Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 248, 1998 г.

М. Н. Яковлев

ТЕОРЕМА О СХОДИМОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА

Пусть $P(x)$ оператор, действующий из пространства Банаха X в пространство Банаха Y. В известных теоремах, см., например, [1], о сходимости метода Ньютона решения операторного уравнения

$$P(x) = 0$$

предполагается существование производной Фреше $P'(x)$ оператора $P(x)$, которая, по определению, является при каждом x линейным ограниченным оператором ($P'(x) \in L(X, Y)$). Это заставляет при рассмотрении, например, дифференциальных уравнений вводить метрику, в которой оператор $P(x)$ является непрерывным оператором. Приводимая ниже теорема позволяет избежать этого усложнения. Кроме того, класс операторов, рассматриваемых в нижеприведенной теореме, содержит все операторы, для которых оператор $P'(x)$, удовлетворяет лишь локальному условию Гельдера с некоторым показателем s ($0 < s \leqslant 1$).

Рассмотрим уравнение

$$Tx + F(x) = 0, \tag{1}$$

где $F(x)$ – оператор из банахова пространства X в банахово пространство Y. Предположим, что оператор $F(x)$ непрерывно дифференцируем по Фреше в некотором шаре $S(x_0, r) \subset X$ радиуса r. Пусть T – аддитивный и однородный оператор с областью определения $D(T) \subset X$ и областью значений $R(T) \subset Y$. Пусть $x_0 \in D(T)$.

Теорема. *Пусть выполнены условия.*

1. *Существует линейный (определенный на всем Y) оператор $[T + F_x'(x)]^{-1}$ для всех $x \in S(x_0, r) \cap D(T)$.*
2. *Для x, $z \in S(x_0, r) \cap D(T)$ верно неравенство*

$$\| [T + F_x'(z)]^{-1} [F(z) - F(x) - F_x'(x)(z - x)] \| \leqslant M^s \|x - z\|^{1+s},$$

$$0 < s \leqslant 1. \tag{2}$$

3. *Для* $x \in S(x_0, r) \cap D(T)$ *верно неравенство*

$$\left\| [T + F'_x(x)]^{-1}[Tx_0 + F(x_0)] \right\| \leqslant k. \tag{3}$$

4. $q = kM < 1.$ (4)

5. $r > r' = k\sum_{k=0}^{+\infty} q^{(1+s)^k - 1}.$ (5)

Тогда существует решение x^* *уравнения* (1), *принадлежащее* $\overline{S(x_0, r')} \cap D(T)$ *к которому сходится итерационный процесс*

$$x_{n+1} = x_n - [T + F'_x(x_n)]^{-1}[Tx_n + F(x_n)], \quad n = 0, 1, \dots,$$

причем

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{kq^{(1+s)^n - 1}}{1 - q^{s(1+s)^n}} \quad (n = 0, 1, \dots). \tag{6}$$

Доказательство. Положим

$$\Gamma(x) \equiv [T + F'_x(x)]^{-1}, \quad \Gamma_n \equiv \Gamma(x_n), \quad P(x) \equiv Tx + F(x), \quad P_n \equiv P(x_n).$$

Покажем сначала, что

$$x_n \in \overline{S(x_0, r')} \cap D(T).$$

Имеем

$$\|x_1 - x_0\| = \|\Gamma_0 P_0\| \leqslant k < r'.$$

Далее

$$\Gamma_1 P_1 = \Gamma_1 P_1 - \Gamma_1[T(x_1 - x_0) + F'_x(x_0)(x_1 - x_0) + Tx_0 + F(x_0)] =$$
$$= \Gamma_1[Tx_1 + F(x_1) - T(x_1 - x_0) - F'_x(x_0)(x_1 - x_0) - Tx_0 - F(x_0)] =$$
$$= \Gamma_1[F(x_1) - F(x_0) - F'_x(x_0)(x_1 - x_0)]$$

и следовательно

$$\|\Gamma_1 P_1\| \leqslant M^s \|x_1 - x_0\|^{1+s}.$$

Дальнейшие рассуждения проводим методом полной математической индукции.

Пусть уже доказано, что

$$x_n \in \overline{S(x_0, r')} \cap D(T)$$

и что справедливы оценки

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant kq^{(1+s)^{n-1} - 1} \tag{7}$$

$$\|\Gamma_n P_n\| \leqslant M^s \|x_n - x_{n-1}\|^{1+s}. \tag{8}$$

Покажем, что тогда

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant kq^{(1+s)^n - 1}, \tag{9}$$

откуда

$$x_{n+1} \in \overline{S(x_0, r')} \cap D(T) \tag{10}$$

и что

$$\|\Gamma_{n+1}\, P_{n+1}\| \leqslant M^s \|x_{n+1} - x_n\|^{1+s}.$$

Действительно из (7) и (8)

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|\Gamma_n P_n\| \leqslant M^s \|x_n - x_{n-1}\|^{1+s} \leqslant kq^{(1+s)^n - 1}.$$

Формула (9) доказана. Далее имеем

$$Tx_n + F(x_n) + [T + F'_x(x_n)](x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Это позволяет оценить $\|\Gamma_{n+1} P_{n+1}\|$:

$$\Gamma_{n+1} P_{n+1} = \Gamma_{n+1} P_{n+1} - \Gamma_{n+1}\big[P_n + [T + F'_x(x_n)](x_{n+1} - x_1)\big] =$$

$$= \Gamma_{n+1}\big[F(x_{n+1}) - F(x_n) - F'_x(x_n)(x_{n+1} - x_n)\big],$$

следовательно

$$\|\Gamma_{n+1} P_{n+1}\| \leqslant M^s \|x_{n+1} - x_n\|^{1+s}$$

и неравенство (10) также доказано.

Теперь установим фундаментальность последовательности $\{x_n\}$. Из неравенства треугольника и оценок (9) имеем

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant k \sum_{k=n}^{n+p-1} q^{(1+s)^k - 1}. \tag{11}$$

Отсюда

$$x_n \to x^* \in \overline{S(x_0, r')}.$$

Имеем

$$x_{n+1} = \Gamma_n\big[F'_x(x_n)x_n - F(x_n)\big] = \Gamma_n\big[F'_x(x_n)x_n - F(x_n) - F'_x(x^*)x^* + F(x^*)\big]$$

$$+ \big[\Gamma_n - \Gamma(x^*)\big]\big[F'_x(x^*)x^* - F(x^*)\big] + \Gamma(x^*)\big[F'_x(x^*)x^* - F(x^*)\big]. \tag{12}$$

Далее

$$\|\Gamma_n\| \leqslant \|\Gamma_n - \Gamma(x^*)\| + \|\Gamma(x^*)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Gamma_n\| \, \|F'(x_n) - F'(x^*)\| \, \|\Gamma(x^*)\| + \|\Gamma(x^*)\|.$$

Отсюда, в силу непрерывной дифференцируемости оператора $F(x)$ в шаре $S(x_0, r)$, при достаточно больших n

$$\|\Gamma_n\| \leqslant \|\Gamma(x^*)\|/1 - \|\Gamma(x^*)\| \, \|F'(x_n) - F'(x^*)\| < 2\|\Gamma(x^*)\|,$$
$$\|\Gamma(x^*) - \Gamma_n\| \leqslant \|\Gamma_n\| \, \|F'(x^*) - F'(x_n)\| \, \|\Gamma(x^*)\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\|\Gamma(x^*)\|^2 \, \|F'(x_n) - F'(x^*)\|.$$

Отсюда

$$\|\Gamma(x^*) - \Gamma_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом правая часть соотношения (12) стремится при $n \to \infty$ к выражению

$$\Gamma(x^*)\big[F'(x^*)x^* - F(x^*)\big].$$

Отсюда, в частности, следует, что $x^* \in D(T)$ и

$$\big[T + F'_x(x^*)\big]\, x^* = Tx^* + F'_x(x^*)x^* = F'_x(x^*)x^* - F(x^*),$$

т.е.

$$Tx^* + F(x^*) = 0.$$

Переходя к пределу при $p \to \infty$ в оценке (11), получим

$$\|x_n - x^*\| \leqslant k \sum_{k=n}^{\infty} q^{(1+s)^k - 1} \leqslant \frac{kq^{(1+s)^n - 1}}{1 - q^{s(1+s)^n}},$$

поскольку $(1+s)^k - 1 \geqslant ks$ при $s > -1$.

Следствие. *Пусть выполнены условия.*

1. *Существует линейный (определенный на всем Y) оператор $[T + F'_x(x)]^{-1}$ для всех $x \in S(x_0, r) \cap D(T)$.*

2. *Для z, v, $w \in S(x_0, r) \cap D(T)$ верно неравенство*

$$\|[T + F'_x(z)]^{-1}[F'_x(v) - F'_x(w)]\| \leqslant L\|v - w\|^s \quad (0 < s \leqslant 1). \qquad (13)$$

3. *Для* $x \in S(x_0, r) \cap D(T)$ *верно неравенство*

$$\|[T + F'_x(x)]^{-1}[Tx_0 + F(x_0)]\| \leqslant k.$$

4. $q = k\left(\frac{L}{1+s}\right)^{1/s} < 1.$

5. *Верно неравенство* (5)

Тогда верны все заключения теоремы.

Доказательство. Имеем в силу неравенства (13)

$$\|[T + F'_x(z)]^{-1}[F(z) - F(x) - F'_x(x)(z - x)]\| =$$

$$\left\|\int_0^1 \left[T+F'_x(z)\right]^{-1}\left[F'_x(x+t(z-x))-F'_x(x)\right](z-x)dt\right\| \leqslant \frac{L}{1+s}\|z-x\|^{1+s}.$$

Поэтому можно положить

$$M^s = \frac{L}{1+s}.$$

Остается применить теорему.

Замечание. Если при любых $x \in X$ имеет место $Tx = 0$, т.е. $T \equiv 0$ и существует вторая производная $F''(x)$, ограниченная в шаре $S(x_0, r)$, что влечет выполнение неравенства (13) с $s = 1$, то мы получаем теорему, доказанную И. П. Мысовских [2].

Литература

1. В. А. Треногин, *Функциональный анализ.* М. (1993).
2. И. П. Мысовских, *О сходимости метода Л. В. Канторовича для решения нелинейных функциональных уравнений и его приложения.* — Вестн. ЛГУ **11** (1953), 25–48.

Yakovlev M. N. A convergence theorem for the Newton method.

The convergence of the Newton method is established dor equations of the form $Tx + F(x) = 0$, where T is an unbounded operator, and the Fréchet derivative $F'(u)$ of the operator $F(u)$ satisfies Hölder's condition.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 3 ноября 1997 г.