Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 248, 1998 г.

М. Н. Яковлев

НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ, И РАЗРЕШИМОСТЬ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается существование и дифференцируемость неявных функций, определяемых уравнениями вида $Tx + F(\lambda, x) = 0$, где T – неограниченный оператор и разрешимость операторных уравнений вида $Tx + f(x) = 0$ в случае как замкнутого, так и не обладающего этим свойством оператора T.

Пусть Λ, X и Y – пространства Банаха. Пусть $U \subset \Lambda$, $V \subset X$ окрестности точек $\lambda_0 \in \Lambda$ и $x_0 \in X$ соответственно. Пусть $F : U \times V \to Y$. Пусть T – аддитивный и однородный оператор с областью определения $D(T) \subset X$ и областью значений $R(T) \subset Y$. Пусть $x_0 \in D(T)$.

Теорема 1. *Пусть*

1) $F(\lambda, x)$ *непрерывен в точке* (λ_0, x_0);

2) $Tx_0 + F(\lambda_0, x_0) = 0$;

3) *существует частная производная* $F'_x(\lambda, x)$ *в* $U \times V$;

4) *оператор* $F'_x(\lambda, x)$ *непрерывен в точке* (λ_0, x_0);

5) *существует обратный к оператору* $T + F'_x(\lambda_0, x_0)$ *оператор* $[T + F'_x(\lambda_0, x_0)]^{-1}$;

6) *оператор* $[T+F'_x(\lambda_0, x_0)]^{-1}$ *определен на всем* Y *и ограничен как оператор из* Y *в* X.

Тогда существует оператор $x(\lambda)$, *определенный в некоторой окрестности* $\Omega \subset \Lambda$ *точки* λ_0, *переводящий* Ω *в* $x(\Omega) \subset D(T)$ *и обладающий свойствами*

а) $Tx(\lambda) + F(\lambda, x(\lambda)) = 0$ *при* $\lambda \in \Omega$;

в) $x(\lambda_0) = x_0$;

c) $x(\lambda)$ *непрерывен в точке* λ_0.

Оператор $x(\lambda)$ определяется свойствами (a)–(c) *однозначно в том смысле, что если $x_1(\lambda)$ – другой оператор, обладающий свойствами* (a)–(c)*, то существует такое $\eta > 0$, что для $\|\lambda_0 - \lambda\| < \eta$*

$$x_1(\lambda) = x(\lambda).$$

Доказательство. Положим

$$A(\lambda, x) \equiv [T + F'_x(\lambda_0, x_0)]^{-1}[F'_x(\lambda_0, x_0)x - F(\lambda, x)]$$

и рассмотрим уравнение

$$x = A(\lambda, x).$$

Поскольку

$$A'_x(\lambda_0, x_0) = 0$$

в силу непрерывности оператора $F'_x(\lambda, x)$ в точке (λ_0, x_0) существует число $k \in (0,1)$ такое, что для некоторых $r > 0$ и $R > 0$ и всех (λ, x) таких, что $\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant r$, $\|x - x_0\| \leqslant R$ имеет место неравенство

$$\|A'_x(\lambda, x)\| \leqslant k < 1.$$

Отсюда

$$\|A(\lambda, x) - A(\lambda, z)\| \leqslant$$

$$\leqslant k\|x - z\|, (\lambda, x), (\lambda, z) \in S(\lambda_0, r) \times S(x_0, R) \subset U \times V.$$

Далее

$$\|A(\lambda, x_0) - x_0\| = \left\| [T + F'(\lambda_0, x_0)]^{-1} [Tx_0 + F(\lambda, x_0)] \right\|$$

и в силу непрерывности оператора $F(\lambda, x_0)$ по λ найдется такое число $\delta > 0$, $\delta < r$, что

$$\|A(\lambda, x_0) - x_0\| < (1 - k)R$$

при $\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant \delta$. На основании принципа сжатых отображений отсюда для каждого $\lambda \in S(\lambda_0, \delta)$ существует $x(\lambda)$ такой, что

$$x(\lambda) = A(\lambda, x(\lambda)),$$

т.е.

$$[T + F'_x(\lambda_0, x_0)]\, x(\lambda) = F'_x(\lambda_0, x_0)x(\lambda) - F(\lambda, x(\lambda)).$$

Поскольку $D(T) = D(T + F'_x(\lambda_0, x_0))$, получим

$$Tx(\lambda) + F'_x(\lambda_0, x_0)x(\lambda) = F'_x(\lambda_0, x_0)x(\lambda) - F(\lambda, x(\lambda)),$$

т.е.

$$Tx(\lambda) + F(\lambda, x(\lambda)) = 0.$$

В силу принципа сжатых отображений $x(\lambda_0) = x_0$. Поскольку

$$0 = x(\lambda) - A(\lambda, x(\lambda)) = x_0 - A(\lambda_0, x_0),$$

имеем

$$x(\lambda) - x_0 = A(\lambda, x(\lambda)) - A(\lambda, x_0) + A(\lambda, x_0) - A(\lambda_0, x_0).$$

Отсюда

$$\|x(\lambda) - x_0\| \leqslant k\|x(\lambda) - x_0\| + \|A(\lambda, x_0) - A(\lambda_0, x_0)\|,$$

т.е.

$$\|x(\lambda) - x_0\| \leqslant \frac{1}{1-k}\|A(\lambda, x_0) - A(\lambda_0, x_0)\|.$$

В силу непрерывности по λ оператора $A(\lambda, x)$ получаем непрерывность оператора $x(\lambda)$ в точке λ_0. Остается доказать единственность $x(\lambda)$. Пусть $x_1(\lambda)$ другое решение. В силу непрерывности $x_1(\lambda)$ в точке λ_0 и равенства $x_1(\lambda_0) = x_0$ при достаточно малом $\|\lambda - \lambda_0\|$ мы оказываемся в условиях применимости принципа сжатых отображений, который гарантирует единственность решений.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того в* $U \times V$ *существует частная производная* $F_\lambda(\lambda, x)$, *тогда* $x(\lambda)$ *дифференцируем в точке* λ_0, *причем*

$$x'(\lambda_0) = -[T + F'_x(\lambda_0, x_0)]^{-1}\, F'_\lambda(\lambda_0, x_0).$$

Доказательство. Имеем

$$x(\lambda) - x_0 + [T + F'_x(\lambda_0, x_0)]^{-1}\, F'_\lambda(\lambda_0, x_0)(\lambda - \lambda_0)$$
$$= [T + F'_x(\lambda_0, x_0)]^{-1}\, [Tx(\lambda) - Tx_0 + F'_x(\lambda_0, x_0)\big(x(\lambda) - x(\lambda_0)\big)$$
$$+F'_\lambda(\lambda_0, x_0)(\lambda - \lambda_0)] = [T + F'_x(\lambda_0, x_0)]^{-1}\, [F(\lambda_0, x_0) - F(\lambda, x(\lambda)) +$$
$$+F'_x(\lambda_0, x_0)(x(\lambda) - x(\lambda_0)) + F'_x(\lambda_0, x_0)(\lambda - \lambda_0)].$$

Отсюда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, при достаточно малой норме $\|\lambda - \lambda_0\|$ получим

$$\big\|x(\lambda) - x(\lambda_0) + [T + F'_x(\lambda_0, x_0)]^{-1}\, F'_\lambda(\lambda_0, x_0)(\lambda - \lambda_0)\big\| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\big(\|\lambda - \lambda_0\| + \big\|x(\lambda) - x(\lambda_0) + [T + F'_x(\lambda_0, x_0)]^{-1}\, F'_\lambda(\lambda_0, x_0)(\lambda - \lambda_0)\big\| +$$

$$+ \big\|\, [T + F'_x(\lambda_0, x_0)]^{-1}\, F'_\lambda(\lambda_0, x_0)\big\|\, \|\lambda - \lambda_0\|$$

что и позволяет закончить доказательство теоремы.

Теорема 3. *Пусть*

1. T *– аддитивный и однородный оператор с областью определения* $D(T) \subset X$, $u_0 \in D(T)$.
2. $f(x)$ *– оператор из* X *в* Y *непрерывно дифференцируемый по Фреше при всех* $x \in X$.
3. *При всех* $x \in X$ *существует линейный, ограниченный, определенный на всем* Y *оператор* $[T + f'(x)]^{-1}$.
4. $$\|[T + f'(x)]^{-1}\| \leqslant \Gamma < +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in X. \qquad (1)$$
5. *Оператор* $f'(x)$ *равномерно непрерывен при* $\|x - u_0\| \leqslant 2\Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|$

Тогда существует решение u^* *уравнения*

$$Tx + f(x) = 0. \qquad (2)$$

При этом

$$\|u_0 - u^*\| \leqslant \Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|. \qquad (3)$$

Доказательство. Положим

$$Tx + F(\lambda, x) = f(x) + (\lambda - 1)(Tu_0 + f(u_0)) + Tx = 0, \qquad (4)$$

$$U = (-\infty, +\infty), \quad x_0 = u_0, \quad \lambda_0 = 0 \quad V = X.$$

Тогда для уравнения (4) выполнены все условия теорем 1 и 2 и потому для $0 \leqslant \lambda < \omega$ существует решение $x(\lambda)$ уравнения (4). Более того, если $x(\lambda)$ любое решение уравнения (4), для которого $x(0) = u_0$, для него при $\lambda_0 = \lambda$, $x_0 = x(\lambda)$ тоже выполнены условия теорем 1 и 2 и потому по теореме 2

$$\frac{dx}{d\lambda}(\lambda) = -[T + f'(x(\lambda))]^{-1}\, [Tu_0 + f(u_0)].$$

Отсюда

$$\left\| \frac{dx}{d\lambda}(\lambda) \right\| \leqslant \Gamma \|Tu_0 + f(u_0)\|$$

и

$$\|x(\lambda) - u_0\| \leqslant |\lambda|\,\Gamma \|Tu_0 + f(u_0)\|$$

для любых возможных решений уравнения (4), удовлетворяющих условию $x(0) = u_0$ и множество таких решений непусто. Очевидно, $x(1)$ является решением уравнения (2). Поэтому будем искать решение при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Положим

$$A(\lambda, x) = [T + f'(u_0)]^{-1} \left[f'(u_0)x - f(x) - (\lambda - 1)\,[Tu_0 + f(u_0)] \right]. \quad (5)$$

Имеем

$$A'_x(\lambda, x) = [T + f'(u_0)]^{-1}\,[f'(u_0) - f'(x)], \quad A'_x(\lambda, u_0) = 0. \quad (6)$$

Пусть число q таково, что $0 < q < 1$. Выберем число $R > 0$ так, чтобы $R \leqslant \Gamma \|Tu_0 + f(u_0)\|$ и

$$\|f'(v) - f'(w)\| < q/\Gamma$$

при всех $\|v - w\| \leqslant R$, v, $w \in S(u_0, 2\Gamma \|Tu_0 + f(u_0)\|)$. Тогда $\|A'_x(\lambda, x)\| < q < 1$ при $x \in S(u_0, R)$. Далее

$$\|A(\lambda, u_0) - u_0\| \leqslant \Gamma \| -Tu_0 - f(u_0) - (\lambda - 1)(Tu_0 + f(u_0))\| =$$
$$= \Gamma |\lambda|\, \|Tu_0 + f(u_0)\|.$$

Для

$$|\lambda| \leqslant \frac{1}{2}\, \frac{(1-q)R}{\Gamma \|Tu_0 + f(u_0)\|}$$

будет

$$\|A(\lambda, u_0) - u_0\| < (1-q)R$$

что обеспечивает применимость теоремы о сжатых отображениях и, следовательно, при

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}\, \frac{(1-q)R}{\Gamma \|Tu_0 + f(u_0)\|}$$

существование решения $x(\lambda)$ уравнения (4).

Обозначим

$$\lambda_1 \equiv \frac{1}{2}\, \frac{(1-q)R}{\Gamma \|Tu_0 + f(u_0)\|}, \quad x_1 \equiv x\Big(\frac{1}{2}\, \frac{(1-q)R}{\Gamma \|Tu_0 + f(u_0)\|}\Big). \quad (7)$$

Тогда (λ_1, x_1) удовлетворяет уравнению (4) и может быть взята за начальную при построении решения вправо от λ_1.

Положим

$$B(\lambda, x) = [T + f'(x_1)]^{-1}\left[f'(x_1)x - f(x) - (\lambda - 1)[Tu_0 + f(u_0)]\right] \quad (8)$$

и будем искать решение $x(\lambda)$ уравнения

$$x = B(\lambda, x) \quad (9)$$

в шаре $S(x_1, R)$.

Поскольку

$$\|x_1 - u_0\| \leqslant \Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|,$$

то из

$$\|x - x_1\| \leqslant \Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|$$

следует

$$\|x - u_0\| \leqslant 2\Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|,$$

т.е.

$$S\big(x_1, \Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|\big) \subseteq S\big(u_0, 2\Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|\big).$$

Имеем

$$\|B'_x(\lambda, x)\| < q < 1 \quad \text{при} \quad \|x_1 - x\| \leqslant R$$

$$\|B(\lambda, x_1) - x_1\| \leqslant \Gamma\left\| -Tx_1 - f(x_1) - (\lambda - 1)(Tu_0 + f(u_0))\right\| =$$

$$= \Gamma\left\|(\lambda_1 - 1)(Tu_0 + f(u_0)) - (\lambda - 1)(Tu_0 + f(u_0))\right\| = |\lambda - \lambda_1|\,\|Tu_0 + f(u_0)\|\Gamma$$

и если

$$|\lambda_1 - \lambda| \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{(1-q)R}{\Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|}$$

выполнены все условия теоремы о сжатых отображениях в шаре $S(x_1, R)$ и потому решение уравнения (4) существует при $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant 2\lambda_1$. Аналогично, если уже доказано существование решения при $(n-1)\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant n\lambda_1$, доказывается существование решения $x(\lambda)$ уравнения (4) при $n\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant (n+1)\lambda_1$. В самом деле, возьмем в качестве начальной точки точку (t, p) положив $t \equiv n\lambda_1$, $p \equiv x(n\lambda_1)$ и положим

$$D(\lambda, x) \equiv \left[T + f'(p)\right]^{-1}\left[f'(p)x - f(x) - (\lambda - 1)[Tu_0 + f(u_0)]\right]$$

и будем решать уравнение $x = D(\lambda, x)$ в шаре $S(p, \Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|)$ как и раньше

$$S\big(p, \Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|\big) \subseteq S\big(u_0, 2\Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|\big)$$

$$\|D'_x(\lambda, x)\| < q < 1 \quad \text{при} \quad \|x - p\| \leqslant R$$

$$\|D(\lambda, p) - p\| \leqslant \Gamma\| - Tp - f(p) - (\lambda - 1)(Tu_0 + f(u_0)\| =$$
$$= |\lambda - t|\Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|$$

и тем самым в силу теоремы о сжимающих отображениях для шара $S(p, R)$ решение $x(\lambda)$ уравнения (4) существует для всех λ таких, что $|\lambda - t| \leqslant \lambda_1$ и тем самым для $0 \leqslant \lambda \leqslant (n + 1)\lambda_1$. Если $(1 + n)\lambda_1 \geqslant 1$ теорема доказана. Если же $(n + 1)\lambda_1 < 1$. процесс можно продолжить и за конечное число шагов дойти до $\lambda = 1$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть*

1. *T – аддитивный и однородный замкнутый оператор с областью определения $D(T) \subset X$ и областью значений $R(T) \subset Y$, $u_0 \in D(T)$;*
2. *$f(x)$ – оператор из X в Y непрерывно дифференцируемый по Фреше при всех $x \in X$;*
3. *при всех $x \in X$ существует линейный, ограниченный, определенный на всем Y оператор $[T + f'(x)]^{-1}$*
4. $$\|[T + f'(x)]^{-1}\| \leqslant \Gamma < +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{10}$$

Тогда существует решение u^* уравнения $Tx + f(x) = 0$. При этом

$$\|u^* - u_0\| \leqslant \Gamma\|Tu_0 + f(u_0)\|. \tag{11}$$

Доказательство. Рассмотрим опять уравнение (4). Если решение $x(\lambda)$ существует при всех $\lambda \in [0, 1]$ (при $\lambda = 0$ решением является $x(0) = u_0$), то полагая $u^* = x(1)$, получим

$$Tu^* + f(u^*) = Tx(1) + f(x(1)) = Tx(1) + f(x(1)) + (1 - 1)[Tu_0 + f(u_0)] = 0.$$

По теореме 1 $x(\lambda)$ существует при $0 \leqslant \lambda < \omega$. Рассмотрим совокупность промежутков $0 \leqslant \lambda < \omega$, для который существует решение $x(\lambda)$ уравнения (4). Положим $\Delta = \sup \omega$. Если $\Delta > 1$

теорема доказана. Пусть $\Delta \leqslant 1$. Тогда решение можно считать определенным при $0 \leqslant \lambda < \Delta$. Поскольку

$$\left\| \frac{dx}{d\lambda}(\lambda) \right\| \leqslant \Gamma \| T u_0 + f(u_0) \|,$$

$$\| x(\lambda) - u_0 \| \leqslant \Gamma \| T u_0 + f(u_0) \| \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \lambda < \Delta$$

существует $\lim\limits_{\lambda \to \Delta} x(\lambda) = p$. Далее, поскольку

$$T x(\lambda) = -f(x(\lambda)) - (\lambda - 1)[T u_0 + f(u_0)]$$

существует $\lim\limits_{\lambda \to \Delta} T x(\lambda) = -f(p) - (\Delta - 1)[T u_0 + f(u_0)]$. При этом $x(\lambda) \in D(T)$ по теореме 1. В силу замкнутости оператора T отсюда следует, что $p \in D(T)$ и

$$T p = -f(p) - (\Delta - 1)[T u_0 + f(u_0)],$$

т.е. точка (Δ, p) удовлетворяет уравнению (4) и может быть взята в качестве точки (λ_0, x_0) в теореме 1. По теореме 1 решение $x(\lambda)$ существует при $\Delta \leqslant \lambda < \delta$ при некотором $\delta > 0$, что противоречит сделанному предположению о том, что $\Delta = \sup \omega$ и $\Delta \leqslant 1$. Поэтому $\Delta > 1$ и теорема доказана.

Замечание. Условие 4 теоремы 4 использовалось только для доказательства оценок

$$\left\| \frac{dx}{d\lambda}(\lambda) \right\| \leqslant \Gamma \| T u_0 + f(u_0) \| \leqslant c < +\infty \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \lambda < \Delta$$

$$\| x(\lambda) - u_0 \| \leqslant \Gamma \| T u_0 + f(u_0) \| \leqslant c_1 < +\infty \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \lambda < \Delta,$$

поэтому условие 4 теоремы 4 можно заменить на условие

$$\| [T + f'(x)]^{-1} \| \leqslant A + B \| x \| \quad \text{для всех} \quad x \in X,$$

которое также обеспечивает выполнение оценок

$$\left\| \frac{dx}{d\lambda}(\lambda) \right\| \leqslant c_2 < +\infty, \quad \| x(\lambda) \| \leqslant c_3 < +\infty \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \lambda < \Delta$$

и, следовательно, заключения теоремы 4 о существовании решения u^* уравнения (2).

Yakovlev M. N. Implicit functions determined by equations with unbounded operators and the solvability of operator equations.

For implicit functions determined by the equation $Tx + F(\lambda, x) = 0$, where T is an unbounded operator, existence and differentiability conditions are established. Applications concerning the solvability conditions for equations of the form $Tx + f(x) = 0$ are considered.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 13 ноября 1997 г.