Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 248, 1998 г.

М. Н. Яковлев

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОНУСЕ ПРОСТРАНСТВА БАНАХА

Пусть X – вещественное пространство Банаха с конусом $K \subset X$. При решении уравнения

$$Tx + F(x) = 0, \quad x \in X, \tag{1}$$

часто оказывается, что оператор $[T + F'(u)]^{-1}$ существует только при $u \in K$. В работе приведены условия разрешимости уравнения (1) в таком случае. Дается применение к разрешимости краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Лемма 1. *Пусть K – конус в B-пространстве E. Пусть*

1. *$f(u)$ – непрерывный оператор из K в K такой, что $f(K)$ ограничено в E, т.е.*

$$\|f(u)\| \leqslant M \quad \text{при} \quad u \in K.$$

2. *Для любых v, $w \in K \cap S(0, M)$ верно неравенство*

$$\|f(v) - f(w)\| \leqslant L\|v - w\|, \quad L < +\infty.$$

Тогда интегральное уравнение

$$u(t) = \int_0^t f(u(s))ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{2}$$

имеет решение $p(t) \in K \cap S(0, M)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Доказательство. В пространстве непрерывных функций $C([0,1], E)$, определенных на отрезке $[0,1]$ со значениями в B-пространстве E рассмотрим замкнутое множество Q функций со значениями в K и нормами, ограниченными числом M, и нормой $\|p(t)\|_c = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1}(\|p(t)\|_E \, e^{-Lt})$. На множестве Q рассмотрим оператор

$$\Phi(z) \equiv \int_0^t f(z(s))ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Имеем

$$\Phi(Q) \subseteq Q,$$

$$\|\Phi(v(t)) - \Phi(w(t))\|_c = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left(\left\|\int\limits_0^t [f(v(s)) - f(w(s))]ds\right\| e^{-Lt}\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1 - e^{-L}) \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\left(\|v(t) - w(t)\| e^{-Lt}\right).$$

Поскольку $1 - e^{-L} < 1$, для оператора $\Phi(u)$ на множестве Q банахова пространства $C([0,1],E)$ выполнены все условия теоремы о сжатых отображениях и потому существует решение уравнения (2), принадлежащее множеству Q.

Теорема 1. *Пусть*

1. *T – аддитивный и однородный оператор с областью определения $D(T) \subset X$ и областью значений $R(T) \subset Y$. Здесь X и Y вещественные банаховы пространства.*
2. *$F(x)$ – оператор из X в Y.*
3. *$F(x)$ непрерывно дифференцируем по Фреше в каждой точке конуса $K \subset X$.*
4. *Существует линейный ограниченный, определенный на всем Y оператор $[T + F'(u)]^{-1}$ при каждом $u \in K$.*
5. *$\| [T + F'(u)]^{-1}\| \leqslant \Gamma < +\infty$ при всех $u \in K$.* (3)
6. *$-[T + F'(u)]^{-1} F(0) \in K$ при всех $u \in K$.* (4)
7. *$\|F'(v) - F'(w)\| \leqslant A\|v - w\|$, $A < +\infty$,* (5)
   при всех v, $w \in K \cap S(0, \Gamma\|F(0)\|)$.

Тогда существует решение $u^* \in K \cap S(0, \Gamma\|F(0)\|)$ уравнения $Tu + F(u) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$u(t) = -\int\limits_0^t \left[T + F'(u(s))\right]^{-1} F(0)\, ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{6}$$

в пространстве функций $u(t) \in C([0,1],X)$ и применим лемму 1. Полагая $L = \Gamma^2 A$, $M = \Gamma\|F(0)\|$ получаем существование решения $u(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Очевидно, это решение удовлетворяет уравнению

$$Tu(t) + F(u(t)) + (t-1)F(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{7}$$

и остается положить $u^* = u(1)$.

Для установления существования и положительности обратного оператора будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть X – вещественное банахово пространство с конусом K. Пусть*

1. *A, B, C – линейные операторы из X в банахово пространство Y $C = A - B$.*
2. *Существует оператор $A^{-1} \geqslant 0$.*
3. *$A^{-1}B \geqslant 0$ и $\|A^{-1}B\| < 1$.*

Тогда существует оператор C^{-1} и $C^{-1} \geqslant 0$.

Доказательство. В самом деле,

$$C^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{+\infty}\left[A^{-1}B\right]^i\right)A^{-1}, \quad \|C^{-1}\| \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}B\|}.$$

Рассмотрим краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$-u_i'' + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(t)u_j = f_i(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

$$\alpha_i u_i(0) - \beta_i u_i'(0) = 0, \quad \gamma_i u_i(1) + \delta_i u_i(1) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Здесь $b_{ij}(t)$ – непрерывные при $0 \leqslant t \leqslant 1$ функциии, $b_{ij}(t) \leqslant 0$ при $i \neq j$, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \geqslant 0$, $\alpha_i + \gamma_i > 0$, $\alpha_i + \beta_i > 0$, $\gamma_i + \delta_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Лемма 3. *Пусть $g_i(t,s)$ функция Грина оператора $L_i u \equiv -u_t'' + b_{ii}^+(t)u$, $b_{ii}^+(t) = \max\left\{0, b_{ii}(t)\right\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, с краевыми условиями $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i \geqslant 0$, $\alpha_i + \gamma_i > 0$, $\alpha_i u(0) - \beta_i u'(0) = 0$, $\gamma_i u(1) + \delta_i u'(1) = 0$, $\alpha_i + \beta_i > 0$, $\gamma_i + \delta_i > 0$, и выполнены неравенства*

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 g_i(t,s)\left[b_{ii}^-(s) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{w} b_{ij}(s)\right]ds < 1, \tag{10}$$
$$(i = 1, \ldots, n), \quad -b_{ii}^-(t) = \min\left\{0, b_{ii}(t)\right\}.$$

Тогда оператор L, стоящий в левой части системы уравнений (8) с краевыми условиями (9), обратим и обратный оператор $L^{-1} \geqslant 0$ как оператор в пространстве вектор-функций $C_n([0,1])$. Здесь область определения $D(L) = \big\{u(t) \in C_n^{(2)}([0,1])$, $u(t)$ удовлетворяет краевым условиям (9)$\big\}$.

Доказательство. Применим лемму 2, положив $A = \big\{L_i\big\}_{i=1}^n$, B определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} b_{11}^-(t), & -b_{12}(t) & ,\dots, & -b_{1n}(t) \\ -b_{21}(t), & b_{22}^-(t) & ,\dots, & -b_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{n1}(t), & -b_{n2}(t) & ,\dots, & b_{nn}^-(t) \end{pmatrix}$$

и используем оценку для нормы интегрального оператора из $C_n([0,1])$ в $C_n([0,1])$.

Теорема 2. *Пусть $f_i(t, u_1, \dots, u_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ функции, определенные при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $-\infty < u_i < +\infty$ $(i = 1, \dots, n)$ и дважды непрерывно дифференцируемые по u_i при $0 \leqslant u_i < +\infty$. Пусть $f_i(t, 0, \dots, 0) \leqslant 0$,*

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(t, u_1, \dots, u_n) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant u_i < +\infty.$$

Пусть, далее, при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant u_i < +\infty$ $(i = 1, \dots, n)$

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 K_i(t,s) \Bigg[\bigg(\frac{\partial f_i}{\partial u_i}(s, u_1, \dots, u_n) \bigg)^- - \\ - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{w} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(s, u_1, \dots, u_n) \Bigg] ds \leqslant \Delta < 1. \tag{11}$$

Здесь $K_i(t,s)$ функции Грина операторов $M_i u = -u''$, $\alpha_i u(0) - \beta_i u'(1) = 0$, $\gamma_i u(1) + \delta_i u'(1) = 0$. Тогда краевая задача

$$-u_i'' + f_i(t, u_1, \dots, u_n) = 0 \quad (i = 1, \dots, n), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{12}$$

$$\alpha_i u_i(0) - \beta_i u_i'(0) = 0, \quad \gamma_i u_i(1) + \delta_i u_i'(1) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{13}$$

имеет и притом единственное неотрицательное решение $u_i(t) \geqslant 0$ $(i = 1, \dots, n)$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 4. *Имеют место неравенства*

$$g_i(t,s) \leqslant K_i(t,s) \quad \textit{при} \quad 0 \leqslant t,s \leqslant 1.$$

Доказательство. Рассмотрим краевые задачи

$$-u'' + b_{ii}^{+}(t)u = f(t) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad -w'' = f(t) \geqslant 0$$

при краевых условиях

$$\alpha_i u(0) - \beta_i u'(0) = 0, \quad \gamma_i u(1) + \delta_i u'(1) = 0,$$

$$\alpha_i w(0) - \beta_i w'(0) = 0, \quad \gamma_i w(1) + \delta_i w'(1) = 0.$$

Тогда

$$-(w-u)'' + b_{ii}^{+}(t)(w-u) = b_{ii}^{+} w \geqslant 0,$$

$$\alpha_i(w-u)(0) - \beta_i(w-u)'(0) = \gamma, \quad (w-u)(1) + \delta_i(w-u)(1) = 0,$$

и значит $w(t) - u(t) \geqslant 0$.

Доказательство теоремы 2. Применим теорему 1, положив $X = C_n([0,1]) = Y$, $Tu = -u''$,

$$D(T) = \big\{u(t) \in C_n^{(2)}([0,1]),\ \alpha_i u_i(0) - \beta_i u_i'(0) = 0 = \gamma_i u_i(1) + \delta_i u_i'(1)\big\},$$

$$F(u) = \big\{f_i(t, u_1, \dots, u_n)\big\}_{i=1}^{n},$$

$$K = \big\{u(t) \in C_n([0,1]),$$

$$u_i(t) \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad i = 1, \dots, n\big\}.$$

В силу леммы 2 $-[T + F'(u)]^{-1} F(0) \geqslant 0$ и

$$\|\,[T + F'(u)]^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\Delta} \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \int_0^1 K_i(t,s)ds.$$

В силу теоремы 1 существует решение $u(t) \geqslant 0$. Разность двух возможных неотрицательных решений $v(t)$ и $w(t)$ $z(t) = v(t) - w(t)$ удовлетворяет линейной системе

$$-z_i'' + \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(t, v_1 + s(w_1 - v_1), \dots, v_n + s(w_n - v_n))ds z_j = 0,$$

$$\alpha_i\, z_i(0) - \beta_i\, z_i'(0) = 0, \quad \gamma_i\, z_i(1) + \delta_i\, z'(1) = 0,$$

и в силу леммы 3 $z(t) \equiv 0$. Единственность также доказана в силу неравенства (11).

Yakovlev M. N. Solvability of nonlinear equations in a cone of a Banach space.

The solvability conditions for the equation $Tu + F(u) = 0$ are found in the case where the operator $[T + F'(u)]^{-1}$ exists only for $u \in K$, where K is a cone in the Banach space X. An application concerning the solvability of boundary-value problems for a system of second-order differential equations is provided.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 15 февраля 1997 г.