Б. В. Базалий, С. Н. Казмин

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ СО СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Посвящается юбилею
Ольги Александровны Ладыженской**

Задачи со старшими производными в граничных условиях для параболических уравнений второго порядка естественным образом возникают в приложениях. Например, при изучении движений жидкости со свободной границей [1], при исследовании разрешимости задачи Стефана [2] появляется необходимость изучения краевых задач с граничным условием, содержащим производную по времени. В теории вероятностей при изучении марковских процессов сформулирована краевая задача с граничными условиями, содержащими вторые производные по касательным направлениям. В работе [3] при некоторых ограничениях на коэффициенты и правую часть задачи получено представление решения через соответствующие фундаментальные решения в случае полупространства. В представленной работе исследуется разрешимость аналогичной краевой задачи при естественных предположениях на данные задачи локальным методом, характерным для уравнений второго порядка (см. [4, гл. 4]), в пространствах Гельдера. Рассматривается случай двух пространственных переменных, в котором можно обойтись стандартными пространствами $H^{l,l/2}$, для более высоких размерностей мы ограничимся только замечанием о выборе подходящих пространств. Аналогичным методом могут быть исследованы задачи сопряжения со вторыми производными по касательным направлениям.

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть $\Omega \subset R_2$ – произвольная область с границей Γ, $\Omega_T = \Omega\times(0,T)$, $\Gamma_T = \Gamma\times(0,T)$, ω – некоторая координата на Γ. Требуется определить функцию

$u(x,t)$ по условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T;$$
$$\sum_{i=1}^{2} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} - L_0 u = f_1(x,t), \ (x,t) \in \Gamma_T; \qquad (1)$$
$$u(x,0) = \varphi(x),$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j,i=1}^{2} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{2} a_i(x,t)u_{x_i} + a(x,t)u$$

равномерно параболический оператор, $L_0 u = \gamma(\omega,t)u_{\omega\omega} + c(\omega,t)u$, $\gamma(\omega,t) \geqslant \gamma_0 = \mathrm{const} > 0$, $(b,n) \geqslant \delta = \mathrm{const} > 0$, n – внутренняя к Ω нормаль, $b = (b_1(x,t), b_2)x,t))$.

Задачу (1) для дальнейшего удобно представить в следующем эквивалентном виде. Требуется определить функции $u(x,t)$, $v(x,t)$, определенные на Ω_T и Γ_T соответственно, по условиям:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = f_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T;$$
$$\sum_{i=1}^{2} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} - L_0\, v = f_1(x,t), \ u - v = 0, \ (x,t) \in \Gamma_T; \qquad (2)$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \ x \in \Omega; \ v(x,0) = \psi(x), \ x \in \Gamma.$$

Мы будем использовать пространства Гельдера $H^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$, $H^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$, k – целое число, $\alpha \in (0,1)$, в которых введены нормы $|u|_{\Omega}^{(k+\alpha)}$ и $|u|_{\Omega_T}^{(k+\alpha)}$ соответственно и полунормы

$$\langle\, u \,\rangle_{\Omega}^{(k+\alpha)} = \sum_{k} \langle\, D_x^k\, u \,\rangle_{x,\Omega}^{(\alpha)}, \ \langle\, u \,\rangle_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} = \sup_{x,y,t} \frac{|u(x,t) - u(y,t)|}{|x-y|^{\alpha}},$$
$$\langle\, u \,\rangle_{\Omega_T}^{(k+\alpha)} = \langle\, u \,\rangle_{x,\Omega_T}^{(k+\alpha)} + \langle\, u \,\rangle_{t,\Omega_T}^{(k+\alpha)}, \ \langle\, u \,\rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha)} = \sup_{x,t,\tau} \frac{|u(x,t) - u(y,\tau)|}{|t-\tau|^{\alpha}},$$
$$\langle\, u \,\rangle_{x,\Omega_T}^{(k+\alpha)} = \sum_{2r+s=k} \langle\, D_t^r\, D_x^s\, u \,\rangle_{x,\Omega_T}^{(\alpha)},$$
$$\langle\, u \,\rangle_{x,\Omega_T}^{(k+\alpha)} = \sum_{0<k+\alpha-2r-s<2} \langle\, D_t^r\, D_x^s\, u \,\rangle_{t,\Omega_T}^{\frac{(k+\alpha-2r-s)}{2}},$$

и пространства $\underset{0}{H}{}^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$, в которых сами функции и их допустимые производные по t обращаются в нуль при $t=0$ (см. [4]. с. 16, 349). Подмножество функций $v(x,t)$ из $H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T)$, для которых $D_x^2\, v\in H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T)$ образуют подпространство $\widehat{H}^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T)$, в котором вводится норма

$$\|v\|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)}=|v|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)}+|D_x^2\, v|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)}.$$

Будем предполагать, что

$$\Gamma\in H^{3+\alpha},\quad \varphi(x)\in H^{2+\alpha}(\overline{\Omega}),$$
$$\psi(x)\in H^{2+\alpha}(\Gamma),\quad f_0\in H^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T),\ f_1\in H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T),$$

коэффициенты оператора L принадлежат пространству $H^{\alpha,\alpha/2}$ $(\overline{\Omega}_T)$, коэффициенты оператора L_0 и $b_i(x,t)$ принадлежат пространству $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T)$ и выполняются условия согласования нулевого порядка.

Теорема. *При сделанных предположениях задача* (2) *имеет единственное решение* $u\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)$, $v\in \widehat{H}^{\,2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T)$ *и выполняется неравенство*

$$|u_{\Omega_T}^{(2+\alpha)}+\|v\|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)}\leqslant c\left(|f_0|_{\Omega_T}^{(\alpha)}+|f_1|_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)}+|\varphi|_{\Omega}^{(2+\alpha)}+|\psi|_{\Gamma}^{(3+\alpha)}\right). \quad (3)$$

2. Модельная задача в полупространстве. В области $R_{2T}^{+}=\{(x,t):x_1\in R_1, x_2>0, t\in(0,T)\}$ с границей $R_{1T}=\{(x_1,t):x_1\in R_{1T}, t\in(0,T)\}$ рассмотрим задачу нахождения функций $u(x,t)$, $v(x_1,t)$, определенных на R_{2T}^{+} и R_{1T} соответственно, по условиям:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0,\ (x,t)\in R_{2T}^{+};\\ \frac{\partial u}{\partial x_2}+\beta\frac{\partial u}{\partial x_1}+\gamma\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}-f_1(x,t),\ u-v=f_2(x,t),\ (x,t)\in R_{1T};\\ u(x,0)=0,\quad v(x_1,0)=0;\ f_1\in \underset{0}{H}{}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(R_{1T}),\\ f_2\in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(R_{1T}),\ f_2(x_1,0)=0,\quad \beta\in R_1,\quad \gamma\geqslant\gamma_0>0.\end{gathered} \quad (4)$$

Лемма. *Задача* (4) *имеет единственное решение и выполняются неравенства*

$$\langle\, u\,\rangle_{R_{2T}^{+}}^{(2+\alpha)}+\langle\, v\,\rangle_{R_{1T}}^{(2+\alpha)}+\langle\, D_{x_1}^2\, v\,\rangle_{R_{1T}}^{(1+\alpha)}\leqslant c\left(\langle\, f_1\,\rangle_{R_{1T}}^{(1+\alpha)}+\langle\, f_2\,\rangle_{R_{1T}}^{(2+\alpha)}\right) \quad (5)$$

с не зависящей от T постоянной и

$$|u|^{(2+\alpha)}_{R^+_{2T}} + \|\sigma\|^{(2+\alpha)}_{R_{1T}} \leqslant c(T)\left(|f_1|^{(1+\alpha)}_{R_{1T}} + |f_2|^{(2+\alpha)}_{R_{1T}}\right) \tag{6}$$

с ограниченной постоянной при ограниченных T.

Доказательство. Обозначим преобразование Фурье по x и преобразование Лапласа по t функции $f(x,t)$ через

$$\widetilde{f}(\lambda, p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt}\,dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,t)e^{-i\lambda x}\,dx,$$

тогда задачу (4) можно записать в виде

$$(p+\lambda^2)\widetilde{u}(\lambda, x_2, p) - \frac{d^2\,\widetilde{u}}{d\,x_2^2}(\lambda, x_2, p) = 0;$$

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_2}(\lambda, 0, p) + i\beta\lambda\widetilde{u}(\lambda, 0, p) - \gamma\lambda^2\widetilde{v}(\lambda, p) = \widetilde{f}_1(\lambda, p), \tag{7}$$

$$\widetilde{u}(\lambda, o, p) - \widetilde{v}(\lambda, p) = \widetilde{f}_2(\lambda, p).$$

Пусть $\widetilde{u}(\lambda, x_2, p) = \widetilde{m}(\lambda, p)\exp(-x_2\sqrt{p+\lambda^2})$ убывающее на бесконечности решение (7), тогда из граничных условий получаем

$$\widetilde{m}(\lambda, p) =$$
$$= -\widetilde{K}(\lambda, p)\,\widetilde{f}_1(\lambda, p) - \widetilde{K}(\lambda, p)\left(\sqrt{p+\lambda^2} - i\beta\lambda\right)\,\widetilde{f}_2(\lambda, p) + \widetilde{f}_2(\lambda, p),$$

$$\widetilde{K}(\lambda, p) = \left(\gamma\lambda^2 + \sqrt{p+\lambda^2} - i\beta\lambda\right)^{-1}. \tag{8}$$

Прообразом функции $\widetilde{K}(\lambda, p)$ при преобразовании Лапласа есть функция $\widehat{K}(\lambda, t)$, для вычисления которой можно воспользоваться представлением

$$\left(\gamma\lambda^2 + \sqrt{p+\lambda^2} - i\beta\lambda\right)^{-1} = \int\limits_0^\infty e^{-\tau(\gamma\lambda^2 + \sqrt{p+\lambda^2} - i\beta\lambda)}\,d\tau,$$

и, поскольку прообраз функции $\exp(-\tau\sqrt{p+\lambda^2})$ известен, то

$$\widehat{K}(\lambda, p) = \frac{e^{-\lambda^2 t}}{2\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} \int \tau e^{-\tau\gamma\lambda^2 - \tau^2/4t + i\tau\beta\lambda}\,d\tau.$$

Тогда прообраз функции $\widetilde{K}(\lambda, p)$ есть функция

$$K(x,t) = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \int_0^\infty \tau t^{-3/2} e^{-\tau^2/4t} \int_0^\infty e^{-\lambda^2(t+\gamma\tau)} \cos\lambda(x+\beta\tau)\, d\lambda\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\tau}{t^{3/2}(t+\gamma\tau)^{1/2}} e^{-\tau^2/4t} e^{-\frac{(x+\beta\tau)^2}{4(t+\gamma\tau)}}\, d\tau.$$

Функция $u(x,t)$, решение задачи (4), может быть найдена по значению ее нормальной производной на границе, т.е. по прообразу функций $\widetilde{m}(\lambda,p)\sqrt{p+\lambda^2}$. Заметим, что прообразы функции $\widetilde{f}_1(\lambda,p)\sqrt{p+\lambda^2}$, $\widetilde{f}_2(\lambda,p)(p+\lambda^2 - i\beta\lambda\sqrt{p+\lambda^2})$ есть функции из класса $\underset{0}{H}^{\alpha,\alpha/2}$. Поэтому достаточно исследовать свойства гладкости функции

$$g(x,t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi,\, t-\tau)\, f(\xi,\tau)\, d\xi,\ \ f \in \underset{0}{H}^{\alpha,\alpha/2}.$$

Мы покажем, что $g(x,t) \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(R_{1T})$ и получим соответствующие оценки. Полезно отметить, что полученные ниже оценки для $g(x,t)$ таковы, что постоянные в них остаются ограниченными при $\gamma \to 0$, $\beta \to 0$, т.е. они имеют такой же вид, как и для ядра $ct^{-1}\exp(-x^2/4t)$, соответствующего символу $(p+\lambda^2)^{-1/2}$. Обозначим

$$g_1(x,t) = D_x\, g = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau)\, d\xi,$$

$$K_1(x,t) = D_x\, K(x,t).$$

Пусть $t' < t$, тогда имеем

$$g_1(x,t) - g_1(x,t') = \int_{2t'-t}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-\xi, t-\tau)[f(\xi,\tau) - f(\xi,t)]\, d\xi -$$

$$- \int_{2t'-t}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-\xi, t'-\tau)[f(\xi,\tau) - f(\xi,t')]\, d\xi +$$

$$+\int_{-\infty}^{2t'-t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} K_1\,[\,(x-\xi,t-\tau)-K_1(x-\xi,t'-\tau)\,]\,[f(\xi,\tau)-f(\xi,t')]\,d\xi+$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}[\,f(\xi,t)-f(\xi,t')\,]\int_0^{2(t-t')}K_1(x-\xi,\tau)\,d\tau\equiv\sum_{k=1}^{4}I_k.$$

Легко проверяются неравенства

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}K_1(x,t)\,dx\leqslant\begin{cases}c\,t^{-1};\\ c\gamma^{-1/2}\,t^{-3/4},\end{cases}\\ &\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\partial K_1}{\partial t}(x,t)\right|dx\leqslant\begin{cases}c\,t^{-2};\\ c\gamma^{-1/2}\,t^{-7/4}.\end{cases}\end{aligned}\qquad(9)$$

Сейчас мы воспользуемся верхними оценками, справедливыми для всех $\gamma\geqslant 0$. Тогда, например,

$$|I_1|\leqslant c\langle\, f\,\rangle_t^{(\alpha/2)}\int_{2t'-t}^{t}\frac{(t-\tau)^{\alpha/2}}{t-\tau}\,d\tau\leqslant c\langle\, f\,\rangle^{(\alpha/2)})_t\,(t-t')^{\alpha/2}.$$

Аналогично оценивается слагаемое I_2 и с помощью теоремы о среднем слагаемом I_3. Для слагаемого I_4 имеем

$$I_4=\int_0^{2(t-t')}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}K_1(x-\xi,\tau)\,[\,f(\xi,t)-f(x,t)\,]\,d\xi-$$

$$-\int_0^{2(t-t')}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}K_1(x-\xi,\tau)\,[\,f(\xi,t')-f(x,t')\,]\,d\xi.$$

В силу оценки

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x-\xi|^{\alpha}\,d\xi\int_0^{\infty}\frac{\tau\,e^{-\tau^2/4t}}{t^{3/2}(t+\gamma\tau)^{1/2}}\left|\frac{x-\xi+\beta\tau}{t+\gamma\tau}\right|e^{-\frac{(x-\xi+\beta\tau)^2}{4(t+\gamma\tau)}}\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\frac{c}{t^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_0^{\infty}\frac{\tau\,e^{-\tau^2/4t}}{(t+\gamma\tau)^{1/2}}\,(|x-\xi+\beta\tau|^{\alpha}+|\beta\tau|^{\alpha})\,\frac{e^{-\frac{(x-\xi+\beta\tau)^2}{4(t+\gamma\tau)}}}{(t+\gamma\tau)^{1/2}}\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{t^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\tau}{(t+\gamma\tau)^{1/2}} e^{-\tau^2/4t} \left[(t+\gamma\tau)^{\alpha/2} + |\beta\tau|^\alpha \right] d\tau \leqslant c\, t^{-1+\alpha/2},$$

имеем $|I_4| \leqslant c\langle f \rangle_x^{(\alpha)} (t-t')^{\alpha/2}$, так что

$$\langle g_1(x,t) \rangle_t^{(\alpha/2)} \leqslant c \left(\langle f \rangle_x^{(\alpha)} + \langle f \rangle_t^{(\alpha/2)} \right). \tag{10}$$

Оценим теперь разность $g_1(x,t) - g_1(x',t)$, представляя ее в виде

$$g_1(x,t) - g_1(x',t) = \int_{-\infty}^{t} \int_{|x-\xi|\leqslant 2|x-x'|} K_1(x-\xi, t-\tau)[f(\xi,\tau) - f(x,\tau)]\, d\xi -$$

$$- \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{|x-\xi|\leqslant 2|x-x'|} K_1(x-\xi, t-\tau)[f(\xi,\tau) - f(x',\tau)]\, d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{|x-\xi|> 2|x-x'|} K_1\,[\,(x-\xi, t-\tau) - K_1(x'-\xi, t-\tau)\,] \times$$

$$\times [\, f(\xi,\tau) - f(x',\tau)\,]\, d\xi +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{|x-\xi|> 2|x-x'|} K_1(x-\xi, t-\tau)\,[\, f(x',\tau) - f(x,\tau)\,]\, d\xi \equiv \sum_{k=1}^{4} i_k.$$

Приведем некоторые оценки для $K_1(x,t)$. Во-первых,

$$|K_1(x,t)| \leqslant \frac{c}{t^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\tau}{t+\gamma\tau} e^{-\tau^2/4t} e^{-\frac{(x+\tau\beta)^2}{8(t+\gamma\tau)}}\, d\tau \leqslant \frac{c}{t^{3/2}}. \tag{11}$$

Далее замечаем, что

$$\frac{1}{(t+\gamma\tau)^{1/2}} e^{-\frac{(x+\tau\beta)^2}{8(t+\gamma\tau)}} = c \int_0^\infty e^{-2\lambda^2(t+\gamma\tau)} \cos\lambda(x+\beta\tau)\, d\lambda =$$

$$= c \int_0^\infty e^{-2\lambda^2(t+\gamma\tau)} [\cos\lambda x \, \cos\lambda\beta\tau - \sin\lambda x\, \sin\lambda\beta\tau\,]\, d\lambda. \tag{12}$$

Имеем, например, с помощью интегрирования по частям

$$\left|\int\limits_0^\infty e^{-2\lambda^2(t+\gamma\tau)}\cos\lambda\beta\tau\cos\lambda x\,d\lambda\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{x^2}\int\limits_0^\infty \frac{d^2}{d\lambda^2}\Big(e^{-2\lambda^2(t+\gamma\tau)}\cos\lambda\beta\tau\Big)\cos\lambda x\,d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{x^2}\left[(t+\gamma\tau)^{1/2} + |\beta|\tau + \beta^2\frac{\tau^2}{(t+\gamma\tau)^{1/2}}\right].$$

Проводя аналогичные оценки для второго слагаемого в квадратных скобках в (12), получим

$$\begin{aligned} &|K_1(x,t)| \leqslant \\ &\leqslant \frac{c}{x^2\,t^{3/2}}\int\limits_0^\infty \frac{\tau}{(t+\gamma\tau)^{1/2}}e^{-\tau^2/4t}\left[(t+\gamma\tau)^{1/2}+|\beta|\tau+\frac{\beta^2\tau^2}{(t+\gamma\tau)^{1/2}}\right]d\tau \leqslant \\ &\qquad\leqslant \frac{c}{t^{1/2}\,x^2}. \end{aligned} \tag{13}$$

Аналогичным образом можно получить оценки

$$\left|\frac{\partial K_1(x,t)}{\partial x}\right| \leqslant \frac{c}{t^2},\quad \left|\frac{\partial K_1(x,t)}{\partial x}\right| \leqslant \frac{c}{t^{1/2}|x|^3}. \tag{14}$$

С помощью оценок (11), (13) получаем

$$|i_1| \leqslant c\langle\, f\,\rangle_x^{(\alpha)} \int\limits_{|x-\xi|\leqslant 2|x-x'|} |x-\xi|^\alpha\,d\xi \int\limits_{-\infty}^{t} |K_1(x-\xi,t-\tau)|d\tau =$$

$$= c\langle\, f\,\rangle_x^{(\alpha)} \int\limits_{|x-\xi|\leqslant 2|x-x'|} |x-\xi|^\alpha\,d\xi\Bigg\{\int\limits_{-\infty}^{t-|x-\xi|^2} |K_1(x-\xi,t-\tau)|d\tau +$$

$$\int\limits_{t-|x-\xi|^2}^{t} |K_1(x-\xi,t-\tau)|d\tau\Bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant c\langle f\rangle_x^{(\alpha)} \int\limits_{|x-\xi|\leqslant 2|x-x'|} |x-\xi|^\alpha \Bigg\{ \int\limits_{-\infty}^{t-|x-\xi|^2} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} +$$

$$+ \int\limits_{t-|x-\xi|^2}^{t} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1/2}|x-\xi|^2} \Bigg\} \leqslant c\langle f\rangle_x^{(\alpha)}\, |x-x'|^\alpha.$$

Оценки для i_2 и i_3 имеют такой же вид, причем при оценке i_3 используется теорема о среднем и неравенства (14). Наконец,

$$|i_4| \leqslant c\langle f\rangle_x^{(\alpha)}\, |x-x'|^\alpha \int\limits_0^\infty |\, K(2|x-x'|,t) - K(-2|x-x'|,t)\,|\, dt.$$

Однократное интегрирование по частям в представлении $K(x,t)$ дает неравенство

$$|\, K(x,t)\,| \leqslant \frac{c}{t^{1/2}|x|}.$$

С другой стороны, теорема о среднем и (11) приводят к неравенству

$$|\, K(a,t) - K(-a,t)\,| \leqslant c|a|t^{-3/2},$$

а следствием двух последних неравенств являются оценки

$$\int\limits_0^\infty |\, K(2|x-x'|,t) - K(-2|x-x'|,t)\,|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant c\Bigg\{ \int\limits_0^{|x-x'|^2} \frac{dt}{t^{1/2}|x-x'|} + \int\limits_{|x-x'|^2}^\infty \frac{|x-x'|dt}{t^{3/2}} \Bigg\} \leqslant \mathrm{const},$$

$$|i_4| \leqslant \langle f\rangle_x^{(\alpha)}\, |x-x'|^\alpha.$$

Полученные оценки дают

$$\langle\, g_1(x,t)\,\rangle_x^{(\alpha)} \leqslant c\langle f\rangle_x^{(\alpha)}. \tag{15}$$

Используя почти такие же рассуждения, как при доказательстве (10), получим неравенство

$$\langle\, g(x,t)\,\rangle_t^{((1+\alpha)/2)} \leqslant \langle f\rangle_t^{(\alpha/2)}. \tag{16}$$

Неравенства (10), (15), (16) означают, что

$$\langle g(x,t)\rangle^{((1+\alpha))} \leqslant c\langle f\rangle^{(\alpha)}, \tag{17}$$

причем из наших рассуждений следует, что c не зависит от T. Оценки величин $\max|g(x,t)|$, $\max|g_1(x,t)|$ элементарны:

$$|g_1(x,t)| \leqslant c\,t^{\alpha/2}\langle f\rangle_x^{(\alpha)},\ \ |g(x,t)| \leqslant c\,t^{1/2}\max|f|,$$

отсюда

$$|g(x,t)|^{(1+\alpha)} \leqslant c(T)\,|f|^{(\alpha)}. \tag{18}$$

Обозначим $\Phi(x_1,t)$ прообраз функции $\widetilde{m}(\lambda,p)\sqrt{p+\lambda^2}$. В терминах задачи (4) оценки (17), (18) означают

$$\begin{aligned} &\langle\Phi\rangle^{(1+\alpha)} \leqslant c\left(\langle f_1\rangle^{(1+\alpha)} + \langle f_2\rangle^{(2+\alpha)}\right),\\ &\langle\Phi\rangle^{(1+\alpha)} \leqslant c(T)\left(|f_1|^{(1+\alpha)} + |f_2|^{(2+\alpha)}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Из результатов [4, гл. 4] следует, что функция

$$u(x_1,x_2,t) \in \underset{0}{H}{}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(R_{2T}^+),\ \text{причем}\ \langle u\rangle^{(2+\alpha)} \leqslant c\langle\Phi\rangle^{(1+\alpha)}$$

с постоянной, не зависящей от T, $|u|^{(2+\alpha)} \leqslant c(T)|\Phi|^{(1+\alpha)}$. Теперь из граничных условий в (4) получим

$$v(x_1,t) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(R_1T),\ \ D_{x_1}^2\,v(x_1,t) \in \underset{0}{H}{}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\Gamma_T),$$

а оценки (5), (6) есть следствие оценок (19), что и доказывает лемму.

3. Доказательство теоремы. Прежде всего покажем, что задачу (2) можно свести к задаче для функций

$$u \in \underset{0}{H}{}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T),\ \ v \in \underset{0}{\widehat{H}}{}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T).$$

Пусть $w(x,t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial w}{\partial t} - Lw = \widetilde{f}_0(x,0),\ \ (x,t) \in R_{2T};$$

$$w(x,0) = \widetilde{\varphi}(x),$$

где $\widetilde{f}_0(x,0)(\widetilde{\varphi}(x))$ есть продолжение $f_0(x,0)(\varphi(x))$ на R_2 с сохранением нормы, так что

$$|w|^{(2+\alpha)} \leqslant c\left(|f_0|^{(\alpha)} + |\varphi|^{(2+\alpha)}\right).$$

Пусть

$$u_1(x,t) = u(x,t) - w(x,t),\ v_1(x,t) = v(x,t) - \psi(x).$$

Для этих функций из (2) получим задачу

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_1}{\partial t} - L\,u_1 = f_0(x,t) - f_0(x,0) \equiv F_0(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T;\\
\sum_{i=1}^{2} b_i(x,t)\frac{\partial u_1}{\partial x_i} + L_0\,v_1 = f_1(x,t) - \sum_{i=1}^{2} b_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} + L_0\psi \equiv F_1(x,t),\\
u_1 - v_1 = -w(x,t) + \psi(x) \equiv F_2(x,t),\ (x,t)\in\Gamma_T; \qquad (20)\\
u_1(x,0) = 0,\ v_1(x,0) = 0,\ x\in\overline{\Omega}
\end{gathered}$$

По построению и из условий согласования получаем

$$F_0 \in \underset{0}{H}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T),\ F_1 \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T),$$

$$F_2 \in \underset{0}{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T),\ F_2(x,0) = 0$$

Поскольку $\partial u_1/\partial t(x,0) = 0$, то

$$\partial v_1/\partial t(x,0) = \partial w/\partial t(x,0) = L\,\varphi(x) + f_0(x,0) \in H^{\alpha}(\Gamma).$$

В том случае, когда $\Gamma_T = R_1 \times (0,T)$, можно построить функцию

$$w_1(x_1,t) \in H^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(R_{1T})$$

$$\text{по условиям } w_1(x,0) = 0,\ \partial w_1/\partial t(x,0) = \partial v_1/\partial t(x,0)$$

(см. [4, гл. 4],

$$|w_1|^{(2+\alpha)} \leqslant c(|f_0|^{(\alpha)} + |\varphi|^{(2+\alpha)}).$$

Далее по так определенной функции $w_1(x,t)$ построим решение задачи вида (4):

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \Delta z = 0,\ (x,t)\in R_{2T}^{+};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} = 0, \;\; z - v_3 = w_1(x_1, t), \;\; (x_1, t) \in R_{1T}; \tag{21}$$

$$z(x, 0) = 0, \;\; v_3(x_1, 0) = 0.$$

Функция $v_3(x_1, t) \in \widehat{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}$ и $\partial v_3/\partial t(x, 0) = \partial v_1/\partial t(x, 0)$. В том случае, когда Γ – произвольная кривая класса $H^{3+\alpha}$, с помощью разбиения единицы на Γ, распрямления кусков границы и решения задач вида (21) можно построить функцию

$$v_3(x, t) \in \widehat{H}^{\,2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T), \;\; \partial v_3/\partial t(x, 0) = \partial v_1/\partial t(x, 0)$$

при $x \in \Gamma$ и, кроме того,

$$\|v_3\|_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} \leqslant c(T)\left(|f_0|_{\Omega_T}^{(\alpha)} + |\varphi|_{\Omega}^{(2+\alpha)}\right),$$

$$\langle\, v_3 \,\rangle_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} + \langle\, D_\omega^2\, v_3 \,\rangle_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)} \leqslant c\left(\langle\, f_0 \,\rangle_{\Omega_T}^{(\alpha)} + \langle\, \varphi \,\rangle_{\Omega}^{(2+\alpha)}\right).$$

Если в системе (20) ввести новую неизвестную функцию $v_2(x, t) = v_1(x, t) = v_3(x, t)$ и переобозначить (u_1, v_2) через (u, v), то придем к следующей задаче, эквивалентной исходной задаче (2). Требуется найти функции $u(x, t)$, $v(x, t)$, определенные на Ω_T и Γ_T соответственно, по условиям:

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - L\, u = \Phi_0(x, t), \;\; (x, t) \in \Omega_T; \\ \sum_{i=1}^{2} b_i(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + L_0\, v = \Phi_1(x, t), \\ u - v = \Phi_2(x, t), \;\; (x, t) \in \Gamma_T; \;\; u(x, 0) = 0, \;\; v(x, 0) = 0; \\ \Phi_0 \in \underset{0}{H}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T), \;\; \Phi_1 \in \underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T), \\ \Phi_2 \in \underset{0}{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T), \end{gathered} \tag{22}$$

причем

$$| \;\Phi_0\; |_{\Omega_T}^{(\alpha)} + | \;\Phi_1\; |_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)} + | \;\Phi_2\; |_{\Gamma_T}^{(2+\alpha)} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(| \;f_0\; |_{\Omega_T}^{(\alpha)} + | \;f_1\; |_{\Gamma_T}^{(1+\alpha)} + | \;\varphi\; |_{\Omega}^{(2+\alpha)} + | \;\psi\; |_{\Gamma}^{(3+\alpha)}\right).$$

Доказательство разрешимости системы (22) проводится по схеме, изложенной в [4, гл. 4, §7]. Пусть

$$\mathcal{H}_1 = \underset{0}{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Omega}_T)\underset{0}{\widehat{H}}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T)$$

– банахово пространство с элементами $w=(u,v)$,

$$\mathcal{H}_2=\underset{0}{H}^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)\underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T)\underset{0}{H}^{2+\alpha,(2+\alpha)/2}(\overline{\Gamma}_T)$$

– банахово пространство с элементами $h=(\Phi_0,\Phi_1,\Phi_2)$. Оператор A, задаваемый левыми частясм системы (22), ограниченно действует из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$. В соответствии со схемой построим ограниченный оператор $R:\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_1$, который получается путем склеивания решений модельных задач, соответствующих внутренним и граничным точкам области Ω. Для нашей системы существенной является модельная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x_0^{(k)},0)\frac{\partial^2 u}{\partial z_i\,\partial z_j}=\Phi_0(x,t),\ (z,t)\in R_{2T}^{+};$$

$$\sum_{i=1}^{2}b_i(x_0^{(k)},0)\frac{\partial u}{\partial z_i}+\gamma(x_0^{(k)},0)\frac{\partial^2 v}{\partial z_1^2}=\Phi_1(z,t),$$

$$u-v=\Phi_2(z,t),\ (z,t)\in R_{1T},\quad u(z,0)=0,\ v(z,0)=0;$$

$$\Phi_k\in\underset{0}{H}^{k+\alpha,(k+\alpha)/2},\ k=0,1,2,\ x_0^{(k)}\in\Gamma,$$

которую несложными преобразованиями можно свести к задаче вида (4). С помощью оператора R на малом промежутке времени строится ограниченный оператор A^{-1} в задаче (22), и показывается, что решение системы (2) за конечное число шагов можно построить для любого конечного T, что и доказывает нашу теорему.

Замечание. Решение системы (2) наследует гладкостные свойства решения модельной задачи (4). В модельной задаче

$$\widetilde{v}(\lambda,p)=\widetilde{K}(\lambda,p)\,\widetilde{f}(\lambda,p),\quad \text{где}\quad f(x,t)\in\underset{0}{H}^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}$$

есть некоторая комбинация функций $f_1(x,t)$ и $f_2(x,t)$. Таким образом, вторая производная функции $v(x_1,t)$ по x_1 имеет образ

$$\widetilde{F}(\lambda,p)=-\lambda^2\,\widetilde{K}(\lambda,p)\,\widetilde{f}(\lambda,p)=\lambda\,\widetilde{K}(\lambda,p)\,\widetilde{h}(\lambda,p),\ h\in\underset{0}{H}^{\alpha,\alpha/2}.$$

Если воспользоваться нижними оценками в (9), то можно показать, что

$$|\,D_x^2\,v(x,t)-D_x^2\,v(x,t')\,|\leqslant c\,\gamma^{-1/2}\langle\,h\,\rangle_t^{\alpha/2)}\,(t-t')^{\alpha/2+1/4},$$

что и следовало ожидать, поскольку

$$\frac{\lambda}{\gamma\,\lambda^2+\sqrt{p+\lambda^2}-i\beta\lambda}\sim\frac{\lambda}{(i\gamma^{1/2}\lambda+p^{1/4})^2}\sim\frac{\lambda}{\lambda i\gamma^{1/2}+p^{1/4}}.$$

Тот факт, что $D_x^2\,v(x,t)$ в действительности принадлежит $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}$ является следствием структуры ядра $\widetilde{K}(\lambda,p)$:

$$\widetilde{F}(\lambda,p)=\frac{-\lambda^2\,\widetilde{f}(\lambda,p)}{\gamma\,\lambda^2+\sqrt{p+\lambda^2}-i\beta\lambda}=$$

$$=-\frac{1}{\gamma}\left[\widetilde{f}(\lambda,p)-\frac{(\sqrt{p+\lambda^2}-i\beta\lambda)\widetilde{f}(\lambda,p)}{\gamma\,\lambda^2+\sqrt{p+\lambda^2}-i\beta\lambda}\right],$$

при этом, как мы показали, второе слагаемое имеет прообраз из $H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}$.

В случае $\Omega\subset R_n$, $n\geqslant 3$, мы получим

$$\widetilde{K}(\lambda,p)=\left[\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\,\lambda_i^2+\sqrt{p+|\lambda|^2}-i(\beta,\lambda)\right]^{-1},$$

и, следовательно, $\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i\,v_{x_ix_j}\in H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}$, откуда еще не следует, что $v_{x_ix_j}\in H^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}$, что при выбранном методе необходимо для доказательства разрешимости системы (2). Это означает, что в случае $n\geqslant 3$ вместо пространств $H^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}$ нужно ввести в рассмотрение более специализированные пространства.

Авторы признательны В. А. Солонникову за полезные обсуждения проблемы.

Работа была частично поддержана проектом INTAS 94–2187 и Международным научном фондом (грант U-97000).

Литература

1. В. А. Солонников, *Разрешимость задачи в движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной границей.* — Изв. АН СССР **41, No. 6** (1977), 1388–1424.
2. Б. В. Базалий, *Задача Стефана.* — Докл. АН УССР, сер. А **No. 1** (1986), 3–7.
3. B. I. Kopytko, *Semigroups of operators describing a multidimensional diffusion with partly reflacting barrier on a hyperplane.* — Random Oper. Stovh. Eqs. **1, No. 1** (1992), 95–102.
4. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Наука, М., 1967.

Bazaliy B. V., Kazmin S. N. On one boundary problem with higher derivative at boundary condition for second order parabolic equation.

Existence in the Hölder class of boundary value problem with the second tangential derivatives of solution in the boundary conditions for parabolic second order equation with two spacial variables is proved.

Институт прикладной
математики и механики
НАН Украины, г. Донецк

Поступило 21 мая 1997 г.