входящие в число свободных неизвестных, полагаются отличными от нуля.

После этого выполняем проверку, является ли полученный вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ свободным. Для этого вычисляем НОД всех компонент вектора. Если он является полиномом, отличным от константы, то все компоненты полиномиального вектора делим на него.

Затем находим полиномиальный вектор

$$u(\boldsymbol{\lambda}) = F(\boldsymbol{\lambda})x(\boldsymbol{\lambda})$$

и вычисляем НОД $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$ всех его компонент. Если $\varphi(\boldsymbol{\lambda}) \not\equiv \mathrm{const}$, то вектор $x(\boldsymbol{\lambda})$ является правым собственным порождающим вектором матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, отвечающим ее собственному полиному $\varphi(\boldsymbol{\lambda})$. В противном случае следует вернуться к дальнейшему построению последовательностей $\boldsymbol{\lambda}_i$, x_i и исследованию соответствующих систем вида (25). В результате либо при текущей степени k будет получено меньше значение L_N, либо возникает необходимость увеличения степени k.

В случае, когда матрица $F(\boldsymbol{\lambda})$ не обладает каким-либо из свойств (17)–(20), процедура построения порождающего вектора усложняется.

Если не выполнено только условие (20), то для некоторой точки $\boldsymbol{\lambda}_i \in \sigma_r[F]$ может оказаться, что $\rho_i = \operatorname{rank} F(\boldsymbol{\lambda}_i) = \rho - t < \rho - 1$. В этом случае базис $\ker F(\boldsymbol{\lambda}_i)$ будет состоять из t векторов x_{ij}, $j = 1, \dots, t$. Тогда соответствующее точке $\boldsymbol{\lambda}_i$ интерполяционное уравнение принимает вид

$$x(\boldsymbol{\lambda}_i) = \sum_{j=1}^{t} \alpha_{ij} x_{ij}.$$

Аналогичная ситуация может иметь место, когда не выполнены условие (19) – в кратных точках $\boldsymbol{\lambda}_i \in \sigma_r[F]$, или условие (18) – в кратных точках $\boldsymbol{\lambda}_i \in \sigma_r[F] \cap \sigma_-[F]$, и обязательно будет иметь место при невыполнении условия (17) – в любых точках $\boldsymbol{\lambda}_i$.

Если не выполнено условие (19) и различным собственным полиномам матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ отвечают различные порождающие векторы, частные векторные характеристики x_{ij}, или их линейные комбинации могут относиться к разным порождающим векторам, которым соответствуют разные частные решения интерполяционной системы. В частности, некоторые нормирующие коэффициенты α_{ij} должны быть равными нулю для получения определенного порождающего вектора.

Если не выполнено условие (18), то точкам $\boldsymbol{\lambda}_i \in \sigma_-[F]$ будут соответствовать векторы x_{ij}, не имеющие отношения к порождающему вектору. В этом случае, соответствующие им нормирующие множители также должны быть равными нулю.

Аналогичная неопределенность для нормирующих множителей будет иметь место, когда не выполнено условие (17). При этом возможно построение полиномиального вектора вида (10), который отвечает полиному, содержащему паразитический делитель (см. доказательство Леммы 2), либо построение полиномиального решения.

3.2. Интерполяционная формула Лагранжа.

Описываемый ниже метод построения правых собственных порождающих векторов многопараметрической полиномиальной матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ является рекурсивным по числу параметров. Он основан на использовании формулы Лагранжа интерполирования по соответствующим векторным спектральным характеристикам (с неопределенными коэффициентами), которые получены на более низком (по числу скалярных параметров) уровне для различных фиксированных значений скалярного параметра $\lambda = \lambda_*$.

Основанием рекурсии является возможность построения на нижнем первом уровне для однопараметрической полиномиальной матрицы всех правых порождающих векторов$^{*)}$.

Правым порождающим вектором, отвечающим собственному полиному $\varphi(\lambda) = \lambda - \lambda_*$ однопараметрической матрицы $F(\lambda)$, т.е. ее собственному значению λ_*, являются соответствующие ему линейно-независимые собственные векторы $x_* \notin N_c[F_*]$. Полиномиальные решения матрицы $F(\lambda)$ могут быть найдены, либо с помощью ΔW-1 алгоритма [2], либо с помощью перехода на еще более низкий нулевой уровень, где для постоянной матрицы роль полиномиальных решений играют постоянные векторы, образующие базис ее ядра.

Приведем вначале описание метода для наиболее простого случая, когда для матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$ выполнены условия (17)–(20).

На протяжении всего процесса формируются две пары последовательностей λ_i, $x_i(\boldsymbol{\mu})$, $i = 0, 1, \ldots, k$ и λ_{kj}, $x_{kj}(\boldsymbol{\mu})$, $k = 0, 1, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots$. Каждая новая пара λ_*, $x_*(\boldsymbol{\mu})$ определяется следующим образом.

Выбирается произвольное значение λ_*, отличное от всех рассматриваемых ранее. Затем для матрицы $F_*(\boldsymbol{\mu}) = F(\lambda_*, \boldsymbol{\mu})$, зависящей от меньшего числа скалярных параметров, с помощью

$^{*)}$Здесь и далее к числу порождающих векторов будем относить и полиномиальные решения матрицы.

рекурсии находится порождающий вектор $x_*(\boldsymbol{\mu})$, если таковой существует. В противном случае, неудачное значение λ_* исключается из дальнейшего рассмотрения, и выбирается новое значение λ_*.

К началу шага k процесса ($k = 0, 1, \ldots$) имеем последовательность различных значений λ_i, $i = 0, 1, \ldots, k$, используемых в качестве узлов интерполирования, и последовательность соответствующих порождающих векторов $x_i(\boldsymbol{\mu})$ матриц $F_i(\boldsymbol{\mu}) = F(\lambda_i, \boldsymbol{\mu})$. Эти последовательности будем называть базовыми.

Используя формулу Лагранжа, строим на основе базовых последовательностей интерполяционный полиномиальный вектор степени не меньше k относительно параметра λ:

$$x^k(\lambda, \boldsymbol{\mu}) = \sum_{i=0}^{k} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}\, \alpha_i x_i(\boldsymbol{\mu}) \tag{26}$$

с неопределенными нормирующими коэффициентами α_i.

Далее, начиная с λ_{k1}, $x_{k1}(\boldsymbol{\mu})$, строятся вспомогательные последовательности λ_{kj}, $x_{kj}(\boldsymbol{\mu})$, которые используются для проверки возможности построения порождающего вектора матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ степени k относительно параметра λ. При этом все значения λ_{kj} должны быть различными и не совпадать со значениями λ_i из базовой последовательности. На шаге l ($l = 1, 2, \ldots$), используя λ_{k_j}, $x_{k_j}(\boldsymbol{\mu})$, $j = 1, \ldots, l$, формируем систему уравнений

$$x^k(\lambda_{kj}, \boldsymbol{\mu}) = \alpha_{k_j} x_{k_j}(\boldsymbol{\mu}), \quad j = 1, \ldots, l, \tag{27}$$

относительно $k + l + 1$ неизвестного: α_i, $i = 0, \ldots, k$ и α_{k_j}, $j = 1, \ldots, l$. Число скалярных уравнений однородной системы (27) с постоянными коэффициентами определяется величиной $n \sum_{j=1}^{l} t_j$, где t_j – число отличных от нуля постоянных векторных коэффициентов при различных степенях полиномиальных векторов $x^k(\lambda_{k_j}, \boldsymbol{\mu})$ и $x_{k_j}(\boldsymbol{\mu})$ из векторного уравнения с номером j.

При исследовании полученной системы может иметь место один из следующих случаев.

1) Хотя бы одно из неизвестных принимает предписанное нулевое значение. В этом случае пара λ_{kl}, $x_{kl}(\boldsymbol{\mu})$ пополняет базовые последовательности: $\lambda_{k+1} := \lambda_{kl}$, $x_{k+1}(\boldsymbol{\mu}) := x_{kl}(\boldsymbol{\mu})$, и осуществляется переход к следующему шагу $k := k + 1$. Заметим, что

при этом можно не находить заново вспомогательные последовательности, а использовать оставшиеся члены вспомогательных последовательностей из предыдущего шага (по крайней мере, на начальной стадии проверок).

2) Ни одно из неизвестных не принимает предписанного нулевого значения и либо $l = 1$, либо при $l > 1$ число фундаментального ряда решений $L_l < L_{l-1}$. В этом случае определяется новая пара $\boldsymbol{\lambda}_{k,l+1}$, $x_{k,l+1}(\boldsymbol{\mu})$ и для $l := l + 1$ формируется и исследуется новая система вида (27).

3) Ни одно из неизвестных не принимает предписанного нулевого значения, $l > 1$ и $L_l = L_{l-1}$. В этом случае находится частное решение системы с ненулевыми значениями всех неизвестных. Для полученного вектора вида (26) выполняется проверка на соответствие его порождающему вектору матрицы $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$. Проверка осуществляется в точности так же, как это описано в п. 3.1.

При неудачном исходе проверки продолжается процесс формирования вспомогательных последовательностей, формирования новой системы и ее исследования.

В случаях, когда матрица $F(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ не обладает каким-либо из свойств (17)–(20), процедура построения порождающего вектора усложняется.

Если не выполнено только условие (20), то для некоторой точки λ_* может оказаться, что $\rho_* = \operatorname{rank} F_*(\boldsymbol{\mu}) = \rho - t < \rho - 1$. Тогда матрица $F_*(\boldsymbol{\mu})$ будет иметь t различных порождающих векторов $x_{*s}(\boldsymbol{\mu})$, $s = 1, \ldots, t$, отвечающих одному и тому же собственному полиному. Если $\lambda_* = \lambda_i$ является базовой, то следует заменить $\alpha_i x_i(\boldsymbol{\mu})$ в выражении (26) на соответствующую сумму: $\sum\limits_{s=1}^{t} \alpha_{is} x_{is}(\boldsymbol{\mu})$. Если $\lambda_* = \lambda_{k_j}$ является вспомогательной, то в соответствующем уравнении j системы (27) правая часть принимает вид: $\sum\limits_{s=1}^{t} \alpha_{k_j s} x_{k_j s}(\boldsymbol{\mu})$. При этом следует иметь ввиду, что некоторые из неизвестных нормирующих множителей α_{*s} могут быть равны нулю для искомого вектора $x(\lambda, \boldsymbol{\mu})$.

Аналогичная ситуация может иметь место, когда не выполнены условия (19) или (18), и обязательно будет иметь место при невыполнении условия (17).

Если не выполнено условие (19), то при некоторых λ_* матрица

$F_*(\boldsymbol{\mu})$ может иметь различные порождающие векторы, отвечающие различным собственным полиномам, а также правые полиномиальные решения*). В этом случае формально можно поступить так же, как в предыдущем случае. Однако теперь при исследовании соответствующей системы и нахождении ее частных решений следует рассматривать всевозможные варианты, когда все соответствующие нормирующие множители, за исключением одного, полагаются равными нулю. Альтернативой является построение базовых последовательностей, содержащих вариабельные порождающие векторы.

Аналогичная ситуация может иметь место, когда не выполнено условие (18), и обязательно будет иметь место для любых λ_* при невыполнении условия (17).

Если не выполнено условие (18), то при некоторых λ_* возможно построение векторов, не имеющих отношения к порождающим векторам. В этом случае соответствующие им нормирующие множители должны обязательно быть равными нулю в независимости от того, в какую из последовательностей (базовую или вспомогательную) они входят.

Если же не выполнено условие (17), то оно не будет выполняться и для матрицы $F_*(\boldsymbol{\mu})$. В этом случае возможно построение полиномиального вектора $x(\lambda, \boldsymbol{\mu})$ вида (10), который отвечает полиному, содержащему паразитический делитель, либо построение полиномиального решения.

Изложенное выше означает необходимость построения при $\lambda = \lambda_*$ всех порождающих векторов матрицы $F_*(\boldsymbol{\mu})$.

§4 Замечания

Аналогичным образом вводится понятие *левого собственного порождающего вектора* многопараметрической полиномиальной матрицы, отвечающего ее собственному полиному, устанавливаются его свойства и осуществляется его построение.

Не все вопросы, относящиеся к свойствам собственных порождающих векторов, методам их построения и перспективе использования нашли отражение в данной работе. В частности, остались открытыми следующие вопросы.

*) Это чрезвычайно важно с точки зрения рекурсивности алгоритма.

1) Как ввести определение, объединяющее нынешнее понятие собственного порождающего вектора и вектора, порождающего жорданову полурешетку векторов для кратной точки спектра?

2) Как связаны между собой левые сингулярные спектры матрицы $F(\boldsymbol{\lambda})$, правого собственного порождающего вектора $x(\boldsymbol{\lambda})$ и соответствующего свободного вектора $z(\boldsymbol{\lambda})$ из соотношения (6)?

3) При каких условиях возможно существование правого собственного порождающего вектора, не имеющего левого сингулярного спектра?

4) При каких условиях возможно существование собственного порождающего вектора, отвечающего всему регулярному спектру матрицы, или некоторой совокупности ее собственных полиномов?

5) Существует ли возможность и каковы условия построения для многопараметрической полиномиальной матрицы аналога канонической формы Смита с помощью базисов правых и левых полиномиальных решений и порождающих векторов?

6) Как эффективно осуществлять построение порождающих векторов для матрицы общего вида? В частности, не следует ли предварительно исчерпывать ее правое и левое нуль-пространства и далее последовательно исчерпывать ее собственные полиномы? При каких условиях это возможно?

7) Возможно ли и при каких условиях исчерпывание регулярного спектра многопараметрической полиномиальной матрицы и построение, таким образом, свободного базиса подпространства многопараметрических полиномиальных векторов? Возможно ли для этого и на базе этого построение рекурсивного алгоритма ∇V-q факторизации q-параметрической полиномиальной матрицы?

Автор надеется, что на большинство вопросов удастся получить содержательные ответы.

Литература

1. В. Н. Кублановская, *Некоторый подход к решению многопараметрических задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 191–246.
2. В. Н. Кублановская, *Методы и алгоритмы решения спектральных задач для полиномиальных и рациональных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **238** (1997), 3–330.
3. В. Н. Кублановская, В. Н. Симонова, *Операции над скалярными полиномами и их машинная реализация.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **219**

(1994), 158–175.

4. В. Н. Кублановская, В. Б. Хазанов, *Относительная факторизация многочленов от нескольких переменных.* — Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **36, No. 8** (1996), 6–11.
5. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах λ-матриц.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **111** (1981), 180–194.
6. В. Б. Хазанов, *О спектральных свойствах многопараметрических полиномиальных матриц.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **229** (1995), 284–321.

Khazanov V. B. Generating eigenvectors of a multiparameter polynomial matrix.

The notion of a generating eigenvector of a multiparameter polynomial matrix, generalizing the notion of an eigenvector of a one-parameter polynomial matrix, is introduced. Some properties of generating eigenvectors are established, and two methods for constructing are described.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 25 мая 1998 г.