Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 248, 1998 г.

М. Н. Яковлев

РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПРИ НАЛИЧИИ (β, γ, δ)-ПАР СРАВНЕНИЯ

Пусть β, γ, $\delta \in R^n$ с элементами $\beta_j \in \{-1, 1\}$, $\gamma_j \in \{0, 1\}$, $\delta_j \in \{0, 1\}$ $(j = 1, \dots, n)$. Назовем (β, γ, δ)-парой сравнения периодической краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1, \dots, u_n), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad (i = 1, \dots, n)$$

с краевыми условиями

$$u_i(0) = u_i(1) \quad (i = 1, \dots, n),$$

пару векторов v, $w \in R^n$, $v \leqslant w$ таких, что

$$\beta_i \gamma_i \Big[f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \dots, u_n) - \frac{dv_i}{dt} \Big] =$$

$$= \beta_i \gamma_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, v_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \leqslant 0$$

$$\beta_i \delta_i \Big[f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, w_i, u_{i+1}, \dots, u_n) - \frac{dw_i}{dt} \Big] =$$

$$= \beta_i \delta_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, w_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \geqslant 0$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_j\, u_j \geqslant v_j$, $\delta_j\, u_j \leqslant w_j$ $(j = 1, \dots, n)$ $(i = 1, \dots, n)$. Наличие нетривиальной пары сравнения позволяет ослабить условия теорем существования. При доказательстве используется приводимая ниже теорема о неподвижной точке.

Теорема о неподвижной точке. *Пусть T непустое замкнутое выпуклое множество в банаховом пространстве H такое, что если $\lambda \in [0, 1]$ и $v \in T$, то $\lambda v \in T$. Пусть множество $T \cap S(0, r)$ – непусто. Здесь $S(0, r)$ – замкнутый шар в пространстве H. Пусть оператор $A(v)$ действует из $T \cap S(0, r)$ в T, т.е. $A(T \cap S(0, r)) \subseteq T$,* *и вполне непрерывен. Пусть, далее для всех* $\lambda \in (0,1)$ *и* $w \in T$ *с* $\|w\| = r$ *имеет место неравенство* $\lambda A(w) \neq w$*. Тогда оператор* $A(u)$ *имеет неподвижную точку* $v \in T \cap S(0,r)$*, т.е.*

$$v = A(v), \quad v \in T \cap S(0,r).$$

Доказательство. Рассмотрим оператор $\Phi(v)$, определяемый соотношением

$$\Phi(v) = \begin{cases} A(v) & \text{при} \quad \|A(v)\| \leqslant r \\ \dfrac{rA(v)}{\|A(v)\|} & \text{при} \quad \|A(v)\| > r. \end{cases}$$

Оператор $\Phi(v)$ определен и вполне непрерывен на $T \cap S(0,r)$ и $\Phi(T \cap S(0,r)) \subseteq T \cap S(0,r)$. Значит по теореме Шаудера о неподвижной точке существует $w \in T \cap S(0,r)$ такая, что $w = \Phi(w)$. В случае $\Phi(w) = A(w)$ теорема доказана. Пусть теперь $\Phi(w) = rA(w)/\|A(w)\|$. Тогда $w = \lambda_0 A(w)$, где $0 \leqslant \lambda_0 \equiv r/\|A(w)\| < 1$ и $\|w\| = r$, что невозможно. Следовательно $\Phi(w) = A(w)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Очевидно, что в качестве множества T может быть взято все банахово пространство H.

Замечание 2. Условие теоремы: “для всех $\lambda \in (0,1)$ и $w \in T$ с $\|w\| = r$ имеет место неравенство $w \neq \lambda A(w)$” при достаточно большом r, очевидно, выполняется, если для всех возможных решений, принадлежащих T, уравнения

$$w = \lambda A(w), \quad w(\lambda) \in T, \quad 0 < \lambda < 1$$

имеет место независимая от $\lambda \in (0,1)$ оценка

$$\|w(\lambda)\| \leqslant \gamma \neq \gamma(\lambda) = \text{const}\,.$$

Соответствующая теорема о неподвижной точке установлена ранее в [1].

Рассмотрим периодическую краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1, \ldots, u_n), \quad 0 \leqslant t \leq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

$$u_i(0) = u_i(1) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Пусть

1) $\alpha \in R^n$ – вектор с элементами $\alpha_j \in \{-1, 0, 1\}$ $(j = 1, \dots, n)$;
2) $\beta \in R^n$ – вектор с элементами $\beta_j \in \{-1, 1\}$ $(j = 1, \dots, n)$;
3) $\gamma \in R^n$ – вектор с элементами $\gamma_j \in \{0, 1\}$ $(j = 1, \dots, n)$;
4) $\delta \in R^n$ – вектор с элементами $\delta_j \in \{0, 1\}$ $(j = 1, \dots, n)$;
5) $m,\ M \in R^n$ – векторы с элементами $m_j \leqslant 0,\ M_j \geqslant 0$ $(j = 1, \dots, n)$.

Теорема 1. *Пусть*

$$\beta_i f_i(t, u_1, \dots, u_n) \operatorname{sign} u_i \geqslant$$

$$\geqslant a_i(t, u_1, \dots, u_{i-1})|u_i| - g_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}), \tag{3}$$

$$\int_0^1 a_i(t, u_1, \dots, u_{i-1})dt > 0 \ g_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}) \geqslant 0,$$

$$\beta_i \gamma_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) \leqslant 0 \tag{4}$$

$$\beta_i \delta_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) \geqslant 0 \tag{5}$$

и функции $f_i(t, u_1, \dots, u_n)$, $g_i(t, u_1, \dots, u_{i-1})$, $a_i(t, u_1, \dots, u_{i-1})$ *непрерывны* $(i = 1, \dots, n)$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_j u_j \geqslant 0$, $\delta_j u_j \leqslant 0$ $(j = 1, \dots, n)$.

Тогда периодическая краевая задача (1), (2) *имеет, по крайней мере, одно решение* $u(t)$ *такое, что*

$$\gamma_j\, u_j(t) \geqslant 0, \quad \delta_j\, u_j(t) \leqslant 0 \ \ (j = 1, \dots, n) \ \ \textit{при} \ \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Доказательство. Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим λ-семейство $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ периодических краевых задач

$$\beta_i \frac{du_i}{dt} - a_i(t, \langle u_1 \rangle, \dots, \langle u_{i-1} \rangle) u_i = \lambda \big[\beta_i\, f_i(t, \langle u_1 \rangle, \dots, \langle u_n \rangle) -$$

$$- a_i(t, \langle u_1 \rangle, \dots, \langle u_{i-1} \rangle) \langle u_i \rangle\big] \quad (i = 1, \dots, n) \tag{6}$$

$$u_i(0) = u_i(1) \quad (i = 1, \dots, n). \tag{7}$$

Здесь

$$\langle u_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{при} \ \ \gamma_j = \delta_j = 1 \\ \max\{0, u_j\} & \text{при} \ \ \gamma_j = 1, \ \ \delta_j = 0 \\ \min\{0, u_j\} & \text{при} \ \ \gamma_j = 0, \ \ \delta_j = 1 \\ u_j & \text{при} \ \ \gamma_j = \delta_j = 0. \end{cases}$$

Любое решение $u(t,\lambda)=\{u_1(t,\lambda),\dots,u_n(t,\lambda)\}$ задачи (6), (7) удовлетворяет неравенствам $\gamma_j u_j(t,\lambda)\geqslant 0$, $\delta_j u_j(t,\lambda)\leqslant 0$ $(j=1,\dots,n)$ при $0\leqslant t\leqslant 1$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

Для определенности установим неравенства $\gamma_j u_j(t,\lambda)\geqslant 0$ $(j=1,\dots,n)$. В самом деле допустим противное. Пусть при некотором i и некотором λ $\min\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} u_i(t,\lambda)=u_i(t^*,\lambda)<0$. Возможны два случая

1) $u_i(t,\lambda)\leqslant 0$ при всех $0\leqslant t\leqslant 1$;

2) существуют числа t_1, $t_2\in[0,1]$ такие, что $u_i(t_1,\lambda)=u_i(t_2,\lambda)=0$,

$$\frac{du_i}{dt}(t_1,\lambda)>0,\qquad \frac{du_i}{dt}(t_2,\lambda)<0.$$

В случае 1) имеем $\langle\, u_i(t,\lambda)\,\rangle=0$ при всех $0\leqslant t\leqslant 1$ и потому

$$\beta_i\frac{du_i}{dt}-a_i(t,\langle\, u_1\,\rangle,\dots,\langle\, u_{i-1}\,\rangle)u_i\leqslant 0$$

$$u_i(0,\lambda)=u_i(1,\lambda).$$

Откуда получаем $u_i(t,\lambda)\geqslant 0$. Т.е. $u_i(t,\lambda)\equiv 0$, что противоречит предположенному неравенству $u_i(t^*,\lambda)<0$. В случае 2) при $t=t_1$ имеем из уравнений (6) и неравенств (4)

$$\beta_i\frac{du_i(t_1,\lambda)}{dt}\leqslant 0,$$

что приводит к противоречию, если $\beta_i=1$. При $t=t_2$ из уравнений (6) и неравенств (4) имеем

$$\beta_i\frac{du_i(t_2,\lambda)}{dt}\leqslant 0,$$

и, следовательно, при $\beta_i=-1$

$$\frac{du_i(t_2,\lambda)}{dt}\geqslant 0,$$

что опять приводит к противоречию.

Таким образом неравенства $\gamma_j u_j(t,\lambda)\geqslant 0$, $\delta_j u_j(t,\lambda)\leqslant 0$ $(j=1,\dots,n)$ при $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, $0\leqslant t\leqslant 1$ установлены. Далее, имеем

$$\beta_i\frac{d|u_i(t,\lambda)|}{dt}-a_i(t,u_1,\dots,u_{i-1})|u_i(t,\lambda)|\geqslant$$
$$\geqslant\lambda g_i\bigl(t,u_1(t,\lambda),\dots,u_{i-1}(t,\lambda)\bigr)$$

$$|u_i(0,\lambda)| = |u_i(1,\lambda)| \quad (i = 1,\dots,n)$$

и потому

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |u_i(t,\lambda)| \leqslant c_i\big(\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |u_i(t,\lambda)|, \dots, \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |u_{i-1}(t,\lambda)|\big).$$

Отсюда

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} |u_i(t,\lambda)| \leqslant c \neq c(\lambda) \;\; \text{при} \;\; 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \;\; (i = 1,\dots,n).$$

Для завершения доказательства теоремы остается применить теорему о неподвижной точке.

Пример. Рассмотрим задачу

$$\frac{du_1}{dt} = \Big(t - \frac{1}{4}\Big)u_1 - u_1\,u_2^3 + e^{u_2} - 1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\frac{du_2}{dt} = t^5 u_2 + u_1^5\,u_2^3 + 6, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$u_1(0) = u_1(1), \quad u_2(0) = u_2(1).$$

Положим $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\gamma_2 = \delta_1 = 0$, $\gamma_1 = \delta_2 = 1$. Имеем $f_1(t,0,u_2) = e^{u_2} - 1 \leqslant 0$, поскольку $\delta_2 u_2 \leqslant 0$ $f_2(t,u_1,0) = 6 > 0$

$$f_1(t,u_1,u_2)\operatorname{sign} u_1 \geqslant \Big(t - \frac{1}{4}\Big)|u_1| - 1$$

$$f_2(t,u_1,u_2)\operatorname{sign} u_2 \geqslant t^5|u_2| - 6.$$

В силу теоремы 1 существует решение $u(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}$ такое, что $u_1(t) \geqslant 0$, $u_2(t) \leqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть*

$$\beta_i f_i(t,u_1,\dots,u_n)\operatorname{sign} u_i \geqslant a_i(t,u_1,\dots,u_{i-1})|u_i| -$$
$$-g_i(t,u_1,\dots,u_{i-1}), a_i(t,u_1,\dots,u_{i-1}) > 0,$$
$$g_i(t,u_1,\dots,u_{i-1}) \geqslant 0 \;\; (i = 1,\dots,n) \tag{3'}$$

$$\gamma_i\beta_i f_i(t,u_1,\dots,u_{i-1},m_i,u_{i+1},\dots,u_n) \leqslant 0,\; m_i \leqslant 0\; (i = 1,\dots,n) \tag{4'}$$

$$\delta_i\beta_i f_i(t,u_1,\dots,u_{i-1},M_i,u_{i+1},\dots,u_n) \geqslant 0,$$
$$M_i \geqslant 0\; (i = 1,\dots,n) \tag{5'}$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_j u_j \geqslant m_j$, $\delta_j u_j \leqslant M_j$ $(j = 1, \dots, n)$. *Здесь функции* $f_i(t.u_1, \dots, u_n)$, $a_i(t, u_1, \dots, u_{i-1})$, $g_i(t, u_1, \dots, u_{i-1})$ *непрерывны при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_j u_j \geqslant m_j$, $\delta_j u_j \leqslant M_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. *Тогда периодическая краевая задача* (1), (2) *имеет, по крайней мере, одно решение* $u(t) = \{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$ *такое, что* $\gamma_j u_j(t) \geqslant m_j$, $\delta_j u_j(t) \leqslant M_j$ *при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $(j = 1, \dots, n)$.

Доказательство. Рассмотрим λ-семейство краевых задач (6), (7), где теперь $\langle\, u_j \,\rangle$ определяется соотношениями

$$\langle\, u_j \,\rangle = \begin{cases} u_j & \text{при } \ \gamma_j = \delta_j = 0 \\ \max\{u_j, m_j\} & \text{при } \ \gamma_j = 1, \quad \delta_j = 0 \\ \min\{u_j, M_j\} & \text{при } \ \gamma_j = 0, \quad \delta_j = 1 \\ \max\{\min\{u_j, M_j\}, m_j\} & \text{при } \ \delta_j = \gamma_j = 1. \end{cases} \tag{8}$$

Покажем, что любое решение $u(t, \lambda)$ задачи (6), (7) удовлетворяет неравенствам $\gamma_j u_j(t, \lambda) \geqslant m_j$, $\delta_j u_j(t, \lambda) \leqslant M_j$ $(j = 1, \dots, n)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. В самом деле допустим противное. Пусть при некотором i и некотором λ верно соотношение

$$\min_{0 \leqslant t \leqslant 1} u_i(t, \lambda) = u_i(t^*, \lambda) < m_i.$$

Тогда $\langle\, u_i(t^*, \lambda) \,\rangle = m_i$ и из системы уравнений (6) учитывая неравенства (4′), имеем при $t^* \in (0, 1)$

$$-a_i(t^*, \langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1} \,\rangle) u_i(t^*, \lambda) =$$
$$= \lambda\big[\beta_i f_i(t^*, \langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1} \,\rangle, m_i, \langle\, u_{i+1} \,\rangle, \dots, \langle\, u_n \,\rangle) -$$
$$- a_i(t^*, \langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1}) \,\rangle m_i\big]$$

или

$$-a_i(t^*, \langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1} \,\rangle)\big[u_i(t^*, \lambda) - m_i + (1 - \lambda) m_i\big] =$$
$$= \lambda \beta_i f_i(t^*, \langle\, u_1 \,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1} \,\rangle, m_i, \langle\, u_{i+1} \,\rangle, \dots, \langle\, u_n \,\rangle). \tag{$*$}$$

Левая часть равенства $(*)$ строго положительна, в то время как правая часть неположительна. Полученное противоречие и доказывает неравенства $\gamma_j u_j(t, \lambda) \geqslant m_j$ $(j = 1, \dots, n)$. Далее, как при доказательстве теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть существуют число $r > 0$ и число $\mu \in \{-1, 1\}$ такие, что*

$$\mu \sum_{j=1}^{n} u_j f_j(t, u_1, \dots, u_n) \geqslant 0 \tag{9}$$

при $\sum_{j=1}^{n} u_j^2 = r^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_j u_j \geqslant m_j$, $\delta_j u_j \leqslant M_j$ $(j = 1, \dots, n)$

$$\mu\gamma_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, m_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \leqslant 0 \tag{10}$$

при $\gamma_j u_j \geqslant m_j$, $\delta_j u_j \leqslant M_j$ $(j = 1, \dots, n)$, $\sum_{j=1}^{n} u_j^2 \leqslant r^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$\mu\delta_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, M_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \geqslant 0 \tag{11}$$

при $\gamma_j u_j \geqslant m_j$, $\delta_j u_j \leqslant M_j$ $(j = 1, \dots, n)$, $\sum_{j=1}^{n} u_j^2 \leqslant r^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ *и функции* $f_i(t, u_1, \dots, u_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ *непрерывны при* $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\gamma_j u_j \geqslant m_j$, $\delta_j u_j \leqslant M_j$ $(j = 1, \dots, n)$, $\sum_{j=1}^{n} u_j^2 \leqslant r^2$. *Тогда периодическая краевая задача* (1), (2) *имеет, по крайней мере, одно решение* $u(t)$ *такое, что*

$$\gamma_j u_j(t) \geqslant m_j,\ \delta_j u_j(t) \leqslant M_j\ (j = 1, \dots, n),$$
$$\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t) \leqslant r^2 \ \text{при}\ \ 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Доказательство. Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим λ-семейство $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ периодических краевых задач

$$\mu\frac{du_i}{dt} - u_i = \lambda\left[\mu f_i(t, \langle u_1 \rangle, \dots, \langle u_n \rangle) - \langle u_i \rangle\right],$$
$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad u_i(0) = u_i(1), \quad (i = 1, \dots, n). \tag{12}$$

Здесь $\langle u_j \rangle$ определяется соотношениями (8). Любое решение $u(t, \lambda)$ задачи (12) удовлетворяет $\gamma_j u_j(t, \lambda) \geqslant m_j$, $\delta_j u_j(t, \lambda) \leqslant M_j$ $(j = 1, \dots, n)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Докажем справедливость неравенств $\gamma_j u_j(t, \lambda) \geqslant m_j$. Допустим противное. Пусть при некотором i и некотором λ верно неравенство $\min\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} u_i(t, \lambda) = u_i(t^*, \lambda) < m_i$. Тогда $\langle u_i(t^*, \lambda) \rangle = m_i$. Поэтому из системы дифференциальных уравнений (12), учитывая соотношения (10), имеем при $t^* \in (0, 1)$

$$-m_i < \lambda\mu\gamma_i f_i(t^*, \langle u_1(t^*, \lambda) \rangle, \dots, \langle u_{i-1}(t^*, \lambda) \rangle, m_i, \langle u_{i+1}(t^*, \lambda) \rangle, \dots,$$

$$\langle\, u_n(t^*,\lambda)\,\rangle) - \lambda m_i \leqslant -m_i + (1-\lambda)m_i \leqslant -m_i.$$

Полученное противоречение $(-m_i < -m_i)$ доказывает неравенство $\gamma_j u_j(t,\lambda) \geqslant m_j$ при $t^* \in (0,1)$. Пусть теперь $t^* = 0$. Тогда при $\mu = 1$

$$\mu \frac{du_i}{dt}(0,\lambda) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad -m_i < \lambda\mu\gamma_i f_i(0, \langle\, u_1(0,\lambda)\,\rangle, \dots, \langle\, u_{i-1}(0,\lambda)\,\rangle,$$

$$m_i, \langle\, u_{i+1}(0,\lambda)\,\rangle, \dots, \langle\, u_n(0,\lambda)\,\rangle) - \lambda m_i \leqslant -m_i$$

опять противоречие. В случае $t^* = 1$ в силу равенства $u_i(0,\lambda) = u_i(1,\lambda)$ дело сводится к случаю $t^* = 0$. Случай $\mu = -1$ рассматривается аналогично.

Из системы уравнений (12), учитывая, что $\langle\, u_j(t,\lambda)\,\rangle = u_j(t,\lambda)$, получаем

$$\frac{1}{2}\mu \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t,\lambda) - (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t,\lambda) =$$

$$= \lambda\mu \sum_{j=1}^{n} u_j f_j(t, u_1, \dots, u_n). \tag{13}$$

Рассмотрим любое решение $u(t,\lambda)$ задачи (12), для которого

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \sum_{j=1}^{n} u_j^2(t,\lambda) \leqslant r^2.$$

Покажем, что

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \sum_{j=1}^{n} u_j^2(t,\lambda) \neq r^2 \quad \text{при} \quad 0 < \lambda < 1.$$

Допустим противное. Пусть

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1} \sum_{j=1}^{n} u_j^2(t,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} u_j^2(t^*,\lambda) = r^2.$$

Если $t^* \in (0,1)$, то из равенства (13) имеем

$$\lambda\mu \sum_{j=1}^{n} u_j(t^*,\lambda) f_j(t^*, u_1(t^*,\lambda), \dots, u_n(t^*,\lambda)) +$$

$$+(1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t^*,\lambda)=0. \tag{14}$$

Равенство (14) невозможно при $0 \leqslant \lambda < 1$ в силу неравенства (9). Пусть теперь $t^* = 0$. Тогда при $\mu = 1$, учитывая, что

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t,\lambda)\bigg|_{t=0} \leqslant 0$$

имеем

$$0 \geqslant \lambda\mu\sum_{j=1}^{n} u_j(0,\lambda) f_j(0, u_1(0,\lambda),\ldots,u_n(0,\lambda)) + (1-\lambda)\sum_{j=1}^{n} u_j^2(0,\lambda).$$

Полученное неравенство невозможно в силу неравенства (9). При $\mu = -1$, учитывая равенства $u_i(0,\lambda) = u_i(1,\lambda)$ $(i = 1,\ldots,n)$ и следующие из них неравенство

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t,\lambda)\bigg|_{t=0} \geqslant 0.$$

Используя равенство (13) придем к противоречию, окончательно доказывающему неравенство

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t,\lambda) \neq r^2 \quad \text{при} \quad 0<\lambda<1$$

для любого решения $u(t,\lambda)$ периодической краевой задачи (12), принадлежащего шару $S(0,r)$ с центром в точке 0 банахова пространства вектор-функций с нормой

$$\Big\{\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t)\Big\}^{1/2}. \tag{15}$$

Для завершения доказательства теоремы 3 остается применить теорему о неподвижной точке к преобразованию

$$z = \lambda F(u)$$

шара $S(0,r)$, задаваемому соотношениями

$$\mu\frac{dz}{dt} - z = \lambda\big[\mu f(t,\langle\, u\,\rangle) - \langle\, u\,\rangle\big] \quad z(0)=z(1).$$

Теорема 4. *Пусть* $a(t)$ *и* $g(t)$, *интегрируемые на* $[0,1]$ *функции и* $\mu \in \{-1, 1\}$ *такие, что* $g(t) \leqslant 0$,

$$\mu \sum_{j=1}^{n} u_j f_j(t, u_1, \dots, u_n) \geqslant a(t) \sum_{j=1}^{n} u_j^2 + g(t),$$

$$\int_0^1 a(t)dt > 0 \tag{16}$$

$$\mu\gamma_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) \leqslant 0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{17}$$

$$\mu\delta_i f_i(t, u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) \geqslant 0 \quad (i = 1, \dots, n) \tag{18}$$

при $\gamma_j u_j \geqslant 0$, $\delta_j u_j \leqslant 0$ $(j = 1, \dots, n)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Тогда периодическая краевая задача* (1), (2) *имеет, по крайней мере, одно решение* $u(t)$ *такое, что*

$$\gamma_j u_j(t) \geqslant 0, \quad \delta_j u_j(t) \leqslant 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t) \leqslant 2\mu \int_0^1 g(t,s) g(s) ds$$

при $0 \leqslant t \leqslant 1$. *Здесь* $g(t,s)$ *функция Грина дифференциального оператора*

$$Lu \equiv \frac{du}{dt} - 2\mu a(t) u, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

с краевыми условиями $u(0) = u(1)$.

Доказательство. Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим λ-семейство $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ периодических краевых задач

$$\mu \frac{du_i}{dt} - a(t) u_i = \lambda \big[\mu f_i(t, \langle u_1 \rangle, \dots, \langle u_n \rangle) - a(t) \langle u_i \rangle\big],$$

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad (i = 1, \dots, n) \tag{19}$$

$$u_i(0) = u_i(1) \quad (i = 1, \dots, n). \tag{20}$$

Любое решение $u(t, \lambda)$ краевой задачи (19), (20) удовлетворяет неравенствам $\gamma_j u_j(t, \lambda) \geqslant 0$, $\delta_j u_j(t, \lambda) \leqslant 0$ $(j = 1, \dots, n)$ при $0 \leqslant$

$\lambda \leqslant 1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Поэтому $\langle\, u_j(t,\lambda)\,\rangle = u_j(t,\lambda)$ $(j = 1,\dots,n)$. Далее, учитывая неравенство (16), имеем

$$\frac{1}{2}\mu \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t,\lambda) - a(t)\sum_{j=1}^{n} u_j^2(t,\lambda) \geqslant \lambda g(t) \tag{21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} u_j^2(0,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} u_j^2(1,\lambda). \tag{22}$$

Соотношения (21), (22) обеспечивают априорную оценку всех возможных решений задачи (19), (20), независимую от λ при $0 < \lambda < 1$. Остается применить теорему о неподвижной точке.

Литература

1. М. Н. Яковлев, *Неотрицательные решения краевых задач для квазилинейных уравнений второго порядка.* — Тр. Матем. ин-та АН СССР **96** (1968), 105–110.

Yakovlev M. N. Solvability of a periodic boundary-value problem for a system of first-order ordinary differential equations with (β,γ,δ)-comparison pairs.

Existence theorems are proved for an incomplete set of upper and lower functions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 3 ноября 1997 г.