М. И. Белишев

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПО ДИНАМИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ ДАННЫМ

Посвящается юбилею
Ольги Александровны Ладыженской

0. Введение

В работе обсуждается возможность восстановления младших членов волнового уравнения внутри области по динамическим наблюдениям на ее границе. Особенность рассматриваемого случая состоит в следующем: эволюция изучаемых динамических систем с граничным управлением определяется *несамосопряженным оператором*. Мы предпринимаем попытку распространить на такие системы наш подход – т.н. ВС-метод,*) основанный на связях обратных задач с теорией граничного управления (см. [1, 5–9]).

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma$ рассмотрим систему

$$u_{tt} - \Delta u - \langle b, \nabla u \rangle = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times (0,T); \tag{0.1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0; \tag{0.2}$$

$$u\big|_{\Gamma\times[0,T]} = f, \tag{0.3}$$

с гладким векторным полем $b = \{b^1, \dots, b^n\}$; пусть $u = u^f(x,t)$ есть решение. Оператор $R^T : f \to \frac{\partial u^f}{\partial \nu}\big|_{\Gamma\times[0,T]}$ (ν – нормаль) играет роль данных обратной задачи.

Мы показываем, что поле b однозначно восстанавливается по оператору R^{2T} в приграничном слое $\Omega^\xi = \{x \in \Omega \mid \mathrm{dist}(x,\Gamma) < \xi\}$, толщина которого $\xi = \xi(T) < T$ определяется геометрией Ω. Этот слой содержится в т.н. зоне Бардоса, описываемой в работе. Решающую роль в восстановлении играет установленное К. Бардосом в 1994 свойство *локальной граничной управляемости* динамической системы (0.1)–(0.3) (см. [3, 4]).

*)от “Boundary Control.”

Последний из известных нам результатов по восстановлению младших членов принадлежит С. Накамура [17]. В части, касающейся уравнений, не содержащих члена с u_t мы перекрываем этот результат: время наблюдения, нужное нам для восстановления, существенно меньше использованного в [17] (см. также [12, 13]).

Работа является шагом на пути обобщения одномерного варианта подхода [1] на многомерные несамосопряженные задачи. Следует заметить, что по степени завершенности наши результаты еще далеки от своих одномерных аналогов.

Результаты работы анонсировались в [7].

С любовью и великим уважением автор посвящает эту работу юбилею Ольги Александровны Ладыженской.

1. Геометрия

В этом разделе приводятся необходимые сведения из геометрии. Вводятся подобласти (зоны Бардоса), в которых будет решаться обратная задача.

1.1. Эйконал и cut locus. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ есть ограниченная область с гладкой (класса C^∞) границей Γ. Функция $\tau : \overline{\Omega} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $\tau(x) := \operatorname{dist}(x, \Gamma)$ называется *эйконалом*.

Пусть ℓ_γ есть прямой луч, выходящий из точки $\gamma \in \Gamma$ внутрь Ω по нормали к границе; $\ell_\gamma[0, s]$ – сегмент луча длины $s \geqslant 0$; $x(\gamma, s)$ – дальний (от Γ) конец этого сегмента. Число $s_* = s_*(\gamma) > 0$ называется *критической длиной*, если $\tau(x(\gamma, s)) = s$ при $s \leqslant s_*$ и $\tau(x(\gamma, s)) < s$ при $s > s_*$. Иными словами, сегмент $\ell_\gamma[0, s]$ минимизирует расстояние от $x(\gamma, s)$ до Γ только при $s \leqslant s_*$.

Точка $x_*(\gamma) := x(\gamma, s_*(\gamma))$ называется точкой раздела луча ℓ_γ. Множество

$$\omega = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} x_*(\gamma)$$

называется *множеством раздела cut locus)* области Ω относительно ее края Γ (см. [10, 11]). Это замкнутое множество нулевой меры:

$$\omega = \overline{\omega}; \quad \operatorname{mes} \omega = 0; \quad \operatorname{dist}(\omega, \Gamma) > 0. \tag{1.1}$$

В Ω рассмотрим расширяющееся семейство подобластей (слоев)

$$\Omega^\xi := \{x \in \Omega \,|\, \tau(x) < \xi\}, \quad \xi > 0.$$

Они исчерпывают область; величину

$$T_* := \inf\left\{\xi > 0 \,\middle|\, \Omega^\xi \supset \Omega\right\}$$

назовем *временем заполнения.*

Слои Ω^ξ ограничены поверхностями уровня эйеонала

$$\Gamma^\xi := \left\{x \in \Omega \,\middle|\, \tau(x) = \xi\right\}, \quad \xi \geqslant 0.$$

($\Gamma^0 = \Gamma$), эквидистантными границе. Части $\Gamma^\xi \setminus \omega$ являются гладкими $(n-1)$-мерными поверхностями; на ω типична потеря гладкости. Сам эйконал может быть негладким только на ω.

1.2. Полугеодезические координаты. Точке $x \in \Omega \setminus \omega$ сопоставим (единственную) ближайшую точку границы $\gamma(x) \in \Gamma$: $\mathrm{dist}(x, \gamma(x)) = \tau(x)$; пару $(\gamma(x), \tau(x))$ назовем *полугеодезическими координатами (п.-г.к.)* точки x (см. [11]).

Фиксируем $x_0 \in \Omega \setminus \omega$; пусть $\gamma(x_0) = \gamma_0$, $\tau(x_0) = \tau_0$. В окрестности точки $\gamma_0 \in \Gamma$ выберем систему локальных координат $\gamma^\mu : \Gamma \to \mathbb{R}$, $\mu = 1, \dots, n-1$. Набор функций $\gamma^1 \circ \gamma(\cdot), \dots, \gamma^{n-1} \circ \gamma(\cdot), \tau(\cdot)$ образует координатную систему в некоторой окрестности точки x_0.

Элементы евклидовых длины и объема в п.-г.к. имеют известный вид:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, d\gamma^\mu\, d\gamma^\nu + (d\tau)^2; \quad dx = \beta\, d\Gamma\, d\tau, \tag{1.2}$$

где $d\Gamma$ – евклидова мера на Γ;

$$\beta = \beta(\gamma, \tau) := \left[\frac{\det\{g_{\mu\nu}(\gamma, \tau)\}}{\det\{g_{\mu\nu}(\gamma, 0)\}}\right]^{1/2}$$

есть якобиан перехода от декартовых координат к п.-г.к.

1.3. Выкройка. С полугеодезическими координатами свяжем отображение $i : \Omega \setminus \omega \to \Gamma \times [0, T_*]$, $i(x) := (\gamma(x), \tau(x))$, являющееся биекцией на свой образ. Множество $\Theta := i(\Omega \setminus \omega)$ назовем *выкройкой* области Ω (см. [6]). Это часть цилиндра $\Gamma \times \{\tau \geqslant 0\}$, ограниченная сверху "берегом" $\theta := \bigcup\limits_{\gamma \in \Gamma} (\gamma, s_*(\gamma))$ – графиком критической длины $s_*(\,\cdot\,)$.

1.4. Изображения. Обозначим $\Sigma := \Gamma \times [0, T_*]$; пусть $x(\gamma, \tau)$ есть точка в $\Omega \setminus \omega$, имеющая данные п.-г.к.; $y(\,\cdot\,)$ – функция на Ω. Функцию $\widetilde{y}$, заданную на Σ правилом

$$\widetilde{y}(\gamma, \tau) := \begin{cases} \beta^{1/2}(\gamma, \tau) y(x(\gamma, \tau)), & (\gamma, \tau) \in \Theta; \\ \qquad 0 \qquad\qquad\quad , & (\gamma, \tau) \in \Sigma \setminus \Theta, \end{cases}$$

назовем *изображением* функции y.

Рассмотрим (вещественные) гильбертовы пространства $\mathcal{H} := L_2(\Omega)$, $\mathcal{F} := L_2(\Sigma)$ и подпространство $\mathcal{F}_\Theta := \{f \in \mathcal{F} \mid \operatorname{supp} f \subset \Theta\}$, состоящее из функций, локализованных на выкройке. Оператор $I : \mathcal{H} \to \mathcal{F}$, $Iy := \widetilde{y}$, корректно определенный в силу (1.1), назовем *оператором изображения*. Перечислим его свойства (см. [9]):

(i) оператор I изометричен; выполнены соотношения

$$(Iy,\, Iv)_{\mathcal{F}} = (y, v)_{\mathcal{H}}; \quad \operatorname{Ran} I = \mathcal{F}_\Theta; \quad I^* I = \mathbb{I}_{\mathcal{H}}; \quad I\, I^* = X_\Theta,$$

где X_Θ есть проектор в $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}_\Theta$, срезающий функции на выкройку;

(ii) сопряженный оператор $I^* : \mathcal{F} \to \mathcal{H}$ действует по правилу

$$(I^* f)(x) = \beta^{-1/2}\big(\gamma(x), \tau(x)\big) f\big(\gamma(x), \tau(x)\big), \quad x \in \Omega \setminus \omega; \tag{1.3}$$

он аннулирует функции $f \in \mathcal{F} \ominus \mathcal{F}_\Theta$, локализованные вне выкройки.

1.5. Зоны Бардоса. Фиксируем $T > 0$ и выделим в Ω прилегающую к границе зону B^T, определяемую следующим образом. Пусть $x \in \Omega$, $\ell_{x,\alpha}$ есть луч, исходящий из x в направлении $\alpha \in S^{n-1}$; $\tau_{x,\alpha}$ – время, за которое точка, движущаяся вдоль луча с единичной скоростью, достигает границы Γ; $\check{\tau}_{x,\alpha}$ есть наименьшее из двух времен $\tau_{x,\alpha}$ и $\tau_{x,-\alpha}$. Множество

$$B^T := \Big\{ x \in \Omega \,\Big|\, \sup_\alpha \check{\tau}_{x,\alpha} < T \Big\}$$

введено Клодом Бардосом в [3]; оно играет важную роль в последующих рассмотрениях.

Зоны B^T расширяются с ростом T, исчерпывая Ω; при достаточно больших T они содержат приграничные слои Ω^ξ $(\xi < T)$. Если область Ω *выпукла*, то последнее имеет место при любом $T > 0$.

Зоны B^T можно ввести для произвольного риманова многообразия с краем, однако в общем случае они могут оказаться пустыми или не исчерпывать его. Препятствием к их расширению служат замкнутые геодезические, отделяющие край от остальной части многообразия.

2. Динамика

Рассматривается динамическая система (0.1)–(0.3). Описывается свойство управляемости системы, играющее ключевую роль при решении обратной задачи.

2.1. Начально-краевая задача. Пусть $b = \{b^1, \dots, b^n\}$, $b^k(\,\cdot\,) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ есть векторное поле в Ω; рассмотрим задачу

$$u_{tt} - \Delta u - \langle\, b, \nabla u \,\rangle = 0 \quad \text{в} \quad Q^T; \tag{2.1}$$

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0; \tag{2.2}$$

$$u\big|_{\Sigma^T} = f, \tag{2.3}$$

в которой $Q^T := \Omega \times (0, T)$; $\Sigma^T := \Gamma \times [0, T]$; f – граничное управление; $u = u^f(x, t)$ – решение (волна). Перечислим известные свойства решения (их можно извлечь из работ [14–16]):

(i) пусть

$$\mathcal{M}^T := \left\{ f \in C^\infty(\Sigma^T) \;\Big|\; \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j f \,\Big|_{t=0} = 0, \quad j = 0, 1, \dots \right\}$$

есть линеал гладких управлений; при $f \in \mathcal{M}^T$ задача (2.1)–(2.3) имеет единственное классическое решение $u^f \in C^\infty(\overline{Q}^{\,T})$;

(ii) отображение $f \to u^f$ непрерывно из $L_2(\Sigma^T)$ в $C([0, T]; L_2(\Omega))$, что позволяет определить обобщенное решение для $f \in L_2(\Sigma^T)$;

(iii) определенное на $\mathcal{M}^T$ отображение $f \to \frac{\partial u^f}{\partial \nu}\big|_{\Sigma^T}$ (ν – внешняя нормаль к Γ) непрерывно из $H^1(\Sigma^T)$ в $L_2(\Sigma^T)$ ($H^\alpha(\dots)$ – соболевский классы).

2.2. Динамическая системы. Рассмотрим задачу (2.1)–(2.3) как динамическую систему (ниже ей приписывается символ “α^T”), сопоставляя ей стандартные атрибуты теории управления – пространства и операторы.

(i) Пространство управлений (входов) $\mathcal{F}^T := L_2(\Sigma^T)$ называется *внешним пространством* системы α^T. В нем выделено семейство расширяющихся подпространств

$$\mathcal{F}^{T,\xi} := \big\{ f \in \mathcal{F}^T \;\big|\; \operatorname{supp} f \subset \Gamma \times [T - \xi, T] \big\}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T,$$

образованных запаздывающими управлениями (ξ – длительность действия управления из $\mathcal{F}^{T,\xi}$).

Проекторы $X^{T,\xi}$ в $\mathcal{F}^T$ на $\mathcal{F}^{T,\xi}$ действуют как срезки:

$$\big(X^{T,\xi} f\big)(\,\cdot\,,t) = \theta\big(t-(T-\xi)\big)(\,\cdot\,,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T;$$

($\theta(\dots)$ – функция Хевисайда). Внешнее пространство содержит гладкий линеал $\mathcal{M}^T$.

(ii) Пространство $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ называется *внутренним*; волны (состояния) $u^f(\,\cdot\,,t)$ суть его элементы (см. п. 2.1, (ii)). В $\mathcal{H}$ выделено семейство подпространств

$$\mathcal{H}^\xi := \big\{y \in \mathcal{H} \;\big|\; \operatorname{supp} y \in \Omega^\xi\big\}, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T.$$

Проекторы G^ξ в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}^\xi$ срезают функции на Ω^ξ:

$$(G^\xi y)(x) = \theta(\xi - \tau(x))\, y(x), \quad x \in \Omega.$$

(iii) Соответствие "вход⟶состояние" в системе α^T реализуется *оператором управления* $W^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}$,

$$W^T f := u^f(\,\cdot\,,T),$$

непрерывным по свойству (ii), п. 2.1.

Независимость коэффициентов волнового уравнения (2.1) от времени приводит к свойству стационарности системы. Пусть W^T и $W^{T'}$ суть операторы управления систем α^T и $\alpha^{T'}$, $T < T'$; введем *оператор запаздывания* $\mathcal{T}^{T,T'} : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^{T'}$,

$$\big(\mathcal{T}^{T,T'} f\big)(\,\cdot\,,t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < T-T'; \\ f(\,\cdot\,,t-(T'-T)), & T'-T \leqslant t \leqslant T', \end{cases}$$

и отметим, что сопряженный к нему действует по правилу

$$\big((\mathcal{T}^{T,T'})^* f\big)(\,\cdot\,,t) = \big(\,\cdot\,,t+(T'-T)\big), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.4}$$

Соотношение стационарности имеет вид:

$$W^T = W^{T'}\,\mathcal{T}^{T,T'}. \tag{2.5}$$

Гиперболичность задачи (2.1)–(2.3) влечет конечность скорости волн: $\operatorname{supp} u^f(\,\cdot\,,\xi) \subset \overline{\Omega}^\xi$. В силу стационарности системы имеем

$$W^T \mathcal{F}^{T,\xi} \subset \mathcal{H}^\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T. \tag{2.6}$$

(iv) Соответствие "вход⟶выход" осуществляется *оператором реакции* $R^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$,

$$\operatorname{Dom} R^T = \big\{f \in H^1(\Sigma^T) \mid f\,|_{t=0} = 0\big\},$$

$$R^T f := \frac{\partial u^f}{\partial \nu}\bigg|_{\Sigma^T},$$

корректно определенным по свойству (iii), п. 2.1. Стационарность системы приводит к соотношению

$$R^T = \left(\mathcal{T}^{T,T'}\right)^* R^{T'} \mathcal{T}^{T,T'} \tag{2.7}$$

$(T < T')$, легко следующему из (2.5).

(v) Оператор $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\operatorname{Dom} L = H^2(\Omega)$,

$$L := \Delta + \langle\, b, \nabla\, \rangle$$

опредлеляет эволюцию системы α^T. В силу стационарности волновое уравнение (2.1) эквивалентно сплетению

$$W^T \frac{\partial^2}{\partial t^2} = L\, W^T \quad \text{на} \quad \mathcal{M}^T. \tag{2.8}$$

Оператор L *несамосопряжен.*

2.3. Приближенная управляемость. Множество

$$\mathcal{U}^\xi := W^T \mathcal{F}^{T,\xi} = \left\{ u^f(\,\cdot\,,\xi) \mid f \in \mathcal{F}^T \right\}$$

называется достижимым к моменту $t = \xi$. Семейство $\mathcal{U}^\xi$, $0 \leqslant \xi \leqslant T$, очевидно, расширяется с ростом ξ, причем $\mathcal{U}^\xi \subset \mathcal{H}^\xi$ (см. (2.6)). Центральным для BC-метода свойством достижимых множеств оказывается их *плотность*:

$$\operatorname{clos} \mathcal{U}^\xi = \mathcal{H}^\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T. \tag{2.9}$$

Как и в самосопряженном случае (с $L = \Delta$) оно устанавливается с использованием фундаментальной теоремы единственности Хольмгрена–Йона–Татару (см. [18]). Вывод (2.9) по схеме Д. Расселла, приведенный в [8] без изменений переносится на случай $L = \Delta + \langle\, b, \nabla\, \rangle$.

О свойстве (2.9) в теории управления говорят, как о *приближенной управляемости* системы α^T. Имеется ввиду, что любая заданная функция $y \in \mathcal{H}^\xi$ может быть сколь угодно точно (в метрике $\mathcal{H}$) аппроксимирована волной $u^f(\,\cdot\,,\xi)$ за счет подбора граничного управления f.

Из свойства (2.9) следует существование т.н. *волновых базисов*, точнее, полных систем волн. Фиксируем $\xi \in (0,T]$; пусть $\{f_j^\xi\}$, $j = 1, 2, \dots$ есть система управлений, полная в $\mathcal{F}^{T,\xi}$:

$$\operatorname{clos} \operatorname{Lin} \{f_j^\xi\} = \mathcal{F}^{T,\xi}$$

(Lin – линейная оболочка); тогда по (2.9) имеем:

$$\operatorname{clos} \operatorname{Lin} \{u^{f_j^\xi}(\,\cdot\,, T)\} = \mathcal{H}^\xi. \tag{2.10}$$

Во внутреннем пространстве системы действуют *волновые проекторы* P^ξ, проектирующие в $\operatorname{clos} \mathcal{U}^T$ на $\operatorname{clos} \mathcal{U}^\xi$. Равенство

$$P^\xi = G^\xi, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T \tag{2.11}$$

является полезной формой записи соотношения (2.9).

2.4. Локальная точная управляемость. Важной особенностью системы α^T является ее *точная управляемость* за достаточно большое время:

$$\mathcal{U}^T = \mathcal{H}^T, \quad T > T_0;$$

где T_0 определяется геометрией области (см. [4]). С другой стороны, будучи *приближенно* управляемой при *всех* временах (см. (2.9)), система заведомо не является *точно* управляемой при малых временах:

$$\mathcal{U}^T \neq \mathcal{H}^T, \quad T < T_*$$

(см. [2]). В свете сказанного интересен и важен следующий промежуточный результат, уточняющий характер управляемости систем вида (2.1)–(2.3).

Пусть D есть компакт в Ω; через $\mathcal{U}_D^T$ обозначим множество сужений $u^f(\,\cdot\,,T)\big|_D$.

Теорема 1 (К. Бардос, 1994). *Для любых $T > 0$ и $D \subset B^T$ справедливо соотношение*

$$\mathcal{U}^T\big|_D = L_2(D). \tag{2.12}$$

Этот результат (см. [3]), образно говоря, означает следующее. Если менять положение малого компакта D в слое Ω^T, заполненном волнами, то множество “вырезок” волны $u^f(\,\cdot\,,T)\big|_D$ становится *богаче* при перемещении D от головной части волн (вблизи их переднего фронта Γ^T) назад к хвостовой части (вблизи Γ).

Сделаем оговорку. Соотношение (2.12) установлено в [3] (с использованием основного результата работы [4]) для волнового уравнения вида

$$u_{tt} - \left(\frac{\partial}{\partial x^k} a^{k\ell} \frac{\partial}{\partial x^\ell}\right) u = 0,$$

Однако, как отмечено в [4], присутствие младших членов не осложняет доказательств.

2.5. Дуальная система. Дуальной к α^T мы называем динамическую систему вида

$$u_{tt} - L_{\#}\, v = 0 \qquad \text{в} \quad Q^T; \tag{2.13}$$

$$v\big|_{t=0} = v_t\big|_{t=0} = 0; \tag{2.14}$$

$$v\big|_{\Sigma^T} = g, \tag{2.15}$$

с оператором

$$L_{\#} := \Delta - \langle\, b, \nabla \,\rangle - \operatorname{div} b,$$

сопряженным к L по Лагранжу. Решение задачи (2.13)–(2.15) обозначим через $v^g = v^g(x,t)$; отвечающие системе $\alpha^T_{\#}$ операторы условимся снабжать индексом: $W^T_{\#}$, $R^T_{\#}$ и т.д. Внешнее и внутреннее пространства у систем α^T и $\alpha^T_{\#}$ общие: $\mathcal{F}^T_{\#} \equiv \mathcal{F}^T$, $\mathcal{H}_{\#} \equiv \mathcal{H}$.

Дуальная система обладает теми же свойствами, что и исходная: для нее выполнены *все* соотношения (2.5)–(2.12).

Операторы реакции систем α^T и $\alpha^T_{\#}$ связаны простым соотношением. Во внешнем пространстве введем оператор $Y^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$,

$$(Y^T f)(\,\cdot\,, t) := f(\,\cdot\,, T-t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

и оператор b_ν, умножающий управления на функцию $b_\nu = b_\nu(\gamma) := \langle\, b(\gamma), \nu(\gamma) \,\rangle$, $\gamma \in \Gamma$. Интегрируя по частям в равенстве

$$0 = \int\limits_{Q^T} dx\, dt \big[u^f_{tt}(x,t) - (Lu^f)(x,t)\big]\, v^g\big(x, T-t\big),$$

нетрудно получить равенство

$$R^T_{\#} = Y^T (R^T)^* \, Y^T + b_\nu, \tag{2.16}$$

справедливое на $\operatorname{Dom} R^T_\# = \operatorname{Dom} R^T = \{f \in H^1(\Sigma^T) \mid f\,|_{t=0} = 0\}$; в нем $(R^T)^*$ – сопряженный к R^T в $\mathcal{F}^T$.

Оператор $C^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$,

$$C^T := (W^T_\#)^* \, W^T$$

называется *связывающим*. Этот термин мотивирован соотношением

$$\big(C^T f, g\big)_{\mathcal{F}^T} = \big(W^T f, W^T_\# \, g\big)_{\mathcal{H}} = \big(u^f(\,\cdot\,,T), v^g(\,\cdot\,,T)\big)_{\mathcal{H}}, \qquad (2.17)$$

связывающим метрики внешнего и внутреннего пространств. Факт, выдвигающий C^T на передний план в нашем подходе состоит в том, что связывающий оператор явно и просто выражается через оператор реакции, играющий роль данных в обратной задаче. Для формулировки результата введем:

(i) оператор реакции $R^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$, отвечающий системе α^{2T} (задаче (2.1)–(2.3) с удвоенным временем);

(ii) оператор нечетного продолжения $S^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^{2T}$,

$$(S^T f)(\,\cdot\,,t) := \begin{cases} f(\,\cdot\,,t), & 0 \leqslant t < T; \\ -f(\,\cdot\,,2T-t), & T \leqslant t \leqslant 2T; \end{cases}$$

(iii) оператор интегрирования $J^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$,

$$(J^{2T} f)(\,\cdot\,,t) := \int\limits_0^t d\eta f(\,\cdot\,,\eta), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T.$$

Теорема 2. *При любом $T > 0$ справедливо представление*

$$C^T f = \frac{1}{2}(S^T)^* \, R^{2T} \, J^{2T} \, S^T f, \quad f \in H^1(\Sigma^T). \qquad (2.18)$$

Способ вывода (2.18) не отличается от приведенного в [1] для одномерного случая. Представление (2.18) по форме то же, что и в самосопряженном случае (см. [6, 8]); возможность прямого обобщения для $L_\# \neq L$ обнаружена С. А. Авдониным.

Формула (2.18) представляет (непрерывный) оператор C^T лишь на плотном множестве; из-за неограниченности R^{2T} она неверна для произвольных $f \in \mathcal{F}^T$. Тем не менее, теорема 2 позволяет утверждать: *связывающий оператор C^T однозначно определяется оператором реакции R^{2T}*.

2.6. Леммы о линеалах. Завершим раздел вспомогательными результатами, непосредственно используемыми в обратной задаче. Они выводятся из свойств управляемости, описанных в п.п. 2.3, 2.4. Из соображений дальнейшего удобства мы относим рассмотрения к дуальной, а не исходной системе.

Фиксируем $\xi \in (0, T)$ и введем подпространства

$$\mathcal{F}_{\perp}^{T,\xi} := \mathcal{F}^T \ominus \mathcal{F}^{T,\xi}; \quad \mathcal{H}_{\perp}^{T,\xi} := \mathcal{H}^T \ominus \mathcal{H}^{T,\xi},$$

совпадающие с $L_2(\Gamma \times [0, T-\xi])$ и $L_2(\Omega^T \setminus \Omega^\xi)$ соответственно; разложим подпространство $\mathcal{H}^T$ в сумму

$$\mathcal{H}^T = \mathcal{H}^\xi \oplus \mathcal{H}_{\perp}^{T,\xi}. \tag{2.19}$$

Лемма 1. *Линеал* $(W_{\#}^T)^* \mathcal{H}^T \subset \mathcal{F}^T$ *распадается в сумму*

$$(W_{\#}^T)^* \mathcal{H}^T = (W_{\#}^T)^* \mathcal{H}^\xi \dot{+} (W_{\#}^T)^* \mathcal{H}_{\perp}^{T,\xi}. \tag{2.20}$$

двух непересекающихся линеалов, причем подпространство $\mathcal{F}_{\perp}^{T,\xi}$ *отделяет слагаемые:*

$$(W_{\#}^T)^* \mathcal{H}^\xi \cap \mathcal{F}_{\perp}^{T,\xi} = \{0\}; \quad (W_{\#}^T)^* \mathcal{H}_{\perp}^{T,\xi} \subset \mathcal{F}_{\perp}^{T,\xi}. \tag{2.21}$$

Доказательство. По известному операторному равенству имеем:

$$\operatorname{Ker}(W_{\#}^T)^* = \mathcal{H} \ominus \operatorname{clos}\operatorname{Ran} W_{\#}^T = (\text{см. (2.9) для } W_{\#}^T) = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}^T,$$

в силу чего $(W_{\#}^T)^*$ действует на подпространство $\mathcal{H}^T$ инъективно, переводя разложение (2.19) в (2.20).

Для любых $g \in \mathcal{F}^{T,\xi}$ и $y \in \mathcal{H}_{\perp}^{T,\xi}$ имеем равенства

$$\big((W_{\#}^T)^* y, g\big) = \big(y, W_{\#}^T g)_{\mathcal{H}} = (\text{см. (2.6) для } W_{\#}^T) = 0,$$

из которых следует второе из соотношений (2.21).

Пусть $g \in (W_{\#}^T)^* \mathcal{H}^\xi \cap \mathcal{F}_{\perp}^{T,\xi}$; в этом случае $g = (W_{\#}^T)^* y$, $y \in \mathcal{H}^\xi$ и, в то же время, $g \perp \mathcal{F}^{T,\xi}$. Поэтому для произвоьного $h \in \mathcal{F}^{T,\xi}$ имеем:

$$0 = (g, h)_{\mathcal{F}^T} = \big((W_{\#}^T)^* y, h\big)_{\mathcal{F}^T} = (y, W_{\#}^T h)_{\mathcal{H}},$$

откуда заключаем, что $y = 0$ в силу плотности $W_{\#}^T \mathcal{F}^{T,\xi}$ в $\mathcal{H}^\xi$ (см. (2.9)). Следовательно, $g = (W_{\#}^T) \cdot 0 = 0$. Лемма доказана.

Следствие. *Каждый элемент $h \in (W^T_\#)^* \mathcal{H}^T$ единственным образом раскладывается в сумму*

$$h = h_1 + h_2; \quad h_1 \in (W^T_\#)^* \mathcal{H}^\xi, \quad h_2 \in \mathcal{F}^{T,\xi}_\perp. \tag{2.22}$$

Свойство точной локальной управляемости дает дополнительную информацию о линеале $(W^T_\#)^* \mathcal{H}^\xi$, фигурирующем в разложениях.

Лемма 2. *Пусть T и $\xi \in (0,T)$ таковы, что имеет место вложение $\overline{\Omega}^\xi \subset B^T$; пусть $\{f^\xi_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$ есть система управлений, полная в $\mathcal{F}^{T,\xi}$. Тогда линеал $(W^T_\#)^* \mathcal{H}^\xi$ замкнут в $\mathcal{F}^T$ и справедливо представление*

$$(W^T_\#)^* \mathcal{H}^\xi = \operatorname{clos} \operatorname{Lin} \{C^T f^\xi_j\}. \tag{2.23}$$

Доказательство. Согласно теореме 1 для $D = \overline{\Omega}^\xi$ имеем:

$$\mathcal{U}^T_\# \big|_{\overline{\Omega}^\xi} = G^\xi W^T_\# \mathcal{F}^T = \text{см. (2.12))} = \mathcal{H}^\xi,$$

т.е. оператор $G^\xi W^T_\#$ имеет *замкнутый* образ, совпадающий с $\mathcal{H}^\xi$. Поэтому сопряженный $(W^T_\#)^* G^\xi$ действует на $\mathcal{H}^\xi$ изоморфно, в силу чего образ $(W^T_\#)^* \mathcal{H}^\xi$ *замкнут.*

Оболочка $\operatorname{Lin} \{W^T f^\xi_j\}$ плотна в $\mathcal{H}^\xi$ по (2.10); поэтому множество

$$(W^T_\#)^* \operatorname{Lin} \{W^T f^\xi_j\} = \operatorname{Lin} \{(W^T_\#)^* W^T f^\xi_j\} = \operatorname{Lin} \{C^T f^\xi_j\}$$

плотно в линеале $(W^T_\#)^* \mathcal{H}^\xi$. Из замкнутости последнего вытекает (2.23). Лемма доказана.

Разложение (2.22) сыграет центральную роль в обратной задаче. Представление (2.23) даст возможность, располагая связывающим оператором, восстановить в $\mathcal{F}^T$ линеал $(W^T_\#)^* \mathcal{H}^\xi$.

3. Амплитудный интеграл

Описывается операторная конструкция, решающая обратную задачу.

Операторные суммы и интеграл. Напомним, что срезающие проекторы $X^{T,\xi}$ и G^ξ, действующие в $\mathcal{F}^T$ и $\mathcal{H}$ соответственно, введены в п. 2.2, (i) и (ii).

Выберем разбиение $\Xi := \{\xi_j\}$, $j = 0, 1, \dots, N : 0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = T$ временнóго интервала $[0, T]$; пусть $r(\Xi) := \max(\xi_j - \xi_{j-1})$ есть его ранг. Разбиению отвечают два набора проектов

$$\Delta_j\, X^{T,\xi} := X^{T,\xi_j} - X^{T,\xi_{j-1}}; \quad \Delta_j\, G^{\xi} := G^{\xi_j} - G^{\xi_{j-1}}$$

в $\mathcal{F}^T$ и $\mathcal{H}$. Образуем сумму

$$A^T_\Xi := \sum_{j=1}^{N} \Delta_j\, G^{\xi}\, W^T\, \Delta_j\, X^{T,\xi}, \tag{3.1}$$

являющуюся оператором из $\mathcal{F}^T$ в $\mathcal{H}$. Нетрудно убедиться, что он ограничен: $\|A^T_\Xi\| \leqslant \|W^T\|$; $\operatorname{Ran} A^T_\Xi \subset \mathcal{H}^T$.

Опишем предел, к которому стремятся суммы (3.1) при измельчении разбиения. С векторным полем b свяжем функцию Φ, определенную в $\Omega \setminus \omega$ по следующему правилу:

$$\Phi(x) := \frac{1}{2} \int\limits_{\ell_{\gamma(x)}[0,\tau(x)]} |\, ds\,|\, \langle\, b(s), \nabla\tau(s)\,\rangle,$$

где интегрирование ведется по сегменту кратчайшего луча, соединяющего x с Γ; затем определим функцию

$$\varepsilon(x) := e^{\Phi(x)}, \quad x \in \Omega \setminus \omega.$$

Последняя определяет оператор умножения $\widehat{\varepsilon} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $\widehat{\varepsilon} y = \varepsilon(\,\cdot\,) y(\,\cdot\,)$.

Нам удобно ввести редуцированный оператор изображения $I^T : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^T$, действующий по правилу

$$I^T\, y := \widetilde{y}\big|_{\Sigma^T},$$

где $\widetilde{y}$ – “полное” изображение функции y (см. п. 1.4). Для сопряженного $(I^T)^* : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^T$ из представления (1.3) нетрудно получить:

$$\big((I^T)^*\, f\big)(x) = \begin{cases} \beta^{-1/2}(\gamma(x), \tau(x)) f(\gamma(x), \tau(x)), & x \in \Omega^T \setminus \omega; \\ 0, & \text{для остальных } \; x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Отметим легко проверяемое равенство

$$(I^T)^*\, I^T = G^T; \tag{3.3}$$

напомним действие оператора $Y^T : (Y^T f)(\,\cdot\,, t) = f(\,\cdot\,, T{-}t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Теорема 3. *При измельчении разбиения суммы* (3.1) *сходятся к пределу*

$$A^T := \lim_{r(\Xi)\to 0} A^T_\Xi = \widehat{\varepsilon}^{\,-1}\,(I^T)^*\,Y^T \tag{3.4}$$

в смысле слабой операторной сходимости.

Предельный оператор называется *амплитудным интегралом* и обозначается

$$A^T = \int\limits_0^T dG^\xi\, W^T\, dX^{T,\xi}.$$

Мы опускаем доказательство теоремы 3, поскольку оно вполне аналогично предложенному в работе [9] для самосопряженного случая (см. также [8]). Однако, для полноты изложения, в п. 3.2 приводятся соображения эвристического характера, проясняющие динамическую природу конструкции A^T и составляющие идейную основу доказательства.

3.2. Распространение разрывов; геометрическая оптика. Наши рассмотрения относятся к хорошо известному факту: в гиперболической системе (2.1)–(2.3) разрывные управления порождают разрывные волны. Разрывы распространяются вдоль лучей от Γ внутрь Ω.

Выберем гладкое управление $f \in \mathcal{M}^T$, фиксируем $\xi \in (0,T)$ и обозначим через

$$f_\xi(\,\cdot\,,t) := (X^{T,\xi} f)(\,\cdot\,,t) = \theta(t-(T-\xi))f(\,\cdot\,,t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

срезку f на $\Gamma\times[T-\xi,T]$. Управление f_ξ, вообще говоря, разрывно при $t = T-\xi$:

$$f_\xi(\gamma,t)\Big|_{t=T-\xi-0}^{t=T-\xi+0} = f(\gamma, T-\xi) - 0, \quad \gamma\in\Gamma. \tag{3.5}$$

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.3), в которой в качестве управления взята срезка f_ξ. Ее решение u^{f_ξ} локализовано в пространственно-временном цилиндре Q^T *над* характеристической поверхностью

$$\mathcal{X}^{T,\xi} := \Big\{(x,t)\in Q^T \;\Big|\; t = \tau(x) + (T-\xi)\Big\}.$$

Сама характеристика *несет разрыв решения*: близи $\mathcal{X}^{T,\xi}$ (и вне малой окрестности множества $\omega \times (0,T)$) имеем известное представление геометрической оптики

$$u^{f_\xi}(x,t) = \varepsilon^{-1}(x)\beta^{-1/2}\big(\gamma(x),\tau(x)\big)\times$$
$$\times f\big(\gamma(x),t-\tau(x)\big)\theta\big(t-\tau(x)-(T-\xi)\big)+\dots, \tag{3.6}$$

в котором опущено слагаемое, аннулирующееся на $\mathcal{X}^{T,\xi}$ (см., например, [19]; в [9] можно найти доказательство, принадлежащее А. П. Качалову).

В финальный момент волна $u^{f_\xi}(\,\cdot\,,T)$ локализована в подобласти Ω^ξ; согласно (3.6) на своем переднем фронте, – поверхности Γ^ξ, – она имеет разрыв, амплитуда которого определяется разрывом управления (3.5) и множителем $\varepsilon^{-1}\,\beta^{-1/2}$, определяемых полем b и расходимостью поля лучей ℓ_γ. В тонком слое $\Omega^\xi\backslash\Omega^{\xi-\Delta\xi}$, примыкающем к Γ^ξ имеем представление

$$u^{f_\xi}(x,T) = \varepsilon^{-1}(x)\beta^{-1/2}\big(\gamma(x),\tau(x)\big)f\big(\gamma(x),T-\tau(x)\big)+\dots \tag{3.7}$$

(опущен член, аннулирующийся на Γ^ξ).

Обратимся к сумме (3.1); рассмотрим ее отдельное слагаемое на $f\in\mathcal{M}^T$. По свойству (2.6) имеем

$$\big(G^{\xi_j}-G^{\xi_{j-1}}\big)W^T\,X^{T,\xi_{j-1}}=0,$$

откуда

$$\Delta_j\,G^\xi\,W^T\,\Delta_j\,X^{T,\xi}\,f = \Delta_j\,G^\xi\,W^T\,X^{T,\xi_j}f = \Delta_j\,G^\xi\,u^{f_{\xi_j}}(\,\cdot\,,T).$$

Волна $u^{f_{\xi_j}}(\,\cdot\,,T)$ имеет разрыв на Γ^{ξ_j}; проектор $\Delta_j G^\xi$ “вырезает” часть волны, локализованную в слое $\Omega^{\xi_j}\setminus\Omega^{\xi_{j-1}}$, где действует предствление (3.7):

$$\big(\Delta_j\,G^\xi\,W^T\,\Delta_j\,X^{T,\xi}\,f\big)(x) =$$
$$\begin{cases} \varepsilon^{-1}(x)\beta^{-1/2}\big(\gamma(x),\tau(x)\big)f\big(\gamma(x),T-\tau(x)\big)+\dots, & x\in\big[\Omega^{\xi_j}\backslash\Omega^{\xi_{j-1}}\big]\backslash\omega;\\ 0 & \text{для остальных}\quad x\in\Omega. \end{cases}$$

Суммируя “послойно” слагаемые и удерживая лишь главные члены, мы приходим к приближенному равенству

$$\big(A^T_\Xi\,f\big)(x)\approx$$
$$\begin{cases} \varepsilon^{-1}(x)\beta^{-1/2}\big(\gamma(x),\tau(x)\big)f\big(\gamma(x),T-\tau(x)\big), & x\in\Omega^T\setminus\omega;\\ 0 & \text{для остальных}\quad x\in\Omega. \end{cases}$$

правая часть которого совпадает с $\widehat{\varepsilon}^{-1}(I^T)^* Y^T f$ (см. (3.2)). Поэтому сходимости (3.4) следует ожидать.

Происходящее в конструкции A^T суммирование амплитуд разрывов волн, распространяющихся в системе α^T, мотивирует используемый нами термин – *амплитудный интеграл*.

Заметим, что геометрическая оптика позволяет контролировать форму волны вблизи переднего фронта. Используя представление (3.7), можно показать, что для любой точки $x_0 \in \Omega^T \setminus \omega$ возможен выбор управлений $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}^T$ такой, что векторы и $\nabla u^{f_1}(x_0, T), \dots, \nabla u^{f_n}(x_0, T)$ составят базис в $\mathbb{R}^n$.

3.3. Оператор управления в форме амплитудного интеграла. Для дуальной системы $\alpha^T_\#$ теорема 3 дает представление

$$A^T_\# = \int_0^T dG^\xi \, W^T_\# \, dX^{T,\xi} = \widehat{\varepsilon}(I^T)^* Y^T$$

(изменение степени $\widehat{\varepsilon}$ объясняется заменой поля b на $-b$ при переходе от L к $L_\#$). Переходя к сопряженным операторам, имеем:

$$\int_0^T dX^{T,\xi} \, (W^T_\#)^* \, dG^\xi = Y^T \, I^T \, \widehat{\varepsilon},$$

откуда, с учетом (3.3), получаем соотношение

$$G^T \, \widehat{\varepsilon} = (I^T)^* \, Y^T \int_0^T dX^{T,\xi} \, (W^T_\#)^* \, dG^\xi. \tag{3.8}$$

Умножая справа на W^T и учитывая равенства

$$G^T \, \widehat{\varepsilon} W^T = \widehat{\varepsilon} G^T \, W^T = (\text{см. } (2.6) \quad \text{для } \xi = T) = \widehat{\varepsilon} \, W^T,$$

приходим к представлению

$$\widehat{\varepsilon} W^T = (I^T)^* \, Y^T \int_0^T dX^{T,\xi} \, (W^T_\#)^* \, dG^\xi \, W^T. \tag{3.9}$$

Подготовим найденные представления к использованию в обратной задаче. Пусть $1(\cdot) = 1$ есть единичная функция на Ω;

$\varepsilon^T := G^T\varepsilon$ – срезка функции ε на Ω^T; отметим, что $\varepsilon^T = G^T\,\widehat{\varepsilon}\,1$. Применяя обе части (3.8) к единичной функции, учитывая равенство (2.11) (управляемость!) и независимость $(W^T_\#)^*$ от переменной интегрирования, получаем:

$$\varepsilon^T = (I^T)^*\,Y^T \int_0^T dX^{T,\xi}\, d\big[(W^T_\#)^*\,P^\xi 1\big]. \tag{3.10}$$

Далее, введем семейство операторов

$$\Pi^{T,\xi} := (W^T_\#)^*\,P^\xi\,W^T, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant T;$$

используя их и еще раз обращаясь к (2.11) преобразуем представление (3.9) к виду:

$$W^T = \widehat{\varepsilon}^{\,-1}(I^T)^*\,Y^T \int_0^T dX^{T,\xi}\, d\Pi^{T,\xi}. \tag{3.11}$$

Стоит заметить, что в правой части (3.11) реально присутствуют значения функции ε, принимаемые ею *только* в подобласти Ω^T.

Как и в (3.4), интегралы в представлениях (3.10) и (3.11) сходятся в слабом смысле.

Ниже, в ходе решения обратной задачи, мы найдем по ее данным интегралы, входящие в (3.10), (3.11). Это даст возможность определить $\varepsilon\big|_{\Omega^T}$ и, затем, восстановить оператор управления W^T.

4. Обратная задача

Описывается процедура восстановления векторного поля по оператору реакции. Приводится обобщение для волнового уравнения с младшими членами первого и нулевого порядка.

4.1. Основная теорема. Сформулируем главный результат работы. Напомним, что зоны Бардоса B^T определены в п. 1.5.

Теорема 4. *Пусть положительные времена T, T' таковы, что зона $B^{T'}$ содержит слой $\overline{\Omega}^T$; тогда оператор реакции $R^{2T'}$ однозначно определяет векторное поле b в Ω^T.*

Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 4. Оно дается в форме процедуры, приводящей к восстановлению $b\big|_{\Omega^T}$.

4.2. Восстановление линеалов $(W_{\#}^T)^*\mathcal{H}^\xi$. По оператору $R^{2T'}$ найдем, используя представление (2.18), оператор $C^{T'}$. Фиксируем $\xi \in (0,T)$; в подпространстве $\mathcal{F}^{T',\xi} \subset \mathcal{F}^{T'}$ выберем полную систему управлений $\{f_j^\xi\}$ и восстановим в $\mathcal{F}^{T'}$ линеал $(W_{\#}^{T'})^*\mathcal{H}^\xi$ по представлению (2.23).

Искомый линеал $(W_{\#}^T)^*\mathcal{H}^\xi$ в $\mathcal{F}^T$ найдем с помощью редукции: согласно (2.5) имеем

$$(W_{\#}^T)^*\mathcal{H}^\xi = (\mathcal{T}^{T,T'})^*\,(W_{\#}^{T'})^*\mathcal{H}^\xi, \quad 0 < \xi \leqslant T.$$

4.3. Нахождение функции ε^T. Для определения $\varepsilon\big|_{\Omega^T}$ будет использовано представление (3.10). Входящие в него операторы I^T, Y^T и $X^{T,\xi}$ в ситуации обратной задачи *известны* и остается лишь найти семейство элементов $(W_{\#}^T)^* P^\xi 1$, $0 \leqslant \xi \leqslant T$. Мы сделаем это в два приема.

(i) Сначала найдем элемент $(W_{\#}^T)^* 1$. В $\mathcal{F}^T$ введем функцию $\varkappa^T = \varkappa^T(\gamma,t) := T - t$, $0 \leqslant t \leqslant T$; отметим легко проверяемое включение $\varkappa^T \in \operatorname{Dom}(R^T)^* = \operatorname{Dom}(R_{\#}^T)^*$.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$(W_{\#}^T)^* 1 = Y^T R^T Y^T \varkappa^T. \tag{4.1}$$

Доказательство. Для произвольного $g \in \mathcal{M}^T$ имеем соотношения

$$\big((W_{\#}^T)^* 1, g\big)_{\mathcal{F}^T} = (1, W_{\#}^T g)_{\mathcal{H}} = \int\limits_\Omega dx\, v^g(x,t) =$$

$$= \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^T dt (T-t) v_{tt}^g(x,t) = \int\limits_0^T dt(T-t)\int\limits_\Omega dx (L_{\#}\, v^g)(x,t) =$$

$$= \int\limits_0^T dt(T-t)\int\limits_\Gamma d\Gamma\left[\frac{\partial v^g}{\partial \nu}(\gamma,t) - b_\nu(\gamma)\, b^g(\gamma,t)\right] = \big(\varkappa^T, R_{\#}^T g - b_\nu\, g\big)_{\mathcal{F}^T} =$$

$$= \text{см. (2.16))} = \big(Y^T R^T Y^T \varkappa^T, g\big)_{\mathcal{F}^T}.$$

Сопоставляя начало и конец выкладки и учитывая плотность $\mathcal{M}^T$ в $\mathcal{F}^T$, получаем (4.1). Лемма доказана.

В обратной задаче оператор R^T $(T < T')$ известен (см. (2.7)); значит, элемент $(W^T_{\#})^*\,1$ соотношением (4.1) *определен.*

(ii) Располагая линеалом $(W^T_{\#})^*\,\mathcal{H}^\xi$, найдем разложение вида (2.22):

$$(W^T_{\#})^*\,1 = h_1 + h_2; \quad h_1 \in (W^T_{\#})^*\,\mathcal{H}^\xi, \quad h_2 \in \mathcal{F}^{T,\xi}_\perp. \tag{4.2}$$

С другой стороны, имеем представление

$$1 = P^\xi\,1 + \big[P^T - P^\xi\big]1 + \big[\mathbb{I}_{\mathcal{H}} - P^T\big]1, \tag{4.3}$$

в котором слагаемые входят в подпространства $\mathcal{H}^\xi$, $\mathcal{H}^{T,\xi}_\perp$ и $\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}^T$ соответственно. В силу (2.9) (для $\mathcal{U}^T_{\#} = W^T_{\#}\,\mathcal{F}^T$) имеем:

$$\mathcal{H}\ominus\mathcal{H}^T = \mathcal{H}\ominus \operatorname{clos}\operatorname{Ran} W^T_{\#} = \operatorname{Ker}(W^T_{\#})^*;$$

значит, третье слагаемое (4.3) аннулируется оператором $(W^T_{\#})^*$. Применяя последний, получаем представление

$$(W^T_{\#})^*\,1 = (W^T_{\#})^*\,P^\xi\,1 + (W^T_{\#})^*\big[P^T - P^\xi\big]1, \tag{4.4}$$

слагаемые в котором входят в $(W^T_{\#})^*\,\mathcal{H}^\xi$ и $(W^T_{\#})^*\,\mathcal{H}^{T,\xi}_\perp \subset \mathcal{F}^{T,\xi}_\perp$ соответственно. По единственности такого разложения, сравнивая (4.2) и (4.4) заключаем, что $h_1 = (W^T_{\#})^*\,P^\xi\,1$, т.е. искомый элемент найден.

Меняя ξ и повторяя разложение (4.2), восстановим в $\mathcal{F}^T$ семейство $(W^T_{\#})^*\,P^\xi\,1$, $0 \leqslant \xi \leqslant T$. Используя его в (3.10), определим функцию ε в Ω^T.

4.4. Восстановление W^T. Выберем $f \in \mathcal{M}^T$ и найдем разложение вида (2.22):

$$C^T f = h_1 + h_2; \quad h_1 \in (W^T_{\#})^*\,\mathcal{H}^\xi, \quad h_2 \in \mathcal{F}^{T,\xi}_\perp.$$

С другой стороны, имеем разложение

$$C^T f = (W^T_{\#})^*\,W^T f = (W^T_{\#})^*\,P^\xi\,W^T f + (W^T_{\#})^*\big[\mathbb{I}_{\mathcal{H}} - P^\xi\big]W^T f$$

того же вида, откуда с необходимостью заключаем:

$$h_1 = (W^T_{\#})^*\,P^\xi\,W^T\,f = \Pi^{T,\xi} f.$$

Получив семейство $\Pi^{T,\xi} f$, $0 \leqslant \xi \leqslant T$ и зная найденную на предыдущем шаге функцию $\varepsilon\big|_{\Omega^T}$, определим $W^T\,f$ с помощью (3.11). Проводя расширение по непрерывности (с $\mathcal{M}^T$), определим действие W^T на *всем* $\mathcal{F}^T$. Оператор управления восстановлен.

4.5. Восстановление поля. Соотношение (2.8) определяет оператор L на множестве гладких волн $u^f(\,\cdot\,,T)\in W^T\mathcal{M}^T$. Как можно показать, оно достаточно богато, чтобы, варьируя f, определить компоненты поля $b^1,\dots,b^n$ из волнового уравнения (ср. с заключительным замечанием п. 3.2). Итак, поле $b\big|_{\Omega^T}$ восстановлено; *обратная задача решена.*

4.6. Обобщения. Обсудим возможность восстановления *всех* младших членов в уравнении

$$u_{tt}-\Delta u-\langle\, b,\nabla u\,\rangle+qu=0 \tag{5.1}$$

по оператору реакции. Ничего не меняя в описанной выше схеме, мы суммем восстановить операторы $\Pi^{T,\xi}$, а по ним оператор $\widehat{\varepsilon}\,W^T$ (см. (3.11)). Далее, из сплетения (2.8) определяется оператор

$$\widehat{\varepsilon}L\widehat{\varepsilon}^{-1}=\Delta+\langle\, b',\nabla\,\rangle-q'$$

с коэффициентами

$$b'=b+2\varepsilon\nabla\varepsilon^{-1};\quad q'=q-\langle\, b,\varepsilon\nabla\varepsilon^{-1}\,\rangle-\varepsilon\Delta\varepsilon^{-1}, \tag{5.2}$$

который среди прочих операторов такого вида выделен тем, что отвечающее ему поле b' имеет нулевую проекцию на нормальные лучи ℓ_γ. Подчеркнем, что на *однозначное* восстановление b и q рассчитывать и не приходится, поскольку замена $u\to\chi u$ ($\chi\in C^\infty(\overline{\Omega})$; $\chi>0$ в Ω; $\chi\equiv1$ вблизи Γ) в волновом уравнении приводит к динамической системе с тем же оператором реакции R^T, но другим оператором эволюции $\chi L\chi^{-1}$. Сказанное приводит к следующему результату.

Теорема 5. *Пусть времена T, T' таковы, что зона $B^{T'}$ содержит слой $\overline{\Omega}^T$; тогда оператор R^{2T} определяет коэффициенты уравнения* (5.1) *в Ω^T с точностью до преобразования* (5.2).

Теорема без проблем обобщается на случай риманова многообразия с краем, в котором имеются зоны Бардоса, содержащие слои Ω^T.

4.7 Гипотезы. В самосопряженном случае ВС-метод дает оптимальный по времени результат: по оператору R^{2T} коэффициенты восстанавливаются в Ω^T (см. [6, 8]). Результат же данной работы далек от оптимального и есть основания полагать, что он может быть усилен. Мы намеренно построили изложение так, чтобы выделить ключевой момент – нахождение линеалов $(W_\#^T)^*\mathcal{H}^\xi$. Если будет найден способ извлекать их из R^{2T} (а не $R^{2T'}$), то неулучшаемый результат, – восстановление в области Ω^T, захваченной волнами, – будет немедленно получен. Такую возможность открыл бы положительный ответ на любой из следующих вопросов:

(i) верно ли, что

$$\left[\operatorname{clos}(W^T_{\#})^*\,\mathcal{H}^{\xi}\right]\cap\mathcal{F}^{T,\xi}_{\perp}=\{0\}$$

при любом $T>0$?

(ii) верно ли, что подпространство $\mathcal{F}^T\ominus\operatorname{clos}(W^T_{\#})^*\,\mathcal{H}^{\xi}$ нетривиально при любом $T>0$, а его образ при отображении оператором W^T плотен в $\mathcal{H}^{T,\xi}_{\perp}$?

Второй вопрос равносилен проблеме существования управлений $f\in\mathcal{F}^T$, порождающих волны "без хвостов": $\operatorname{supp}u^f(\,\cdot\,,T)\subset\Omega^T\setminus\Omega^{\xi}$.

4.8. Замечания. Результаты работы анонсировались на конференциях "Boundary Control and Inverse Problems" (ММИ им. Л. Эйлера; Санкт-Петербург, июль–август 1996 г.) и "Control and Partial Differential Equations" (CIRM–Luminy, 16–20 June, 1997).

Обобщение схемы BC-метода на динамические задачи с несамосопряженными операторами началось с работы [1]. Начальный этап исследования многомерного случая проведен автором совместно с С. А. Авдониным. Я признателен ему за сотрудничество.

Литература

1. S. Avdonin, M. Belishev, — Control and Cybernetics **25, No. 3** (1996), 429–440, *Boundary control and dynamical inverse problem for nonselfadjoint Sturm–Liouville operator.*
2. С. А. Авдонин, М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Управляемость в заполненной области для многомерного волнового уравнения с сингулярным граничным управлением.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **210** (1994), 7–21.
3. C. Bardos, M. Belishev, *The wave Shaping Problem.* PDE and functional analysis (in the Memory of P. Grisvard). Progress in Nonlinear Diff. Equations and their Applications, 22 (1995), 41–59.
4. C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary.* — SIAM J. Control and Optimization **30, No. 5** (1992), 1024–1065.
5. М. И. Белишев, *Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения.* — ДАН СССР **297, No. 3** (1987), 524–527.

6. М. И. Белишев, *Граничное управление и продолжение волновых полей.* Препринт ЛОМИ Р-1-90, 41 с.
7. M. I. Belishev, *Boundary control and dynamical reconstruction of vector fields (the BC-method).* Proceedings of the Conference "Control and PDE", CIRM–Luminy, 16–20 June, 1997.
8. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics.* — Inverse Problems **13, No. 5** (1997), 3–49.
9. М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Операторный интеграл в многомерной спектральной обратной задаче.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **215** (1994), 9–37.
10. Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер, *Риманова геометрия в целом.* Мир, М., 1971, 343 с.
11. P. Hartman, *Geodesic parallel coordinates in the large.* — Am. J. Math. **86, No. 4** (1964), 705–727.
12. V. Isakov, *An inverse hyperbolic problem with many boundary measurements.* — Comm. PDE **16** (1991), 1183–1195.
13. V. Isakov, Z. Sun, *Stability estimates for hyperbolic inverse problems with local boundary data.* — Inverse Problems **8** (1992), 193–206.
14. О. А. Ладыженская, *Смешанная задача для гиперболического уравнения.* ГИТТЛ, М., 1953, 279 с.
15. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* М., Наука, 1973, 408 с.
16. I. Lasiecka, J.-L. Lions, R. Triggiani, *Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators.* — J. Math. and Pures et Appl. **65**, (1986), 149–192.
17. S. Nakamura, *Uniqueness for an inverse hyperbolic problem.* — Jpn. J. Math. **22, No. 2** (1996), 257–261.
18. D. Tataru, *Unique continuation for solutions to PDE's; between Hörmander theorem and Holmgren's theorem.* — Comm. PDE **20** (1995), 855–884.
19. Б. Р. Вайнберг, *Асимптотические методы в уравнениях математической физики.* Наука, М., 1982, 294 с.

Belishev M. I. On a uniqueness of the recovering low-order terms in the wave equation via dynamical boundary measurements.

An approach to the dynamical inverse problems based upon their relations to the Boundary Control Theory (so-called BC-method) is developed. The method is applied to the problem of reconstruction of a vector field in a domain via the response operator (the dynamical Dirichlet-to-Neumann map). A peculiarity of the case under consideration is that the operator which governs an evolution of the corresponding dynamical system is nonselfadjoint. The paper gives a brief description of technique of the BC-method.

С.-Петербургское отделение
Математического института РАН

Поступило 6 октября 1997 г.