Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 248, 1998 г.

К. В. Шахбазян

СТАБИЛИЗАЦИОННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ДЛЯ КОНВЕЙЕРОВ

1. Конвейеры и конвейерные графы

Статья посвящена рассмотрению конвейерных систем, примерами которых являются систолические матрицы и конвейеры в CRAY. С известной степенью точности конвейеры могут служить моделью электронных схем.

При анализе конвейерных устройств в связи с проблемой верификации встает вопрос об их стабилизации для заданного постоянного входа. В статье предлагается алгоритм стабилизационного эксперимента для конвейерных систем. Стабилизационный эксперимент основан на возможности декомпозиции процессов, протекающих в конвейерах, что позволяет получить точную верхнюю оценку длины эксперимента для класса конвейеров, имеющих изоморфные графы связей.

Мы будем называть *конвейером* сеть функциональных элементов, обладающих единичной задержкой. Уточним это определение.

Прежде всего уточним наши предположения относительно автоматов, входящих в конвейер. Пусть конвейер состоит из M автоматов $\Psi_1, ..., \Psi_M$. Предположим, что автомат Ψ_i есть пятерка $(A^{n_i}, A^{n_i}, A^{m_i}, \varphi_i, \xi_i)$, где A – конечный алфавит, $n_i > 0$, $m_i > 0$. Относительно функций φ_i, ξ_i перехода и выхода сделаем следующие предположения:

$$\varphi_i(q, x) = x$$

$$\xi_i(q, x) = f_i(q),$$

где $q, x \in A^{n_i}$, $f_i : A^{n_i} \to A^{m_i}$. Тем самым, каждый из автоматов Ψ_i оказывается функциональным элементом с единичной задержкой.

Работа поддержана проектом ИНТАС-93-1702.

Сопоставим теперь j-ой компоненте $(j = 1, ..., n_i)$ входного символа автомата Ψ_i переменную x_{ij} и назовем ее *входной переменной автомата* Ψ_i. На k-ом шагу работы автомата Ψ_i переменная x_{ij} получает значение j-ой компоненты входного символа автомата Ψ_i, поступающего на вход автомата на этом шагу. Обозначим это значение через x_{ij}^k.

Аналогично, сопоставим j-ой компоненте $(j = 1, ..., m_i)$ выходного символа автомата Ψ_i переменную z_{ij} и назовем ее *выходной переменной автомата* Ψ_i. На k-ом шагу работы автомата Ψ_i переменная z_{ij} получает значение j-ой компоненты выходного символа автомата Ψ_i, появляющегося на выходе автомата на этом шагу. Обозначим это значение через z_{ij}^k.

При введенных предположениях и обозначениях канонические уравнения для автомата Ψ_i $(i = 1, ..., M)$ принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \left(z_{i_1}^{k+1}, ..., z_{im_i}^{k+1}\right) &= f_i\left(x_{i_1}^k, ..., x_{in_i}^k\right) \\ q_i^{k+1} &= \left(x_{i_1}^k, ..., x_{in_i}^k\right) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $k = 1, 2, ...,$ $q_i^k \in A^{m_i}$, $i = 1, ..., M$.

Перейдем теперь к конструированию из автоматов $\Psi_1, ..., \Psi_M$ сети K, которую и будем называть конвейером. Пусть Π-множество входных и выходных переменных всех автоматов $\Psi_1, ..., \Psi_M$ и пусть $\Pi = \Pi_1 \cup ... \cup \Pi_s$ – произвольное разбиение множества Π на классы, удовлетворяющие следующему требованию: каждый из классов Π_i $(i = 1, ..., s)$ содержит не более одной выходной переменной из множества всех выходных переменных автоматов $\Psi_1, ..., \Psi_M$. Мы будем отождествлять значения переменных, принадлежащих одному классу на k-ом шагу работы автоматов, т.е. мы будем предполагать, что осуществляется условие $x^k = y^k$, если $x, y \in \Pi_i$ $(i = 1, ..., s)$.

Назовем *конвейером* K множество автоматов $\{\Psi_1, ..., \Psi_M\}$ вместе с правилами идентификации переменных, описываемыми разбиением $\Pi = \Pi_1 \cup ... \cup \Pi_s$.

Рассмотрим класс Π_i, который содержит единственную выходную переменную автомата z_{jl}. Для идентификации значений остальных переменных класса Π_i со значениями переменной z_{jl} положим

$$x_{is}^k = z_{jl}^k \quad \text{для} \quad x_{is} \in \Pi_i, \quad k = 1, 2, \dots\ . \tag{2}$$

Пусть теперь Π_i-класс, не содержащий выходных переменных автоматов. Для идентификации переменных такого класса положим

$$x_{js}^k = x_{rl}^k \text{ для каждой пары } x_{js}, x_{rl} \in \Pi_i. \tag{3}$$

Определим теперь отображение $\theta{:}\Pi \to \Pi$ следующим способом. Если класс Π_i содержит выходную переменную автомата z_{js}, то $\theta(v) = z_{js}$ для всех $v \in \Pi_i$. Переменную z_{js} будем называть *выходной переменной конвейера*. Множество всех выходных переменных конвейера K мы будем обозначать $\mathrm{Out}(K)$. Упорядочив переменные в $\mathrm{Out}(K)$, получим выходной алфавит $Z(K)$ конвейера K. Очевидно: $Z(K) = A^{|\mathrm{Out}(K)|}$. Если же класс Π_i содержит только входные переменные автоматов, то зафиксируем для этого класса произвольно одну из переменных $x \in \Pi_i$, положим $\theta(v) = x$ для всех $v \in \Pi_i$ и назовем переменную x *входной переменной конвейера* K. Множество всех входных переменных конвейера K будем обозначать через $In(K)$. Упорядочивая переменные в $In(K)$, легко получить входной алфавит $A(K) = A^{|In(K)|}$ конвейера.

Используя канонические уравнения (1) и условия идентификации переменных (2) и (3), мы получим каноническую систему уравнений (4), описывающую функционирование конвейера K:

$$\left.\begin{array}{r} \left(z_{i_1}^{k+1}, ..., z_{im_i}^{k+1}\right) = f_i\left(\theta^k(x_{i_1}), ..., \theta^k(x_{in_i})\right) = \\ \varphi_i\left(q_i^k, \theta^k(x_{i_1}), ..., \theta^k(x_{in_i})\right) = \left(\theta^k(x_{i_1}), ..., \theta^k(x_{in_i})\right) = q_i^{k+1} \end{array}\right\}, \tag{4}$$

где $q_i^k \in A^{n_i}$, $i = 1, 2, ...$, и $\theta^k(x_{ij})$ есть значение переменной $\theta(x_{ij})$ на k-ом шагу конвейера K. Очевидно, можно полагать что алфавит внутренних состояний $Q(K) = Z(K)$.

Итак, полностью определен автомат K, называемый *конвейером* со входным алфавитом $A(K)$, с алфавитом внутренних состояний $Q(K)$, выходным алфавитом $Z(K)$ и каноническими уравнениями (4).

Теперь перейдем к определению некоторого класса помеченных графов, которые мы будем называть конвейерными графами.

Рассмотрим класс помеченных графов $G = (V, U)$, в которых каждая вершина $v \in V$ снабжена целочисленной пометкой $m(v)$. Будем предполагать, что $m(v) \leq \mathrm{out}(v)$, где $\mathrm{out}(v)$ – число дуг, исходящих из v. Такие графы будем называть *конвейерными графами*.

Очевидно, что каждому конвейеру K соответствует конвейерный граф. Обозначим его $G(K)$. Вершинами $G(K)$ будут: 1)

$In(K)$-входные переменные конвейера K и 2) автоматы $\Psi_1, ..., \Psi_N$. Вершина Ψ_i имеет пометку $m(\Psi_i) = m_i$. Вершина $x \in In(K)$ имеет пометку $m(x) = 1$. Дуга $u = (x, \Psi_i)$ является дугой граф $G(K)$ тогда и только тогда, когда $\theta(x_{ij}) = x$ для некоторого j. Дуга $u = (\Psi_i, \Psi_j)$ является дугой графе $G(K)$ тогда и только тогда, когда $\theta(x_{jl}) = z_{is}$ для некоторых l и s.

Очевидно также, что если граф G является конвейерным, то ему соответствует класс $\wp(G)$ конвейеров таких, что если $K \in \wp(G)$, то $G(K) = G$.

В дальнейшем мы будем рассматривать наряду с графами $G(K)$ графы $\overline{G}(K)$, которые получаются из $G(K)$ исключением входных вершин с инцидентными им дугами.

Через $\overline{G}^*(K)$ будем обозначать фактор-граф графа $\overline{G}(K)$.

Пример 1. В качестве примера рассмотрим систолическую схему для умножения трехдиагональных матриц, предложенную Кунгом [1]. Пусть

$$M_1 = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & - & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & - & 0 \\ - & - & - & - & c_{n-1} \\ 0 & - & - & a_n & b_n \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} e_1 & f_1 & 0 & - & 0 \\ d_2 & e_2 & f_2 & - & 0 \\ - & - & - & - & f_{n-1} \\ 0 & - & - & d_n & e_n \end{pmatrix}$$

Произведение $M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} k_1 & l_1 & m_1 & 0 & - & - & 0 \\ h_2 & k_2 & l_2 & m_2 & 0 & - & 0 \\ g_3 & h_3 & k_3 & l_3 & m_3 & - & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & - & - & - & - & k_n \end{pmatrix}$, где элементы вычисляются по формулам

$$\begin{cases} k_i = a_i \cdot f_{i-1} + b_i \cdot e_i + c_i \cdot d_{i+1} \\ h_i = a_i \cdot e_{i-1} + b_i \cdot d_i \\ l_i = b_i \cdot f_i + c_i \cdot e_{i+1} \\ m_i = c_i \cdot f_{i+1} \\ g_i = a_i \cdot d_{i-1} \end{cases}$$

$i = 1, ..., n$.

Конвейер (систолическая схема) состоит из 9 копий автомата Ψ с выходной функцией $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 \cdot x_3, x_3, x_2)$.

На рис. 1 автомат Ψ_i представлен со своими входными и выходными переменными. На рис. 2 изображен конвейерный граф, соответствующий конвейеру умножения матриц.

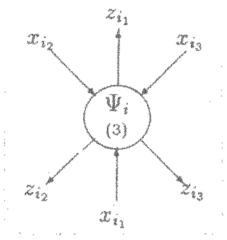

Рис. 1 Автомат Ψ_i и соответствующие ему переменные.

Легко видеть, что если входные переменные имеют следующие последовательности значений

$$\begin{array}{l}
x_1 = \ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ a_2\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ a_3\ ,\ 0\ ,\ 0\ \ldots \\
x_2 = \ 0\ ,\ 0\ ,\ b_1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ b_2\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ b_3\ \ldots \\
x_3 = \ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ c_1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ c_2\ ,\ 0\ \ldots \\
x_4 = \ 0\ ,\ d_1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ d_2\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ d_3\ ,\ 0\ \ldots \quad , \\
x_5 = \ 0\ ,\ 0\ ,\ e_1\ ,\ 0\ ,\ e_2\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ e_3\ ,\ 0\ \ldots \\
x_6 = \ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ f_1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ f_2\ ,\ 0\ ,\ 0\ \ldots \\
x_7^k = x_8^k = x_9^k = x_{10}^k = x_{11}^k = 0 \qquad k = 1, \ldots, 3n.
\end{array}$$

то выходные переменные получают следующие последовательности значений

$$\begin{array}{l}
z_{11} = 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ g_3\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ g_4\ ,\ 0\ ,\ 0\ \ldots \\
z_{21} = 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ h_2\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ h_3\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ h_4\ \ldots \\
z_{31} = 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ k_1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ k_2\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ k_3\ ,\ 0\ \ldots \\
z_{61} = 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ l_1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ l_2\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ l_3\ \ldots \\
z_{91} = 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ m_1\ ,\ 0\ ,\ 0\ ,\ m_2\ ,\ 0\ ,\ 0\ \ldots
\end{array}$$

2. Стабилизация конвейера

Задача стабилизации произвольного автомата заключается в следующем. Рассмотрим автомат $\Psi = (A, Q, Z, \varphi, \xi, q_0)$. Предположим, что задан постоянный вход $x \in A$, т.е. рассматриваем входные слова вида x^n. Будем говорить, что автомат Ψ *стабилизируется при входе* x, если существует $n_0 > 0$ такое, что $\varphi\left(q_0, x^n\right) = \varphi\left(q_0, x^{n+1}\right)$, т.е. не меняется внутреннее состояние автомата Ψ.

Далее будем пользоваться следующими обозначениями. Начало слова α, имеющее длину l, будем обозначать $\alpha]_l$. Положим,

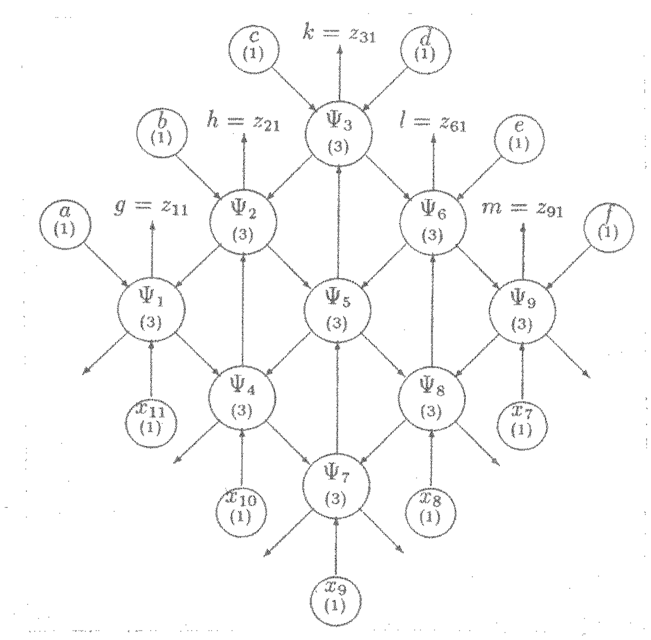

Рис. 2. Конвейерный граф $G(K)$ для конвейера K умножения трехдиагональных матриц.

по определению, $\varphi(q, \wedge) = q, \quad \varphi(q, \alpha a) = \varphi(\varphi(q,\alpha), a)$, где $\alpha \in A^*$-слово во входном алфавите автомата, $a \in A$. Определим функцию $\overline{\xi}(q,\alpha) = \xi(q,\alpha]_1)\ \xi(q,\alpha]_2)...\xi(q,\alpha)$ т.е. $\overline{\xi}(q,\alpha)$ – последовательность выходных состояний автомата при поступлении на вход слова α.

Условным простым экспериментом для автомата $\Psi = (A, Q, Z, \varphi, \xi, q_0)$ называется [2] конечное, ориентированное от корня дерево T, снабженное следующей разметкой:

1) каждой вершине v дерева T сопоставим символ $a_v \in A$;

2) каждому ребру ρ дерева T, исходящему из вершины v, сопоставим символ $z_\rho \in Z$, причем различным ребрам, исходящим из v, сопоставлены различные символы.

Чтобы определить результат применения условного простого эксперимента T к автомату Ψ, найдем путь в T

$$v_1, \rho_1, v_2, \rho_2, ..., \rho_{n-1}, v_n, \tag{5}$$

где v_1 – корень дерева T, $\rho_i = (v_i, v_{i+1})$ – ребро дерева T, из v_n не исходят ребра и выполняется условие

$$z_{\rho_1} z_{\rho_2} ... z_{\rho_{n-1}} = \overline{\xi}(q_0, a_{v_1} a_{v_2} ... a_{v_{n-1}}).$$

Результатом применения T *к* Ψ называем пару

$$(a_{v_1} a_{v_2} ... a_{v_{n-1}}, z_{\rho_1}, z_{\rho_2}, \dots, z_{\rho_{n-1}}),$$

если выполняется условие

$$z_{\rho_1} z_{\rho_2} ... z_{\rho_{n-1}} = \overline{\xi}(q_0, a_{v_1} a_{v_2} ... a_{v_{n-1}}).$$

В случае простого эксперимента в качестве меры его сложности рассматривается длина результата эксперимента. Длиной $\mathrm{LT}(\Psi)$ результата (α, β) применения эксперимента T к Ψ называем длину слова α. Наибольшая из длин результатов применения T к автоматам некоторого класса называется *длиной эксперимента относительно этого класса.*

Перейдем теперь к описанию стабилизационного эксперимента для конвейера K с заданным внутренним состоянием q_0 и стабильным входом x. Пусть известна какая-либо верхняя оценка C длины эксперимента, т.е. $\mathrm{LT}(K) \leq C$. Очевидная оценка здесь $\mathrm{LT}(K) \leq |A|^{|\mathrm{Out}(K)|}$. Тогда определен стабилизационный эксперимент как ориентированное дерево T со следующей разметкой:

1) каждой вершине v дерева T соппоставлен символ $a_v = x$;

2) каждая вершина v дерева T либо имеет $|Z(K)|$ исходящих ребер, либо не имеет ни одного исходящего ребра;

3) вершина v не имеет исходящих ребер в двух случаях:

а) если ребра (v'', v') и (v', v) помечены одинаково;

б) если путь из корня дерева в вершину v имеет длину C.

Очевидно, что конвейер K стабилизируется тогда и только тогда, когда путь (5) обрывается по правилу пункта а).

Заметим, что длина эксперимента – мера его сложности – существенно зависит от того, насколько точна верхняя оценка эксперимента $\mathrm{LT}(K)$ используемая в определенном эксперименте. Нашей целью является получение точной оценки для класса конвейеров $\wp(G)$, где G-произвольный конвейерный граф.

Рассмотрим теперь ациклические сети, состоящие из произвольных автоматов. Пусть сеть S состоит из автоматов $\Psi_1 =$

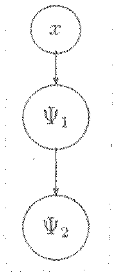

Рис. 3. Сеть S.

$(A_1, Q_1, Z_1, \varphi_1, \xi_1, q_0^1)$ и $\Psi_2 = (A_2, Q_2, Z_2, \varphi_2, \xi_2, q_0^2)$, для которых существуют стабилизационные эксперименты и для которых известны верхние границы экспериментов $\mathrm{LT}(\Psi_1)$ и $\mathrm{LT}(\Psi_2)$.

Пусть сначала сеть S есть последовательное соединение автоматов (рис.3). Очевидно, что S стабилизируется тогда и только тогда, когда стабилизируются оба автомата Ψ_1 и Ψ_2 и результат стабилизационного эксперимента имеет следующий вид:

$$\left(x^{r_1+r_2}, ((z_{11}, z_{21}) \ldots (z_{1r_1}, z_{2r_1}) \ldots (z_{1r_1+r_2}, z_{2r_1+r_2}))\right)$$

где $z_{1i} \in Z_1$, $z_{2i} \in Z_2$, $i = 1, \ldots, r_1 + r_2$ и $(x^{r_1}, (z_{11} \ldots z_{1r_1}))$ есть результат стабилизационного эксперимента для Ψ_1 при входе x; $z_{1i} = z_{1i+1}$ для $i \geq r_1$; $\left(z_{1r_1}^{r_2}, (z_{2r_1+1} \ldots z_{2r_1+r_2})\right)$ есть результат стабилизационного эксперимента для Ψ_2 при входе z_{1r_1}.

В этом случае при установлении стабильности автомата Ψ_1 начинается эксперимент для Ψ_2. Очевидно: $\mathrm{LT}(S) \leq \mathrm{LT}(\Psi_1) + \mathrm{LT}(\Psi_2)$.

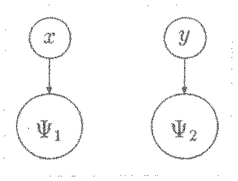

Рис. 4. Сеть S.

Пусть теперь сеть S состоит из двух независимых автоматов (рис.4). Очевидно, что такая сеть стабилизируется тогда и только тогда, когда стабилизируются оба автомата Ψ_1 и Ψ_2 и результат стабилизационного эксперимента имеет вид: $((x,y)^n,((z_{11},z_{21})\dots(z_{1n},z_{2n})))$ причем существует такое $n_0<n$ что $(x^{n_0},(z_{11}\dots z_{1n_0}))$ есть результат стабилизационного эксперимента для Ψ_1 и $(y^n,(z_{21}\dots z_{2n}))$ есть результат стабилизационного эксперимента для Ψ_2.

В этом случае стабилизационные эксперименты для автоматов Ψ_1 и Ψ_2 выполняются параллельно. Очевидно $\mathrm{LT}(S)\le \max\{\mathrm{LT}(\Psi_1),\mathrm{LT}(\Psi_2)\}$.

Рассмотрим наконец произвольную ациклическую сеть, состоящую из автоматов $\Psi_1,\dots,\Psi_M$. Предположим, что для каждого Ψ_i $(i=1,\dots,M)$ существует стабилизационный эксперимент и известна оценка $\mathrm{LT}(\Psi_i)$. Каждой вершине сети сопоставим $\mathrm{LT}(\Psi_i)$ в качестве веса. Тогда верно

Утверждение 1. *Пусть S-ациклическая сеть, состоящая из автоматов $\Psi_1,\dots,\Psi_M$. Длина стабилизационного эксперимента для S не превосходит длины максимального пути во взвешенном графе сети.* $\square$

Перейдем теперь от рассмотрения сетей произвольных автоматов к конвейерам. Очевидно

Утверждение 2. *Каждый автомат $\Psi=(A^n,A^n,A^m,\varphi,\xi)$, т.е. одновершинный конвейер, где $\varphi(q,x)\equiv x$, $\xi(q,x)=f(q)$, стабилизируется при любом начальном состоянии и любом входе x. Для достижения стабилизационного состояния достаточно одного шага автомата.* $\square$

Следствие. *Пусть K-ациклический конвейер, состоящий из автоматов $\Psi_1,\dots,\Psi_M$. Длина стабилизационного эксперимента для K не превосходит длины максимального пути в графе $\overline{G}(K)$.* $\square$

Пусть теперь K-конвейер с сильно связным графом $\overline{G}(K)$. Рассмотрим прежде всего соответствующий пример.

Пример 2. Рассмотрим конвейер K на рис.5, предполагая, что Ψ_1 и Ψ_2 суть изоморфные автоматы с функцией выхода $f:A^2\to A$ и конвейер K описывается соотношениями:

$$z_{11}^{k+1}=f\left(x_{11}^k,z_{21}^k\right)=f\left(x^k,z_{21}^k\right)$$

$$z_{21}^{k+1} = f\left(x_{21}^{k}, z_{11}^{k}\right) = f(y^{k}, z_{11}^{k}).$$

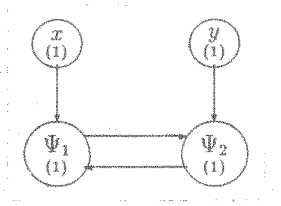

Рис. 5. Конвейер K.

Очевидно, что конвейер имеет $|A|^2$ внутренних состояний. Докажем, что для этого конвейера K существует некоторый автомат Φ с $|A|$ внутренними состояниями такой, что конвейер K функционально эквивалентен конвейеру из двух независимых автоматов Φ_1 и Φ_2, каждый из которых изоморфен автомату Φ и отличается своим внутренним состоянием. Легко видеть, что из этого вытекает для конвейера K оценка $\mathrm{LT}\,(K) \leq 2|A|$ вместо очевидной оценки $\mathrm{LT}\,(K) \leq |A|^2$, т.е. для $|A| > 2$ оценка существенно снижается.

Построим граф развертки $R(K) = (V_R, E_R)$ конвейера K [3, 4]. Граф развертки есть граф, множество вершин которого есть множество элементарных событий конвейера (элементарное событие есть шаг автомата Ψ_i $(i = 1, 2)$ в момент t $(t = 1, 2, ...)$, который обозначается парой $\Psi_i.t$). Дуги в графе развертки суть линии передачи информации. Более того,

$$V_R = \{(\Psi_i.t) \mid i = 1, 2; \quad t = 1, 2, ...\},$$

$$E_R = \{(\Psi_i.t, \Psi_j.t+1) \mid (\Psi_i\Psi_j) \text{ есть ребро } G(K)\}.$$

Граф $R(K)$ изображен на рис.6. Легко видеть, что он имеет две компоненты связности. Эти компоненты представлены на рис. 7.

Рассмотрим теперь автомат Φ с функцией перехода $F : A^2 \to A$, где $F = f \circ f$, т.е. F изображается графом на рис. 8.

$$z_{11}^{k+1} = f\left(x^{k}, f\left(y^{k-1}, z_{11}^{k-1}\right)\right) = F\left(x^{k}, y^{k-1}, z_{11}^{k-1}\right).$$

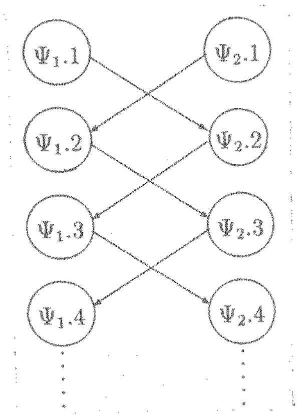

Рис. 6. Граф $R(K)$.

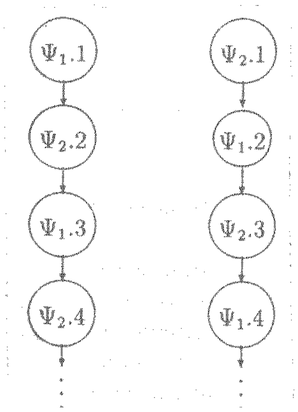

Рис. 7. Компоненты связности $R(K)$.

Внутреннее состояние Φ есть значение переменной z_{11} и следовательно, автомат Φ имеет $|A|$ состояний. Очевидно, что преобразование F может быть представлено графом на рис. 8.

Пусть заданы начальные состояния конвейера на рис. 5, т.е. значение z_{11}^0, z_{21}^0 и стабильные значения входных переменных конвейера, т.е. x^0 и y^0.

Тогда первая компонента связности $R(K)$ может быть интерпретирована как последовательность шагов автомата Φ_1, являю-

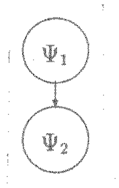

Рис. 8. Преобразование F.

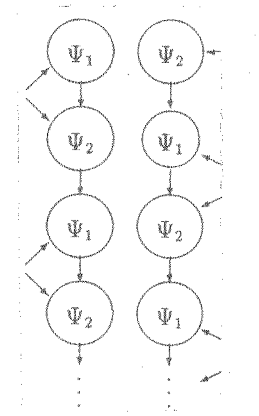

Рис. 9. Автоматы Φ_1 и Φ_2.

щегося автоматом Φ с начальным состоянием z_1^0 (рис. 9). Вторая компонента связности может быть интерпретирована как предварительный шаг для вычисления значения z_{21}^1, т.е. начального состояния для автомата Φ, а затем последовательность шагов автомата Φ_2, являющегося автоматом Φ с начальным состоянием z_{21}^1.

Очевидно, что за $2n+1$ шагов конвейер K выполняет n шагов автомата Φ_1 и одновременно n шагов автомата Φ_2, причем каждое z_{11}^{2k} $(k = 1, 2, ...)$ есть значение, вырабатываемое автоматом Φ_1, а z_{11}^{2k+1} $(k = 1, 2, ...)$ вырабатываются автоматом Φ_2. Следовательно, конвейер K стабилизируется тогда и только тогда, когда: 1) стабилизируются автоматы Φ_1 и Φ_2 и 2) их стабильные внутренние состояния совпадают. Для решения задачи стабилизации для конвейера K достаточно выполнить $|A|+1$ шаг автомата Φ_1 и

$|A|+1$ шаг автомата Φ_2 и, если они стабилизировались, сравнить их стабильные состояния. Как мы уже видели, для этого достаточно выполнить $2|A|+3$ шага конвейера. Однако очевидно, что вследствии детерминированности автомата Φ можно ограничиться $2|A|$ шагами конвейера. Легко видеть, что конвейер K стабилизируется тогда и только тогда, когда совпадают внутренние состояния конвейера на $2|A|$-ом и на $(2|A|-1)$-ом шагах.

Итак, мы показали, что для конвейера на рис. 5 существует простой условный эксперимент длины $2|A|$. □

Рассмотрим теперь декомпозицию [3,4] произвольного конвейера K, имеющего сильносвязный конвейерный граф $\overline{G}(K) = B$.

Прежде всего рассмотрим сильно связный граф $B = (V_B, E_B)$ и его развертку $R(B) = (V \times N, U)$, где $U = \{(v.t, v'.t+1) \mid v, v' \in V_B\ ,\ (v, v') \in E_B,\ t \in N\}$. Определим $k(B)$ как максимальное число классов в разбиении $V_B = V_0 \cup V_1 \cup ... \cup V_{k(B)-1}$ таком, что если $(v, v') \in E_B$ и $v \in V_i$, то $v' \in V_{i+1(mod\ k(B))}$. Число $k(B)$ называется *индексом расщепления* графа B. Очевидно, такое разбиение множества V_B единственно.

Лемма [4]. *Пусть B – сильно связный граф. Тогда множество $W_j(B) = \{v.t \mid v \in V_i(B),\ 0 \le i \le k(B)-1,\ t \equiv i+j(mod\ k(B))\}$ есть компонента связности графа развертки $R(B)$. Множество $W_j(B)$ есть бесконечный неразложимый процесс в графе B.* □

Процесс $W_j(B)$ в графе B может быть представлен в виде

$$W_j(B) = \{V_j \times \{0\}\} \cup \{V_{j+1} \times \{1\}\} \cup ... \cup \{V_{k-1} \times \{k-j-1\}\} \cup$$
$$\cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\{V_0 \times \{ik-j\}\} \cup ... \cup \{V_{k-1} \times \{ik-j+k-1\}\}\}.$$

Обозначим

$$V(i,j) = \{V_0 \times \{ik-j\}\} \cup ... \cup \{V_{k-1} \times \{ik-j+k-1\}\}.$$

Тогда

$$W_j(B) = \{V_j \times \{0\}\} \cup \{V_{j+1} \times \{1\}\} \cup ... \cup \{V_{k-1} \times \{k-j-1\}\} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} V(i,j).$$

Заметим, что каждый подграф $V(i,j)$ графа $R(B)$ изоморфен подграфу $V(1,0)$.

Если теперь предположить, что для конвейера K имеет место $G(K) = \overline{G}(K) = B$, то граф $V(1,0)$ будет описывать некоторое преобразование, совершаемое ациклической сетью автоматов, соединенных в соответствии с графом $V(1,0)$. Обозначим через F это преобразование и через Φ_B – автомат без входа, имеющий функцию перехода F. Число внутренних состояний такого автомата не превосходит $|A|^{\frac{|E_B|}{k(B)}}$. При этом процесс $W_j(B)$ $(j = 0, ..., k(B)-1)$ может быть интерпретирован так:

1. Преобразование $\{V_j \times \{0\}\} \cup \{V_{j+1} \times \{1\}\} \cup ... \cup \{V_{k-1} \times \{k-j-1\}\}$ вычисляет начальное внутреннее состояние q_j^0 для автомата Φ_B.

2. Далее функционирует автомат Φ_B, исходя из начального состояния q_j^0.

Теперь предположим, что конвейер K имеет входы, но $\overline{G}(K) = B$. Тогда граф $G = G(K)$ отличается от B только наличием входных вершин. Множество $W_j(B)$ $(j = 0, ..., k(B)-1)$ не является процессом в графе $G(K)$. Однако, замыкание $\overline{W_j}(B)$ присоединяет входные вершины к $W_j(B)$ и становится процессом в графе $G(K)$. Очевидно следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть конвейер K обладает сильно связным графом $\overline{G}(K) = B = (V_B, E_B)$. Существует автомат Φ_K со входами и с числом внутренних состояний не превосходящим $|A|^{\frac{|E_B|}{k(B)}}$ такой, что вычисления процесса $\overline{W}_j(B)$ конвейера K могут быть интерпретированы следующим образом:*

1. *Первые j шагов процесса вычисляют внутреннее состояние q_j^0 для автомата Φ_K.*

2. *Далее выполняется функционирование автомата Φ_K, начинающееся с вычисленного состояния q_j^0.* □

Рассмотрим класс конвейеров $\wp(B)$, т.е. $K \in \wp(B)$ означает $\overline{G}(K) = B = (V_B, E_B)$. Предположим, что B – сильно связный граф с индексом расщепления $k(B)$.

Утверждение 4. *Пусть B – сильно связный граф. Наименьшая верхняя граница длины стабилизационного эксперимента относительно класса конвейеров $\wp(B)$ есть*

$$\mathrm{LT}(K) \leq k(B) \cdot |A|^{\frac{|E_B|}{k(B)}} \ \square$$

3. Алгоритм стабилизационного эксперимента

Начнем с изложения алгоритма, конструирующего результат стабилизационного эксперимента для конвейера $K \in \wp(B)$, где B – сильно связный конвейерный граф. Этот алгоритм заключается в повторении шагов, моделирующих поведение конвейера, причем число этих шагов согласно утверждению 4 не превосходит $k(B) \cdot |A|^{\frac{|E_B|}{k(B)}}$.

Алгоритм стабилизационного эксперимента для конвейера $K \in \wp(B)$

Шаг 1. $y := q_0$ (начальное состояние конвейера);

$n := 0$ (счетчик числа шагов конвейера);

Шаг 2. Шаг конвейера, т.е. вычисление q – нового внутреннего состояния конвейера;

$n := n + 1$;

Шаг 3. Если $y = q$, то достигнуто стабильное состояние. Конец алгоритма.

Если $y \neq q$ и $n < k(B) \cdot |A|^{\frac{|E_B|}{k(B)}}$, то $y := q$ и возврат к шагу 2;

Шаг 4. Если $y \neq q$ и $n = k(B) \cdot |A|^{\frac{|E_B|}{k(B)}}$, то стабилизация конвейера не может быть достигнута. Конец алгоритма. □

Рассмотрим теперь произвольный конвейерный граф G и класс конвейеров $\wp(G)$. Конвейер $K \in \wp(G)$ можно рассматривать как ациклическую сеть автоматов со структурой $\overline{G}^*(K) = G^*$. Автоматами этой сети будут подконвейеры, соответствующие бикомпонентам графа G. Подконвейер, соответствующий бикомпоненте B, будем далее обозначать той же буквой B.

Пусть B – вершина графа G^*. Как следует из утверждения 2, длине стабилизационного эксперимента для пустой (т.е. состоящей из единственной вершины и не имеющей дуг) бикомпоненты B равна 1. Для непустой бикомпоненты B, имеющей V_B вершин, согласно утверждению 4, длина стабилизационного эксперимента $\mathrm{LT}(B) \leq k(B)|A|^{\frac{\sum_{i=1}^{|V_B|} m_i}{k(B)}}$. Подчеркнем, что эти оценки зависят только от бикомпоненты B, т.е. от графа G и одинаковы для всего класса $\wp(G)$. Припишем веса $\mathrm{LT}(B)$ вершинам B графа G^*. Если

B – пустая бикомпонента, положим $l(B)=1$. Если B – непустая бикомпонента, то $l(B)=k(B)\cdot|A|^{\frac{\sum_{i=1}^{|V_B|} m_i}{k(B)}}$. Тогда из утверждения 1 следует

Утверждение 5. *Наименьшая верхняя оценка длины стабилизационного эксперимента относительно класса конвейеров $\wp(G)$ равна максимальной длине пути во взвешенном графе G^*.* $\square$

Рассмотрим теперь алгоритм стабилизационного эксперимента для произвольного конвейера $K\in\wp(G)$. Предполагаем, что каждой бикомпоненте B графа G сопоставлен вес $l(B)$. Стабилизационный эксперимент заключается в выполнении последовательности шагов конвейера и сравнений каждой пары последовательных значений. Вместе с тем используется вес $l(B)$ для прекращения эксперимента, если B – нестабильная бикомпонента.

Пусть B – произвольная вершина графа G^*. Легко видеть, что прежде чем решать задачу стабилизации для B нужно убедиться в стабильности всех бикомпонент B', предшествующих B. Лишь после стабилизации всех предшествующих бикомпонент может начаться эксперимент для B.

В процессе выполнения шагов конвейера K динамически определяется момент начала эксперимента для B. Будем говорить, что начиная с этого шага и до установления факта стабилизации, бикомпонента B находится *в состоянии тестирования*. Как уже говорилось, B может находиться в этом состоянии не более чем $k(B)\,|A|^{\frac{\sum_{i=1}^{|V_B|} m_i}{k(B)}}$ шагов. Введем в рассмотрение параметр $\sigma(B)$, который будем употреблять при изложении алгоритма.

$$\sigma(B)=\begin{cases}1, & \text{если эксперимент для } B \text{ еще не начат;}\\ 2, & \text{если } B \text{ находится в состоянии тестирования;}\\ 3, & \text{если стабильность } B \text{ установлена.}\end{cases}$$

Далее будем пользоваться следующим обозначением. Если q – внутреннее состояние конвейера, то q_B – внутреннее состояние бикомпоненты B при состоянии конвейера q.

Алгоритм стабилизационного эксперимента для произвольного конвейера

Шаг 1. $y := q_0$ (начальное состояние конвейера).

Просмотр всех вершин B графа G^*, различая следующие случаи:

1) если B не имеет предшественников, то $\sigma(B) := 2$; (т.е. все такие вершины приводятся в состояние тестирования); $n(B) := 0$; (счетчик числа шагов тестирования);
2) если B имеет предшественников, то $\sigma(B) := 1$ (тестирование еще не начато);

Шаг 2. Очередной шаг конвейера, т.е. вычисление q – нового состояния конвейера (или, что то же самое, нового выхода);

Шаг 3. Если $y = q$, то стабилизация достигнута. Конец алгоритма.

Шаг 4. Если $y \neq q$, то для каждой B рассмотреть следующие случаи:

1. Если $\sigma(B) = 2$ и B-пустая,то $\sigma(B) := 3$;
2. Если $\sigma(B) = 2$, B-непустая и $y_B = q_B$, то $\sigma(B) := 3$;
3. Если $\sigma(B) = 2$, B-непустая и $y_B \neq q_B$ и $l(B) = n(B)$, то стабильности нет. Конец алгоритма.
4. Если $\sigma(B) = 2$, B-непустая, $q_B \neq y_B$ и $n(B) < l(B)$, то $n(B) := n(B) + 1$;

Шаг 5. Просмотр всех бикомпонент B таких, что $\sigma(B) = 1$. Если для B имеет место $\sigma(B) = 1$ и все ее предшественники B' в графе G^* имеют $\sigma(B') = 3$, то для такой бикопоненты положим $\sigma(B) = 2$ и $n(B) := 0$ (начать тестирование B);

Шаг 6. Если существуют бикомпоненты, для которых $\sigma(B) = 2$, то $y := q$ и перейти к шагу 2. В противном случае стабилизация достигнута. Конец алгоритма. □

Литература

1. H. T. Kung., *The structure of parallel algorithms.* — Adv. Comp. Acad. Press **19** (1980), 65–112.
2. В. Б. Кудрявцев, С. В. Алешин, А. С. Подколзин, *Введение в теорию автоматов.* М, Наука.
3. K. V. Shakhbazjan, *On the representation of processes in graphs.* — Soviet Math. Dokl. **10**, No. **2** (1990).
4. К. В. Шахбазян, *Об алгебре процессов в графах.* — Кибернетика **6** (1998), 38–42.

Shakhbazyan K. V. The stabilization test for pipelines.

This paper considers the stabilization problem for pipelines. A pipeline is a network of functional units with one-pulse delay. The least upper bound for the length of the stabilization test, valid for a class of isomorphic pipelines, is obtained. An algorithm for constructing the result of the stabilization test is presented.

Институт информатики АН
Армения

Поступило 2 декабря 1996 г.