А. И. Виноградов

ГИПОТЕЗА ПЕТЕРСОНА ДЛЯ НУЛЕВОГО ВЕСА I

Ольге Александровне Ладыженской

Введение

В этой работе будут сохранены обозначения из работ [1–4]. В частности, в работе [4] было получено равенство (3.2) в котором вектор $L_n(\omega)$ собственного числа λ_n выражен через весь остальной спектр, плюс арифметические суммы. Это представление позволит нам получить гипотезу Петерсона для нулевого веса в этой работе. При этом в связи ц делением равенства (3.2) [4] на спектральную и арифметическую часть, вся работа так же разбита на две части: оценка спектральных компонент в части I и оценка арифметических сумм в части II.

Для простоты мы ограничимся группой $SL(2,\mathbb{Z})$, т.к. переход к общей конгруэнц-группе не вносит каких-то существенных изменений в схему счета, усложняется только техника оценок непрерывной компоненты из-за роста числа вершин фундаментальной области. При этом надо помнить о замечаниях в конце работы [4], сделанных для группы $SL(2,\mathbb{Z})$.

Из определения (2.3) [4] получаем:

$$L_n(\omega)=\overset{\infty}{L}_n(\omega)\cdot\overset{\infty}{\varphi}_n(z_n). \tag{0.1}$$

Из равенств (1.13) [4] и (2.19) [2] следует:

$$\begin{aligned}\overset{\infty}{\varphi}_n(z_n)&={}^t\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{\pi}\Big)\cdot\sin\pi z_n\\ \overset{\infty}{L}_n(\omega)&={}^t(\hat{L}_n,\check{L}_n)(\omega).\end{aligned}$$

Кроме того $z_n=\frac{1}{2}+i\varkappa_n$ (см. [2], (1.14)–(1.15)), поэтому $\sin\pi z_n=\operatorname{ch}\pi\varkappa_n$.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант No. 96-01-00679, С.-Петербург, Россия.

С учетом этих равенств (0.1) принимает вид:

$$L_n(\omega) = {}^t\big(\frac{1}{2}\hat{L}_n(\omega), \frac{1}{\pi}\check{L}_n(\omega)\big) \cdot \operatorname{ch} \pi\varkappa_n. \tag{0.2}$$

Из равенств (2.14) и (2.16) [2] получаем:

$$\begin{aligned} \hat{L}_n(\omega) &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant j_n} \alpha_j \cdot t_j(l) \cdot \overline{L_j(\bar{\omega}_1)} \cdot L_j(\omega_2) \\ \check{L}_n(\omega) &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant j_n} \xi_j \cdot \alpha_j \cdot t_j(l) \cdot L_j(\omega_1) \cdot L_j(\omega_2). \end{aligned} \tag{0.3}$$

Для упрощения формул мы опустили второй индекс “n” в правых частях (0.3), по сравнению с [2], т.к. n – фиксировано.

Из равенств (0.3) видно, что вектор $L_n(\omega)$ имеет три свободных параметра: целое число $l \geqslant 1$ и два комплексных параметра ω_1 и ω_2 объединенных в один вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Параметрами вектора ω распорядимся следующим образом: пусть

$$\omega_2 = \bar{\omega}_1, \tag{0.4}$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Если вспомнить, что ω_1 и ω_2 линейно выражается через исходные вспомогательные параметры $s_1 = 1/2 + it_1$ и $s_2 = 1/2 + it_2$ с помощью равенств: (см. (0.9) [2])

$$\omega_1 = s_2 + s_1 - 1/2, \quad \omega_2 = s_2 - s_1 + 1/2,$$

тогда условие (0.4) означает, что $s_2 = 1/2$, поэтому

$$\begin{aligned} \omega_1 &= s_1 = 1/2 + it_1 \\ \omega_2 &= \bar{s}_1 = 1 - s_1 = 1/2 - it_1. \end{aligned} \tag{0.5}$$

В результате равенство (0.2) принимает вид:

$$L_n(\omega) = \operatorname{ch} \pi\varkappa_n \cdot \sum_{1 \leqslant j \leqslant j_n} \alpha_j \cdot t_j(l) \cdot \overset{\infty}{L}_j(\omega), \tag{0.6}$$

где

$$\overset{\infty}{L}_j(\omega) = {}^t\big(\frac{1}{2}|L_j(s_1)|^2, \frac{\xi_j}{\pi} L_j(\bar{s}_1) \cdot L_j(s_1)\big).$$

Ряды Гекке $L_j(s_1)$ ведут себя не регулярно на прямой $\operatorname{Re} s_1 = 1/2$, поэтому вектор (0.6) следует усреднить интегрально по мнимой части $t_1 = \operatorname{Im} s_1$. Но прежде, чем это сделать, напомним, что в левой части равенства (3.2) [4] стоит линейная комбинация:

$$\left[\eta_n(\omega) + O\left(\frac{1}{T^k}\right)\right] L_n(\omega) + \left[\varepsilon_n(\omega) + O\left(\frac{1}{T^k}\right)\right] \delta \cdot L_n(\omega), \tag{0.7}$$

где L_n из (0.1), $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Поэтому операцию интегрального усреднения следует применять ко всему вектору (0.7), главной частью которого является вектор

$$\eta_n(\omega) \cdot L_n(\omega) \equiv (\eta_n \cdot L_n)(\omega). \tag{0.8}$$

В правой части тождества (0.8) мы придали векторному коэффициенту $\eta_n(\omega)$ вид линейного оператора умножения для удобства вычислений.

В связи со вторым равенством (0.5) для параметра $u_2 = \operatorname{Im} \omega_2$ из (2.17) [4] справедливо равенство: $u_2 = -t_1$, поэтому (2.17) [4] принимает вид:

$$\eta_n(\omega) = -{}^t(\operatorname{th} \pi t_1 - \operatorname{th} \pi \varkappa_n ; \operatorname{th} \pi t_1 + \operatorname{th} \pi \varkappa_n)\frac{i}{2} + O\left(\frac{1}{|s_1|}\right). \tag{0.9}$$

Для гиперболического тангенса справедлива асимптотика:

$$\operatorname{th} \pi t_1 = \operatorname{sign} t_1 + O(e^{-\pi |t_1|}), \quad |t_1| \to \infty,$$

подставляя ее в (0.9) получаем:

$$\eta_n(\omega) = -{}^t(\operatorname{sign} t_1 - \operatorname{th} \pi \varkappa_n ; \operatorname{sign} t_1 + \operatorname{th} \pi \varkappa_n)\frac{i}{2} + O\left(\frac{1}{|s_1|}\right). \tag{0.10}$$

Кроме того справедлива система равенств:

$$1 \pm \operatorname{th} \pi \varkappa_n = e^{\pm \pi \varkappa_n} / \operatorname{ch} \pi \varkappa_n,$$

где знаки ± 1 слева и справа согласованы. Вместе с (0.10) это приводит к системе:

$$\operatorname{ch} \pi \varkappa_n \cdot \eta_n(\omega) = \begin{cases} \frac{e_n}{2i} + O\left(\frac{1}{|s_1}|\right), \ t_1 > 0 \\ \frac{i}{2} \cdot \delta \cdot e_n + O\left(\frac{1}{|s_1}|\right), \ t_1 < 0. \end{cases} \tag{0.11}$$

где

$$e_n = {}^t(e^{-\pi \varkappa_n}, e^{+\pi \varkappa_n}).$$

Напомним, что параметр $\varkappa_n = \sqrt{\lambda_n - 1/4}$ фиксирован вместе с собственным числом λ_n, в то время как $|t_1| \to \infty$, поэтому умножение остатка в (0.10) на $\operatorname{ch} \pi\varkappa_n$ влияет только на константу в 0-символе и не влияет на его порядок по s_1 в (0.11). При этом остатки в (0.10) и (0.11) понимаются в векторном смысле: $1 = {}^t(1,1)$, каждая компонента остаточного вектора не превышает по своему порядку указанной величины, хотя константы в 0-символе у них могут быть разные.

В дальнейшем мы будем усреднять вектор (0.7) по параметру $t_1 = \operatorname{Im} s_1$. Для случаев $t_1 > 0$ и $t_1 < 0$ вектор (0.11) имеет разные значения, поэтому для определенности выберем случай $t_1 > 0$. Тогда вместе с равенством (0.6) вектор (0.8) преобразуется к виду:

$$(\eta_n \cdot L_n)(\omega) = \frac{e_n}{2i} \sum_{1 \leqslant j \leqslant j_n} \alpha_j \cdot t_j(l) \cdot \overset{\infty}{L}_j(\omega) \cdot \big(1 + O\big(\frac{1}{|s_1|}\big)\big). \qquad (0.12)$$

К сумме (0.12) мы применим усредняющий интегральный оператор J вида:

$$J = \frac{\pi^2/24}{T \cdot \log T} \cdot \int\limits_{T/2}^{3T/2} (\cdot) dt. \qquad (0.13)$$

В результате равенство (0.12) преобразуется к виду:

$$J \otimes (\eta_n L_n)(\omega) = \frac{e_n}{2i} \sum_{1 \leqslant j \leqslant j_n} \alpha_j \cdot t_j(l) \cdot \overset{\infty}{J}_j \cdot \big(1 + O\big(\frac{\log T}{T}\big)\big), \qquad (0.14)$$

где

$$\overset{\infty}{J}_j = {}^t\big(\frac{1}{2}\hat{J}_j; \frac{1}{\pi}\xi_j \cdot \check{J}_j\big)$$

$\check{J}_j$ – интеграл (0.13) с ядром $|L_j(s_1)|^2$ на месте символа $(\cdot)$, $\check{J}_j$ – интеграл (0.13) с ядром $L_j(s_1) \cdot L_j(\bar{s}_1)$ на месте $(\cdot)$. Параметр T из укороченного уравнения [1]. Аналогичный параметр T_0 из [3] для нулевой вершины приравняем к T,

$$T_0 = T.$$

Асимптотика интеграла $\hat{J}_j$ из (0.14) получена в [6]. Используя ее получаем равенство

$$\alpha_j \cdot \hat{J}_j = \big(1 + \frac{\theta_1}{\log T}\big), \quad \theta_1 \ll 1. \qquad (0.15)$$

Асимптотика интеграла $\check{J}_j$ из (0.14) получается точно также по схеме работы [5] (случай когда ядром свертки Ранкина является произведение $f_j(z)\cdot f_j(-\bar{z})$ вместо $|f_j(z)|^2$). В этом случае главный коэффициент асимптотики (0.15) будет умножен на величину $\xi_j=\pm 1$ в зависимости от четности или нечетности функции $f_j(z)$. Поэтому

$$\alpha_j\cdot \check{J}_j=\xi_j\cdot\big(1+\frac{\theta_2}{\log T}\big),\quad \theta_2\ll 1.$$

Подставляя это равенство вместе с (0.15) в (0.14) получаем:

$$\alpha_j\cdot \overset{\infty}{J}_j=v+O\big(\frac{1}{\log T}\big),\quad v={}^t\big(\frac{1}{2},\frac{1}{\pi}\big). \tag{0.16}$$

Снова отметим, что остаток в (0.16) понимается в векторном смысле. Для того, чтобы из всей суммы (0.14) выделить индивидуальное слагаемое с фиксированным номером $j=j_0$ воспользуемся свободным параметром $l\geqslant 1$ и определим его условием

$$l=q\cdot l_1,\quad q=p^\nu,\quad (l_1,p)=1, \tag{0.17}$$

где p – фиксированное простое для которого мы будем доказывать гипотезу Петерсона; $\nu\geqslant 1$ – целое фиксированное с условием, что

$$q=p^\nu=T^{\varepsilon_0},\quad \varepsilon_0\leqslant 1/2 \text{ – фиксировано.} \tag{0.18}$$

Из мультипликативности собственных чисел операторов Гекке и равенства (0.17) получаем:

$$t_j(l)=t_j(q)\cdot t_j(l_1).$$

Подставим это равенство в сумму (0.14) и умножим ее на величину

$$c_0\cdot\overline{t_{j_0}(l_1)}\cdot N^{-1}\cdot\exp\big(-\frac{l_1}{N}\big), \tag{0.19}$$

где $c_0=\frac{\pi^2}{24}\cdot\alpha_{j_0}$, $N=q\cdot T$, после чего усредним сумму по всем $l_1\geqslant 1$ $(p,l_1)=1$ и обозначим эту операцию через S. В результате равенство (0.14), с учетом (0.16), преобразуется к виду:

$$S\otimes J\otimes(\eta_n\cdot L_n)(\omega)=\frac{e_n}{2i}\sum_{1\leqslant j\leqslant j_n}t_j(q)\cdot S_j\cdot\big(v+O\big(\frac{1}{\log T}\big)\big), \tag{0.20}$$

где

$$S_j = c_0 N \sum_{(l_1,p)=1} \overline{t_{j_0}(l_1)} \cdot t_j(l_1) \cdot \exp\big(-\frac{l_1}{N}\big).$$

Напомним, что во всех равенствах до (0.16) включительно 0-символы не зависят от l, поэтому в усредняющем равенстве (0.20) они вынесены за знак суммирования по l_1.

Используя представление экспоненты

$$\exp(-l_1/N) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, s>1} \big(\frac{N}{l_1}\big)^s \cdot \Gamma(s) ds, \tag{0.21}$$

сведем сумму S_j к интегралу:

$$S_j = \frac{c_0}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, s>1} N^{s-1} \cdot \pi j(p,s) \cdot \Gamma(s) \cdot R_j(s) ds, \tag{0.22}$$

где

$$R_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{t_{j_0}(n)} \cdot t_j(n) \cdot n^{-s} = \prod_p \pi_j^{-1}(p,s)$$

$$\pi_j(p,s) = 1 - \overline{t_{j_0}(p)} \cdot t_j(p) \cdot \big(\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p}}\big)^{-2s}.$$

В свертке Ранкина $R_j(s)$ мы опустили второй индекс j_0, т.к. он фиксирован, по этой же причине он опущен в локальном множителе $\pi j(p,s)$, который появлялся в ядре интеграла (0.22) из условия взаимной простоты $(l_1, p) = 1$.

Перенося контур (0.22) влево на прямую $\mathrm{Re}\, s = 1/2$, получаем систему двух условий:

$$S_j = \begin{cases} \pi_0(p) + O\big(\frac{1}{\sqrt{N}}\big), & j = j_0 \\ 0 + O\big(\frac{1}{\sqrt{N}}\big), & j \neq j_0, \end{cases} \tag{0.23}$$

где $\pi_0(p)$ – это $\pi_j(p,s)$ для $j = j_0$ и $s = 1$:

$$\pi_0(p) = 1 - |t_{j_0}(p)|^2 \cdot \big(\sqrt{p} + \frac{1}{\sqrt{p}}\big)^{-2}.$$

Из оценки $|t_j(p)| \leqslant 2 \cdot \sqrt[4]{p}$ получаем оценку снизу:

$$\pi_0(p) \geqslant 0,04, \quad \text{если} \quad p \geqslant 13.$$

Для оставшихся простых $p = 2, 3, 5, 7, 11$ всегда выполняется условие $\pi_0(p) \neq 0$, т.к. свертка Ранкина $R_{j_0}(s) = R_{j_0,j_0}(s)$ имеет полюс в точке $s = 1$. Поэтому существует такая константа $a = a(\varkappa_{j_0}) > 0$, что для простых $p \leqslant 11$ справедливо условие:

$$|\pi_0(p)| \geqslant a > 0.$$

Полагая $a_0 = \min(0,04, a)$ из двух неравенств получаем одно, справедливое для всех простых:

$$|\pi_0(p)| \geqslant a_0 > 0. \tag{0.24}$$

Подставляя (0.23) в (0.20), получаем

$$S \otimes J \otimes (\eta_n L_n)(\omega) = \frac{e_n}{2i} \cdot \pi_0(p) \cdot t_{j_0}(q) \cdot \big(v + O\big(\frac{1}{\log T}\big)\big). \tag{0.25}$$

Исходя из левой части равенства (3.2) [4], мы выделили искомую величину $t_{j_0}(q)$ в (0.25). В дальнейшем мы получим для нее оценку $t_{j_0}(q) \ll q^{\varepsilon}$, исходя из правой части равенства (3.2) [4]; $\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало, но фиксировано. Пока же продолжим исследование левой части (3.2) [4].

Выделяя из (0.7) второе слагаемое с коэффициентом $\varepsilon_n(\omega) \cdot \delta$, придадим ему форму аналогичную (0.8):

$$\varepsilon_n(\omega) \cdot \delta \cdot L_n(\omega) \equiv \delta \cdot (\varepsilon_n \cdot L_n)(\omega). \tag{0.26}$$

Напомним, что $\varepsilon_n(\omega)$ – скаляр из (2.11) [4], $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Применяя к вектору (0.26) те же самые операции усреднения J и S, которые были применены к (0.8), получаем оценку:

$$S \otimes J \otimes \delta \cdot (\varepsilon_n \cdot L_n)(\omega) \ll t_{j_0}(q) \cdot T^{-1}. \tag{0.27}$$

Эта оценка понимается в векторном смысле. Она является следствием оценки (2.15) [4] для скаляра $\varepsilon_n(\omega)$, которую можно переписать в виде

$$\varepsilon_n(\omega) \ll \exp(-\pi |t_1|)$$

с учетом (0.5).

Оценка (0.27) справедлива и для двух оставшихся частей вектора (0.7). В результате получаем для вектора (0.7) асимптотическое равенство:

$$S \otimes J \otimes ((0.7)) = \frac{e_n}{2i} \cdot \pi_0(p) \cdot t_{j_0}(q) \cdot \big(v + O\big(\frac{1}{\log T}\big)\big), \tag{0.28}$$

чтобы сократить длину формул, мы использовали в левой части (0.28) номер вектора (0.7) вместо него самого. Эту упрощенную символику мы будем использовать и в дальнейшем.

Если усредняющий интегральный оператор J из (0.13) заменить на сопряженный к нему $\bar{J}$, что означает замену параметра $s_1 = 1/2 + it_1$ на $\bar{s}_1 = 1/2 - it_1$, тогда вместо верхнего равенства (0.11) будет справедливо нижнее и, соответственно, вместо (0.28) появится равенство:

$$S \otimes \bar{J} \otimes ((0.7)) = -\frac{\bar{e}_n}{2i} \cdot \pi_0(p) \cdot t_{j_0}(q) \cdot \big(v + O(\frac{1}{\log T})\big), \tag{0.29}$$

где

$$\bar{e}_n = \delta \cdot e_n = {}^t(e^{\pi \varkappa_n}, e^{-\pi \varkappa_n}).$$

Вычитая почленно равенство (0.28) из (0.29), получаем:

$$\begin{gathered} S \otimes (\bar{J} - J) \otimes ((0.7)) = \\ = \operatorname{Ch} \pi \varkappa_{j_0} \cdot \pi_0(p) \cdot t_{j_0}(q) \cdot \big(iv + O(\frac{1}{\log T})\big), \end{gathered} \tag{0.30}$$

где $\varkappa_{j_0} \equiv \varkappa_{j_0,n} \equiv \varkappa_n$, т.к. все собственные функции $f_{j,n}$ n-го "ящика" имеют один и тот же параметр $\varkappa_n = \sqrt{\lambda_n - 1/4}$.

В (0.30) завершено выделение множителя $t_{j_0}(q)$ из левой части (3.2) [4] и наша главная задача в дальнейшем будет состоять в том, чтобы получить упомянутую выше оценку, используя правую часть (3.2) [4]. Переход к полной гипотезе Петерсона: $|t_{j_0}(p)| \leqslant 2$ является уже стандартной задачей. Подробности можно найти, например, в [7].

§1. Дискретные составляющие

Напомним, что в правой части (3.2) [4] символ R_n^{disc} определяется разностью

$$R_n^{\text{disc}}(w) = \Gamma_1(w) \cdot \mathcal{M}_2(w) \cdot \overset{\circ}{Z}{}_n^{\text{disc}}(w) - \mathcal{M}_1(w) \cdot \overset{\infty}{Z}{}_n^{\text{disc}}(w), \tag{1.1}$$

где $\overset{\circ}{Z}{}_n^{\text{disc}}$ и $\overset{\infty}{Z}{}_n^{\text{disc}}$ – дискретные составляющие спектральных разложений [2, 3] без n-го "ящика". Из (2.17) [2] и (2.18) [2] получаем

$$\overset{\infty}{Z}{}_n^{\text{disc}}(w) = \sum_{m \neq n} \overset{\infty}{L}_m(\omega) \cdot \overset{\infty}{\varphi}(z_m, w). \tag{1.2}$$

(Напомним, что для $SL(2,\mathbb{Z})$ мультипликатор тривиален $\chi \equiv 1$.) Аналогично из (2.22) [3] получаем

$$\overset{\circ}{Z}{}_n^{\mathrm{disc}}(w) = \sum_{m \neq n} \overset{\circ}{L}_m(\omega) \cdot \overset{\circ}{\varphi}(z_m, w). \tag{1.3}$$

Отметим, что $\Gamma_1(w)$в правой части (1.1) – это $\Gamma_q(w)$ при $q = 1$ (не следует путать конгруэнц-модуль q из [1–4], который здесь $= 1$, с параметром q из (0.17) этой работы).

Из определяющего равенства (1.6) [4] получаем:

$$\Gamma_1(w) = \frac{\Gamma(1-w_3)}{\Gamma(1-w_2)} \cdot (2\pi)^{2\omega_2 - 1}. \tag{1.4}$$

Явный вид вектора $\overset{\infty}{L}_m(\omega)$, при условии (0.5): $l = q \cdot l_1$, приведен в (0.6). Аналогично для $\overset{\circ}{L}_m(\omega)$ с тем же условием (0.5) получаем:

$$\overset{\circ}{L}_m(\omega) = {}^t(\check{L}_{m,0}, \hat{L}_{m,0})(\omega), \tag{1.5}$$

где

$$\begin{aligned} \check{L}_{m,0}(\omega) &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant j_m} \alpha_j \cdot \xi_j \cdot t_j(q) \cdot t_j(l_1) \cdot L_j^2(s_1) \\ \hat{L}_{m,0}(\omega) &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant j_m} \alpha_j \cdot t_j(q) \cdot t_j(l_1) \cdot L_j(s_1) \cdot \overline{L_j(\bar{s}_1)}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Эти равенства следуют из [3], §2 формулы (2.21) и (2.22), с учетом того, что мы рассматриваем случай группы $SL(2,\mathbb{Z})$, где спектральные коэффициенты α_j и t_j одинаковы для вершин ∞ и 0. При этом ради упрощения символики мы снова опустим второй индекс m в правых частях (1.6). Мы его восстановим, когда это будет принципиально необходимо.

Разница векторов в их “перевернутости” и в моментах L-рядов Гекке в (0.3) и в (1.6).

Символ $R_n^{\mathrm{disc}}(w)$ входит в правую часть (3.2) [4] в точке $w = z_n = 1/2 + i\varkappa_n$, к тому же он умножается на матричный коэффициент $c_n^{-1} \times \mathcal{M}_1^{-1}(z_n)$ (без характера для случая $SL(2,\mathbb{Z})$), где

$$c_n = 2\pi \cdot \Gamma(2i\varkappa_n).$$

Поэтому общая дискретная составляющая правой части (3.2) [4] имеет вид:

$$c_n^{-1}[\Gamma_1(z_n) \cdot (\mathcal{M}_1^{-1} \cdot \mathcal{M}_2)(z_n) \cdot \overset{\circ}{Z}{}_n^{\mathrm{disc}}(z_n) - Z_n^{\mathrm{disc}}(z_n)], \tag{1.7}$$

где

$$(\mathcal{M}_1^{-1}\cdot\mathcal{M}_2)(z_n)\equiv\mathcal{M}_1^{-1}(w)\cdot\mathcal{M}_2(w)\big|_{w=z_n}.$$

Напомним, что n – фиксированно, поэтому c_n – константа. Действие линейных операторов J и S на (1.7) сводится к покомпонентному их применению. Поэтому каждое слагаемое можно рассматривать отдельно. Для определенности начнем со второго слагаемого, т.к. оно проще первого.

Под действием этих операторов равенство (1.2) трансформируется к виду:

$$S\otimes J\otimes\overset{\infty}{Z}{}_n^{\mathrm{disc}}(\omega)=\sum_{m\neq n}[S\otimes J\otimes\overset{\infty}{L}_m(\omega)]\cdot\overset{\infty}{\varphi}(z_m,z_n). \tag{1.8}$$

Теперь напомним, что в левой части равенства (0.6) стоит вектор $L_n(\omega)=\overset{\infty}{L}_n(\omega)\cdot\operatorname{ch}\pi\varkappa_n$, поэтому сокращая гиперболический косинус слева и справа в (0.6) и заменяя n на m, получаем

$$\overset{\infty}{L}_m(\omega)=\sum_{1\leqslant j\leqslant j_m}\alpha_{j,m}\cdot t_{j,m}(q)\cdot t_{j,m}(l_1)\cdot\overset{\infty}{L}_{j,m}(\omega). \tag{1.9}$$

Применяя к этому равенству операторы J и S, получаем:

$$S\otimes J\otimes\overset{\infty}{L}_m(\omega)=\sum_{1\leqslant j\leqslant j_m}\alpha_{j,m}\cdot t_{j,m}(q)\cdot S_{j,m}\cdot\overset{\infty}{J}_{j,m}, \tag{1.10}$$

где

$$\overset{\infty}{J}_{j,m}={}^t\big(\frac{1}{2}\hat{J}_{j,m},\frac{1}{\pi}\xi_{j,m}\cdot\check{J}_{j,m}\big)$$

является вектором из (0.14), в котором фиксированный индекс n заменен на $m\to\infty$.

Точно также $S_{j,m}$ является суммой S_j из (0.20), в которой $t_j(l_1)\equiv t_{j,n}(l_1)$ заменено на $t_{j,m}(l_1)$ из m-го “ящика”, когда $m\neq n$. (В дальнейшем у переменной суммирования l_1 мы опустим нижний индекс 1, сохранив условие $(l,p)=1$.) В этом случае контур интегрирования (0.22) можно сдвинуть влево на прямую $\operatorname{Re}s=1/2$. При этом в виду регулярности свертки Ранкина в точке $s=1$, когда $m\neq n$, получаем представление:

$$S_{j,m}=\frac{c_0}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}s=1/2}N^{s-1}\cdot\Gamma(s)\cdot\pi_{j,m}(p,s)\cdot R_{j,m}(s)ds. \tag{1.11}$$

Когда $m \to \infty$, мы уже не можем пользоваться второй оценкой (0.23) для интеграла (1.11), т.к. она была получена при фиксированном n.

По этой же причине нельзя пользоваться асимптотикой [5] для оценки вектора $\overset{\infty}{J}_{j,m}$ из (1.10).

Для оценки суммы (1.8) разобьем ее на три части:

$$S \otimes J \otimes \overset{\infty}{Z}{}_n^{\mathrm{disc}}(\omega) = \Bigg(\sum_{\substack{m\neq n \\ \varkappa_m \leqslant \sqrt{T}}} + \sum_{\substack{m\neq n \\ \sqrt{T} < \varkappa_m \leqslant T}} + \sum_{\substack{m\neq n \\ \varkappa_m > T}} \Bigg)(\cdot) = \\ = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 . \quad (1.12)$$

Для оценки вектора $\overset{\infty}{\varphi}(z_m, z_n)$ в первой сумме (1.12), когда $\varkappa_m \leqslant \sqrt{T}$ воспользуемся равенствами (1.9) [4] и (1.10) [4]. В результате при фиксированном n и ограничении $\varkappa_m \leqslant \sqrt{T}$, получаем оценку

$$\overset{\infty}{\varphi}(z_m, z_n) \ll \frac{1}{\varkappa_m}. \quad (1.13)$$

Она понимается в векторном смысле, т.е. каждая компонента вектора $\overset{\infty}{\varphi} = (\hat{\varphi}, \check{\varphi})$ не превосходит по своему порядку правой части (1.13), константы в оценке зависят от $\varkappa_n$, хотя и по разному для каждой компоненты.

Напомним, что сумма $\sum_1$ из (1.12) векторная

$$\sum\nolimits_1 = {}^t(\hat{\sum_1}, \check{\sum_1})$$

и для ее нормы справедлива оценка

$$\| \sum_1 \| = \sqrt{|\hat{\sum}_1|^2 + |\check{\sum}_1|^2} \leqslant |\hat{\sum}_1| + |\check{\sum}_1|. \quad (1.14)$$

Рассмотрим для определенности первое слагаемое правой части (1.14). Из принципа: "модуль суммы меньше суммы модулей слагаемых" получаем оценку:

$$\hat{\sum}_1 \ll \sum_{\varkappa_j \leqslant \sqrt{T}} \alpha_j \cdot |t_j(q)| \cdot |S_j| \cdot \hat{J}_j \cdot \frac{1}{\varkappa_j}, \quad (1.15)$$

где использована оценка (1.13).

При получении оценки (1.15) мы сломали перегородки между "ящиками" в (1.10) и записали правую часть (1.15) в привычном виде, нумеруя ее слагаемые одним индексом j, отвечающим j-ой собственной функции дискретного спектра. Кроме того, мы включили в правую часть (1.15) n-ый "ящик" которого не было в (1.12) (чтобы j-нумерация была сплошной, без пропусков). Его отсутствие на первом этапе позволило получить для суммы Ранкина $S_{j,m}$ интегральное представление (1.11) на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$, после чего возвращение n-го "ящика" в правую часть (1.15) уже не опасно.

Вспоминая, что $N = q \cdot T$, получаем из (1.11) оценку

$$S_j \ll \hat{R}_j \big/ \sqrt{qT}, \tag{1.16}$$

где

$$\hat{R}_j = \int\limits_{\mathrm{Re}\, s=1/2} |\Gamma(s)| \cdot |R_{j,j_0}(s)| dt, \quad s = 1/2 + it.$$

$R_{j,j_0}(s)$ – свертка Ранкина из (0.22), где индекс $j \geqslant 1$ любой, j_0-фиксирован. Для собственных чисел операторов Гекке сейчас известна оценка:

$$|t_j(q)| \leqslant \sigma_0(q) \cdot \sqrt[4]{q} = (\nu + 1) \sqrt[4]{q}.$$

Кроме того, по условию (0.18) $q = p^\nu \leqslant \sqrt{T}$, поэтому $\nu + 1 \leqslant \log T$, следовательно

$$|t_j(q)| < \sqrt[4]{q} \cdot \log T. \tag{1.17}$$

Подставляя (1.17) и (1.16) в (1.15), получаем:

$$\hat{\sum}_1 \ll \frac{\log T}{\sqrt{T\sqrt{q}}} \sum_{\varkappa_j \leqslant \sqrt{T}} \alpha_j \cdot \hat{R}_j \cdot \hat{J}_j \cdot \frac{1}{\varkappa_j}. \tag{1.18}$$

В ядре суммы (1.18) воспользуемся неравенствами Шварца

$$2 \cdot \hat{R}_j \cdot \hat{J}_j \leqslant \hat{R}_j^2 + \hat{J}_j^2. \tag{1.19}$$

В результате из (1.18) получаем оценку

$$\hat{\sum}_1 \ll \hat{S}_{1,1} + \hat{S}_{1,2}. \tag{1.20}$$

Слагаемые правой части (1.20) порождены соответствующими слагаемыми (1.19).

Для первой суммы (1.20) воспользуемся неравенствами Шварца для квадрата интеграла $\hat{R}_j$ из (1.16) и в результате получим оценку:

$$\hat{R}_j^2 \ll \int\limits_{\mathrm{Re}\, s=1/2} |\Gamma(s)| \cdot |R_{j,j_0}(s)|^2 dt. \tag{1.21}$$

Аналогичная процедера для квадрата интеграла $\hat{J}_j$ приводит к неравенству:

$$\hat{J}_j^2 \ll \frac{1}{T \cdot \log^2 T} \cdot \int\limits_{T/2}^{3T/2} |L_j(s)|^4 \, dt, \quad s = 1/2 + it. \tag{1.22}$$

Неравенство (1.22) сводит оценку суммы $\hat{S}_{1,2}$ к работе [6] одним из результатов которой является оценка 4-х моментов рядов Гекке. Приведем ее в виде отдельной леммы.

Лемма 1 (Кузнецов Н. В.). *Если параметры X и T подчинены условию $X \leqslant T$, тогда справедлива двойная средняя оцнека:* $(s = 1/2 + it)$

$$\sum_{\frac{1}{2}X \leqslant \varkappa_j \leqslant X} \alpha_j \cdot \int\limits_0^T |L_j(s)|^4 dt \leqslant c_0 \cdot T \cdot X^2 \cdot \log^c T,$$

где $c_0 > 0$, $c > 0$ – абсолютные константы.

Эта лемма является следствием доказательства Теоремы 12, [6] для 8-го момента дзета-функции Римана.

Здесь же приведем перенос этой оценки на свертки Ранкина, которая нам потребуется в дальнейшем:

Лемма 2 (Кузнецов Н. В.). *При том же соотношении между параметрами: $X \leqslant T$ справедлива двойная средняя оценка для сверток Ранкина:* $(s = 1/2 + it)$

$$\sum_{\frac{1}{2}X \leqslant \varkappa_j \leqslant X} \alpha_j \cdot \int\limits_0^T |R_{j,j_0}(s)|^2 dt \leqslant c_{j_0} \cdot T \cdot X^2 \cdot \log^{c_1} \cdot T.$$

В этой оценке $c_{j_0} > 0$ зависит от $\varkappa_{j_0}$, $c_1 > 0$ – абсолютная константа.

Если соотношение между параметрами X и T противоположно тому, что в Леммах 1 и 2, тогда можно получить оценки однократных средних:

Лемма 3 (Иванец–Дезуйе). *Если $s = 1/2 + it$, с условием, что $|t| \ll X$, тогда справедлива средняя оценка*

$$\sum_{\frac{1}{2}X \leqslant \varkappa_j \leqslant X} \alpha_j \cdot |L_j(s)|^4 \ll X^{2+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало, но фиксировано.

Эта Лемма является следствием укороченного уравнения для ряда Гекке [5] и оценок большого решета Иванца–Дезуйе [8].

Феномен отсутствия параметра t в оценке Леммы 3 кроется в тонкости, связанной с длиной укороченного уравнения [5] для L-ряда Гекке. Эта длина зависит от порядка суммы двух величин: $(\varkappa_j + |t|)$, поэтому если $|t| \ll \varkappa_j$, тогда длина зависит фактически только от $\varkappa_j$. Отсюда следует, что параметр t не влияет на оценку в Лемме 3, если $|t| \ll \varkappa_j$. Из Леммы 3 получаем

Следствие 1.3. *Если $T \ll X$, тогда справедлив аналог оценки Леммы 1:*

$$\sum_{\frac{1}{2}X \leqslant \varkappa_j \leqslant X} \alpha_j \cdot \int_0^T |L_j(s)|^4 dt \ll T \cdot X^{2+\varepsilon}$$

с тем же $\varepsilon > 0$, что и в Лемме 3.

Совершенно аналогична ситуация с аналогом Леммы 2 для случая $T \leqslant X$.

Лемма 4 (Иванец–Дезуйе). *Если $s = 1/2 + it$ и $|t| \ll X$, тогда справедлива средняя оценка:*

$$\sum_{\frac{1}{2}X \leqslant \varkappa_j \leqslant X} \alpha_j \cdot |R_{j,j_0}(s)|^2 \ll X^{2+\varepsilon},$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало но фиксировано.

Эта лемма так же является следствием укороченного уравнения для сверток Ранкина и оценок большого решета [8]. Единственная тонкость состоит в том, что некуда сослаться на явный вид укороченного уравнения для сверток Ранкина, хотя специалистам понятно, что получить его можно, если возникнет такая необходимость.

Такая необходимость здесь возникла, поэтому мы получим это уравнение в следующем параграфе для полноты изложения, а пока приведем аналог Следствия 1.3:

Следствие 1.4. *Если $T \ll X$, тогда справедлив аналог оценки из Леммы 2:* $(s = 1/2 + it)$

$$\sum_{\frac{1}{2}X \leqslant \varkappa_j \leqslant X} \alpha_j \cdot \int\limits_0^T |R_{j,j_0}(s)|62dt \ll T \cdot X^{2+\varepsilon}$$

с той же $\varepsilon > 0$, *что и Лемме 4.*

Приведенные четыре леммы и два следствия из них будут основными рабочими леммами в дальнейшем.

В частности из Леммы 1 получаем оценку

$$\hat{S}_{1,2} \ll q^{-1/4} \cdot \log^c T. \tag{1.23}$$

Для оценки суммы $\hat{S}_{1,2}$ из (1.20) заметим, что $\Gamma(s)$в (1.21) экспоненциально убывает по $t = \operatorname{Im} s$, поэтому можно отбросить части интеграла с условием $|t| \geqslant c_0 \cdot \log T = t_0$, где $c_0 \geqslant 1$ – некоторая фиксированная константа. В результате для $\hat{S}_{1,1}$ получается оценка:

$$\hat{S}_{1,1} \ll \int\limits_{l_0} |\Gamma(s)| \cdot V(s)dt + O(q^{-1/4}), \tag{1.24}$$

где $l_0 = \{s = 1/2 + it, \, |t| \leqslant t_0\}$.

$$V(s) = \left(\sum_{\varkappa_j \leqslant \sqrt{T}} \alpha_j \cdot |R_{j,j_0}(s)|^2 \frac{1}{\varkappa_j} \right) \cdot \frac{\log T}{\sqrt{T\sqrt{q}}}.$$

Сумму $V(s)$ также разобьем на две части:

$$V(s) = \frac{\log T}{\sqrt{T\sqrt{q}}} \left(\sum_{\varkappa_j \leqslant \sqrt[4]{T}} + \sum_{\sqrt[4]{T} < \varkappa_j \leqslant \sqrt{T}} \right) (\cdot) = \\ = V^{(1)}(s) + V^{(2)}(s). \tag{1.25}$$

Для первой суммы $V^{(1)}(s)$ по теореме о выпуклости для нормированной свертки Ранкина $\zeta(2s)\cdot R_{j,j_0}(s)$ получаем оценку

$$V^{(1)}(s) \ll q^{-1/4}\cdot \log^5 T. \tag{1.26}$$

Сумму $V^{(2)}(s)$ из (1.25) разобьем на "ящики" вида: $x_k \leqslant \varkappa_j < x_{k+1}$, где $x_0 = \sqrt[4]{T}$, $x_{k+1} = 2\cdot x_k$; $0 \leqslant k \leqslant k_0$, $k_0 = \left[\frac{\log \sqrt[4]{T}}{\log 2}\right]$. В результате получаем оценку:

$$V^{(2)}(s) \leqslant \frac{\log T}{\sqrt{T\sqrt{q}}}\cdot \sum_{k=0}^{k_0} \frac{1}{x_k}\cdot V_k(s), \tag{1.27}$$

где

$$V_k(s) = \sum_{x_k\leqslant \varkappa_j < 2x_k} \alpha_j \cdot |R_{j,j_0}(s)|^2.$$

Сумму $V_k(s)$ из (1.27) мы оценим методом большого решета [8] (Лемма 4), но пока получим укороченное уравнение для свертки Ранкина.

§2. Укороченное уравнение

Для нормированной свертки Ранкина

$$R^*_{j,j_0}(s) = \zeta(2s)\cdot R_{j,j_0}(s), \quad j\neq j_0,\ \mathrm{Re}\, s = 1/2$$

справедливо представление

$$R^*_{j,j_0}(s) = R^*_k(s) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\, w=-3/4} x_k^{r\cdot w}\cdot \Gamma(w)\cdot R^*_{j,j_0}(s+rw)dw, \tag{2.1}$$

где

$$R^*_k(s) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}\cdot a_j(m)\cdot \exp\big[-\big(\frac{m}{x_k}\big)^r\big]$$

$r\geqslant 1$ – сколь угодно велико, но фиксировано, $a_j(m)$ – коэффициент Дирихле свертки $R^*_{j,j_0}(s)$:

$$a_j(m) = \sum_{m=nd^2} t_j(n)\cdot \overline{t_{j_0}(n)}. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) можно получить, если в сумму $R^*_k(s)$ подставить интегральное представление

$$\exp\big[-\big(\frac{m}{x_k}\big)^r\big] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}\, w>\frac{1}{2r}} \big(\frac{x_k}{m}\big)^{rw}\Gamma(w)dw.$$

И затем записать ее в виде интегрального среднего от нормированной свертки Ранкина:

$$R_k^*(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, w > \frac{1}{2r}} x_k^{rw} \cdot \Gamma(w) \cdot R_{j,j_0}^*(s+rw)dw. \qquad (2.3)$$

Затем переносом контура (2.3) влево на прямую $\mathrm{Re}\, w = -3/4$, получаем уравнение (2.1).

Если собственные функции $f_{j_0}(z)$ и $f_j(z)$ одинаковой четности, тогда в ядре (2.2) воспользуемся функциональным уравнением:

$$R_{j,j_0}^*(\omega) = \pi^{4(\omega-1/2} \cdot \frac{\Gamma^{(4)}(1-\omega, i\varkappa_j, i\varkappa_{j_0})}{\Gamma^{(4)}(\omega, i\varkappa_j, i\varkappa_{j_0})} R_{j,j_0}^*(1-\omega), \qquad (2.4)$$

где $\omega = s + rw$

$$\Gamma^{(4)}(\omega;\nu,\mu) = \Pi\, \Gamma\Big(\frac{\omega \pm \nu \pm \mu}{2}\Big). \qquad (2.5)$$

В правой части (2.5) стоит произведение четырех Γ-функций для четырех комбинаций знаков в сумме $(\omega \pm \nu \pm \mu)$.

Если собственные функции разной четности, тогда отношение Γ-множителей в (2.4) надо заменить другим:

$$\frac{\Gamma^{(4)}(2-\omega; i\varkappa_j, i\varkappa_{j_0})}{\Gamma^{(4)}(\omega+1; i\varkappa_j, i\varkappa_{j_0})}. \qquad (2.6)$$

Подробности см. в [9]. Затем выделяем в ряде Ранкина $R_{j,j_0}^*(1-\omega)$ его конечную часть $m \leqslant x_k^{2+\varepsilon}$ и сдвигами для нее контур вправо на прямую $\mathrm{Re}\, w = -1/\log T$, а для бесконечной части $m > x_k^{2+\varepsilon}$ – влево на прямую $\mathrm{Re}\, w = -3/2$. В результате из (2.1) получаем оценку:

$$R_{j,j_0}^*(s) \ll |R_k^*(s)| + \int\limits_{l_1} |\Gamma(w)| \cdot |R_{2,k}(1-s-rw)| du + O\Big(\frac{1}{x_k}\Big), \qquad (2.7)$$

где

$$l_1 = \Big\{ w = -\frac{1}{\log T} + iu;\ |u| \ll \log T \Big\}$$

$R_{2,k}$ – упомянутый выше конечный отрезок:

$$R_{2,k}(1-\omega) = \sum_{m \leqslant x_k^{2+\varepsilon}} a_j(m)/m^{1-\omega} \qquad (2.8)$$

$\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало, но фиксировано. Параметры r и ε связаны равенством

$$r = \frac{2}{\varepsilon}.$$

Отметим, что $\varkappa_{j_0}$ – фиксировано, в то время как $\varkappa_j \geqslant \sqrt[4]{T}$ и $T \to \infty$, поэтому случай совпадения индексов j_0 и j исключен, что учтено в начале этого параграфа. Но в принципе этим методом получается и случай $j = j_0$. Тогда добавляется еще одно слагаемое от полюса в единичной точке у свертки Ранкина.

В правой части (2.7) мы ограничили контур конечным отрезком l_1 логарифмической длины в виду экспоненциального убывания функции $\Gamma(w)$. Такой прием уже был использован выше.

Сложное отношение Г-множителей из (2.4) или (2.5) имеет порядок $0(1)$ на прямой $\operatorname{Re} w = -1/\log T$ при достаточно большом $T \geqslant T_0(\varepsilon)$, поэтому оно отсутствует в ядре интеграла (2.7). Остаток в (2.7) получается от сложения бесконечной части $m > x_k^{2+\varepsilon}$ и отброшенных интегралов с условием $|\operatorname{Im} w| \gg \log T$.

Нам осталось заменить бесконечную сумму $R_k^*(s)$ из (2.1) ее конечным отрезком $m \leqslant x_k^{2+\varepsilon}$

$$R_k^*(s) = R_{1,k}(s) + O\big(\frac{1}{x_k}\big), \tag{2.9}$$

где

$$R_{1,k}(s) = \sum_{m \leqslant x_k^{2+k}} m^{-s} \cdot a_j(m) \cdot \exp\big[-\big(\frac{m}{x_k}\big)^r\big].$$

В результате из (2.7) получается оценка:

$$|R_{j,j_0}^*(s)|^2 \ll |R_{1,k}(s)|^2 + \int\limits_{l_1} |\Gamma(w)| \cdot |R_{2,k}(1-\omega-rw)|^2\, du + O\big(\frac{1}{x_k^2}\big). \tag{2.10}$$

Для того, чтобы получить укороченное уравнение для ненормированной свертки Ранкина R_{j,j_0} достаточно заметить, что

$$R_{j,j_0}(s) = \zeta^{-1}(2s) \cdot R_{j,j_0}^*(s).$$

И кроме того на прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$ справедлива оценка:

$$|\zeta(2s)|^{-1} \ll \log|2s|.$$

Поэтому на прямой $\mathrm{Re}\, s = 1/2$ справедлива оценка

$$|R_{j,j_0}(s)|^2 \ll |R^*_{j,j_0}(s)|^2 \cdot \log^2 |2s|. \tag{2.11}$$

Подставляя (2.10) в правую часть (2.11), получаем оценку для $|R_{j,j_0}(s)|^2$, которая позволяет вместе с (1.27), применить к $V_k(s)$ метод большого решета [8] (Лемма 4 этой работы) и получить оценку:

$$V_k(s) \ll x_k^{2\cdot(1+\varepsilon)}. \tag{2.12}$$

Эта оценка вместе с неравенством (1.27), приводит к окончательной оценке второй суммы (1.25):

$$V^{(2)}(s) \ll T^\varepsilon \cdot q^{-1/4}. \tag{2.13}$$

Подставляя (2.13) и (1.26) в (1.25) и затем в (1.24), получаем окончательную оценку для первой суммы (1.20):

$$\hat{S}_{1,1} \ll T^\varepsilon \cdot q^{-1/4}. \tag{2.14}$$

Подставляя (2.14) и (1.23) в (1.20), получаем:

$$\hat{\sum}_1 \ll T^\varepsilon \cdot q^{-1/4}. \tag{2.15}$$

Хотя в последних четырех оценках (2.12)–(2.15) использован один и тот же символ $\varepsilon > 0$ для сколь угодно малой, но фиксированной величины, на самом деле это разные величины, которые отличаются друг от друга множителями непревосходящими 4.

Для того, чтобы получить оценку второй суммы в (1.4), выпишем для нее аналог оценки (1.15):

$$\hat{\sum}_1 \ll \sum_{\varkappa_j < \sqrt{T}} \alpha_j \cdot |t_j(q)| \cdot |S_j| \cdot |\check{J}_j| \cdot \frac{1}{\varkappa_j}, \tag{2.16}$$

где

$$\check{J}_j = \frac{\pi^2/24}{T \log T} \int\limits_{T/2}^{3T/2} L_j(s_1) \cdot L_j(\bar{s}_1) dt_1.$$

Из явного вида этого нормированного интеграла следует оценка:

$$|\check{J}_j| \leqslant \hat{J}_j.$$

Подставляя ее в (2.16) мы видим, что вторая компонента (1.14) удовлетворяет той же оценке, что и первая. Поэтому окончательно получаем

$$\|\sum\nolimits_1\| \ll T^{\varepsilon} \cdot q^{-1/4}. \qquad (2.17)$$

Напомним, что по условию (0.18) $q = T^{\varepsilon_0}$, где $\varepsilon_0 \leqslant 1/2$ – фиксировано. В дальнейшем можно считать, что $\varepsilon_0 = 1/2$. Поэтому правая часть (2.17) не больше величины $0(1)$, т.к. $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало и можно считать, что $\varepsilon < 0.25 \cdot \varepsilon_0 = 0,125$.

Поэтому оценку (2.17) можно упростить и переписать в виде:

$$\|\sum\nolimits_1\| \ll 1. \qquad (2.18)$$

Для оценки второй суммы в (1.12) не выгодно пользоваться оценками (1.9) [4] и (1.10) [4], которые были получены сдвигом контуров вправо. В этом случае следует использовать сдвиг влево на прямую $\mathrm{Re}\, s = 1/2 - \sigma$, где $\sigma > 1$ – сколь угодно велико, но фиксировано. Тогда вместо (1.13) получаем оценку

$$\overset{\infty}{\varphi}(z_m, z_n) \ll \frac{1}{\varkappa_m} \cdot \Big(\frac{\sqrt{T}}{\varkappa_m}\Big)^{2\sigma}. \qquad (2.19)$$

Она сильнее оценки (1.13) для $\varkappa_m > \sqrt{T}$. Затем следует в предыдущих рассуждениях заменить оценку (1.13) на (2.19), в результате получим аналог оценки (2.18):

$$\|\sum\nolimits_2\| \ll 1. \qquad (2.20)$$

Для третьей суммы (1.12) при $\varkappa_m > T$ мы уже не можем пользоваться оценками 4-х моментов Кузнецова [6] (Лемма 1 этой работы). Но в этом случае начинает работать на полную мощность оценка (2.19), из которой следует, что при $\varkappa_m > T$ справедлива оценка:

$$\overset{\infty}{\varphi}(z_m, z_n) \ll \varkappa_m^{-1-\sigma}, \qquad (2.21)$$

где $\sigma > 1$ – сколь угодно велико, но фиксировано. Поэтому для оценки третьей суммы (1.12) достаточно обычных оценок по выпуклости как для рядов Гекке, так и для сверток Ранкина.

В результате получаем аналог оценки (2.20):

$$\|\sum\nolimits_3\| \ll 1. \qquad (2.22)$$

Подставляя (2.22), (2.20) и (2.18) в (1.12), получаем окончательную оценку:

$$S \otimes J \otimes \overset{\infty}{Z}{}_n^{\mathrm{disc}}(z_n) \ll 1. \tag{2.23}$$

§3. Дискретная часть. Окончание

Вернемся к первому слагаемому в (1.7) и напомним, что $\mathcal{M}_1(w) \equiv \mathcal{M}(w_1, w_2)$, $\mathcal{M}_2(w) \equiv \mathcal{M}(w_1, w_3)$. Эти сокращения были введены в §1 [4].

Для параметров w_i, $i = 1, 2, 3$ (см. §2, [4]) вместе с условиями (0.4) и (0.5) этой работы, получаем равенства

$$\begin{aligned} w_1 &= w_3 = w - it_1 \\ w_2 &= w + it_1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Используя эту таблицу, получаем явный вид матриц $\mathcal{M}_1^{-1}(w)$ и $\mathcal{M}_2(w)$ для $w = z_n = 1/2 + i\varkappa_n$ (см. §2, [4]). После их перемножения, получаем асимптотическое равенство

$$(\mathcal{M}_1^{-1} \cdot \mathcal{M}_2)(z_n) = ie^{-\pi\varkappa_n}\delta + O(e^{-\pi|t_1|}), \tag{3.2}$$

где $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, остаток в (3.2) означает матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

для каждой компоненты которой справедлива оценка

$$\alpha_{ij} \ll e^{-\pi|t_1|}. \tag{3.3}$$

Константы в оценке (3.3) разные для разных пар индексов (i, j), все они зависят от $\varkappa_n$, но каждая не больше величины $\exp(\pi\varkappa_n)$.

Из (1.4) и таблицы (3.1) получаем равенство:

$$\Gamma_1(z_n) \equiv \Gamma_1(z_n, s_1) = \frac{\Gamma(s_1 - i\varkappa_n)}{\Gamma(\bar{s}_1 + i\varkappa_n)} \cdot (2\pi)^{-2it_1}. \tag{3.4}$$

Отсюда следует равенство для модуля: $(\operatorname{Re} s_1 = 1/2)$

$$|\Gamma_1(z_n)| \equiv |\Gamma_1(z_n, s_1)| = 1. \tag{3.5}$$

Асимптотическое равенство (3.2) позволяет выделить из первого слагаемого (1.7) главный вектор вида

$$ie^{-\pi\varkappa_n} \cdot \Gamma_1(z_n)\delta \overset{\circ}{Z}{}_n^{\mathrm{disc}}(z_n). \tag{3.6}$$

Остаточный вектор экспоненциально убывает по t_1 как это видно из (3.2) и (3.3), поэтому он оценивается тривиально и мы на нем останавливаться не будем.

Применение операторов J и S к вектору (3.6) приводит к аналогу равенства (1.8):

$$S\otimes J\otimes\Gamma_1(z_n)\delta\overset{\circ}{Z}{}_n^{\rm disc}(z_n)= \\ =\sum_{m\neq n}[S\otimes J\otimes\Gamma_1(z_n)\delta\overset{\circ}{L}_m(\omega)]\delta\overset{\circ}{\varphi}(z_m,z_n). \quad (3.7)$$

Из определения вектора-функции $\overset{\circ}{\varphi}=(\check\varphi,\hat\varphi)$ (см. §2, [3]) следует равенство

$$\delta\overset{\circ}{\varphi}(z_m,z_n)=\overset{\infty}{\varphi}(z_m,z_n). \quad (3.8)$$

Кроме того справедливо равенство

$$\delta\overset{\circ}{L}_m(\omega)={}^t(\hat L_{m,0},\check L_{m,0})(\omega), \quad (3.9)$$

которое приводит к аналогу равенства (1.10):

$$S\otimes J\otimes\Gamma_1(z_n)\delta\overset{\circ}{L}_m(\omega)= \\ =\sum_{1\leqslant j\leqslant j_m}\alpha_{j,m}\cdot t_{j,m}(q)\cdot S_{j,m}\cdot\Bigl(\frac{1}{2}\hat J_{j,m;0},\frac{1}{\pi}\xi_{j,m}\check J_{j,m,0}\Bigr). \quad (3.10)$$

В правой части (3.10) интегралы $\hat J_{j,m,0}$ и $\check J_{j,m,0}$ отличаюбтся от соответствующих интегралов в (1.10) своими ядрами. В первом из них стоит произведение

$$\Gamma_1(z_n;s_1)\cdot L_{j,m}(s_1)\cdot\overline{L_{j,m}(\bar s_1)},$$

а во втором:

$$\Gamma_1(z_n;s_1)\cdot L_{j,m}^2(s_1).$$

В силу равенства (3.5) для них справедливы оценки:

$$|\hat J_{j,m,0}|\leqslant\hat J_{j,m};\quad |\check J_{j,m,0}|\leqslant\hat J_{j,m}. \quad (3.11)$$

Поэтому для вектора (3.7) справедлив аналог оценки (2.23). Добавление множителя

$$i\cdot c_n^{-1}\exp(-\pi\varkappa_n)$$

не меняет ее, т.к. n – фиксировано.

В результате получаем оценку среднего дискретной составляющей (1.1) в точке $w = z_n$:

$$S \otimes J \otimes (\mathcal{M}_1^{-1} \cdot R_n^{\mathrm{disc}}(z_n) \ll 1. \qquad (3.12)$$

Аналогичная оценка верна при замене оператора J на сопряженный $\bar{J}$:

$$S \otimes \bar{J} \otimes (\mathcal{M}_1^{-1} \cdot R_n^{\mathrm{disc}})(z_n) \ll 1. \qquad (3.13)$$

Из оценок (3.12) и (3.13) следует окончательная оценка

$$S \otimes (\bar{J} - J) \otimes (\mathcal{M}_1^{-1} \cdot R_n^{\mathrm{disc}})(z_n) \ll 1. \qquad (3.14)$$

§4. Конечномерные пространства

В правой части (3.2) [4] величина $R_n(w)$ впервые появилась в равенстве (1.7) [4]. Она определяется разностью составляющих cusp-форм и непрерывного спектра двух вершин

$$R_n(w) = R_n^{\mathrm{cusp}}(w) + R_n^{\mathrm{con}}(w), \qquad (4.1)$$

где

$$R_n^{\mathrm{cusp}}(w) = \Gamma_1(w) \cdot \mathcal{M}_2(w) \overset{\circ}{Z}{}^{\mathrm{cusp}}(w, \varphi) - \mathcal{M}_1(w) \cdot \overset{\infty}{Z}{}^{\mathrm{cusp}}(w, \varphi). \quad (4.2)$$

Аналогично определяется $R_n^{\mathrm{con}}(w)$.

В этом параграфе мы исследуем cusp-компоненту (4.2), а в следующем – непрерывную. По аналогии с §1 нам надо перейти от компоненты (4.2) в точке $w = z_n$ к аналогу вектора (1.7):

$$(\mathcal{M}_1^{-1} \cdot R_n^{\mathrm{cusp}})(z_n) = \Gamma_1(z_n) \cdot (\mathcal{M}_1^{-1} \mathcal{M}_2)(z_n) \cdot \overset{\circ}{Z}{}^{\mathrm{cusp}}(z_n, \varphi) - \overset{\infty}{Z}{}^{\mathrm{cusp}}(z_n, \varphi) \qquad (4.3)$$

с теми же обозначениями коэффициентов, что и в (1.7).

По аналогии с §1 мы начнем исследовать действие операторов J и S на второе слагаемое в (4.3) и по пути напомним, что вектор $\overset{\infty}{Z}{}^{\mathrm{cusp}}$ определяется в [2] равенством

$$\overset{\infty}{Z}{}^{\mathrm{cusp}}(w, \varphi) = {}^t(\overset{\infty}{Z}{}_l^{\mathrm{cusp}}(w, \varphi), 0). \qquad (4.4)$$

Поэтому аналогом векторного равенства (1.8) в данном случае является скалярное равенство

$$S \otimes J \otimes \overset{\infty}{Z}{}_l^{\mathrm{cusp}}(z_n, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \equiv 0(2)} i^m \cdot \tilde{\varphi}(m-1) \times$$

$$\times \sum_{1\leqslant j\leqslant j_m} \alpha_{j,m} \cdot t^*_{j,m}(q) \cdot S^*_{j,m} \cdot J^*_{j,m}, \tag{4.5}$$

которое следует из (5.11) [2]. При этом здесь $J^*_{j,m}$ – аналог интеграла $\hat{J}_{j,m}$ из (1.11), где $L_{j,m}$ надо заменить нормированным рядом Гекке $L^*_{j,m}$ для cusp-форм веса m (см. §5, [2]);

$S^*_{j,m}$ – аналог суммы (0.20), где $t_j(l)$ надо заменить на $t^*_{j,m}(l)$ – нормированным собственным значением оператора Гекке для j-ой cusp-формы веса m (см. §5, [2]):

$$S^*_{j,m} = \frac{c_0}{N} \sum_{(l,p)=1} t^*_{j,m}(l) \cdot \overline{t_{j_0}(l)} \cdot \exp\big(-\frac{l}{N}\big). \tag{4.6}$$

Отметим, что смешанная свертка Ранкина

$$R^*_{j,m,j_0}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \cdot t^*_{j,m}(n) \cdot \overline{t_{j_0}(n)}, \quad \operatorname{Re} s > 1$$

не имеет полюса в точке $s=1$. Поэтому сумма (4.6) имеет аналог интегрального представления (1.11):

$$SJ^*_{j,m} = \frac{c_0}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s=1/2} N^{s-1} \cdot \Gamma(s) \cdot \pi_{j,m}(p,s) \cdot R^*_{j,m,j_0}(s) ds. \tag{4.7}$$

Из этого равенства следует аналог оценки (1.16):

$$S^*_{j,m} \ll \frac{1}{\sqrt{N}} R^*_{j,m}, \tag{4.8}$$

где

$$R^*_{j,m} = \int\limits_{\operatorname{Re} s=1/2} |\Gamma(s)| \cdot |R^*_{j,m,j_0}(s)| dt, \quad t = \operatorname{Im} s. \tag{4.9}$$

Кроме того, воспользуемся оценкой Делиня

$$|t^*_{j,m}(q)| \leqslant \nu + 1 \quad (\text{т.к. } q = p^\nu) \tag{4.10}$$

и подставим ее, вместе с (4.8), в правую часть (4.5). В результате получаем:

$$S \otimes J \otimes \overset{\infty}{Z}{}^{\text{cusp}}_{l}(z_n, \varphi) \ll \frac{\nu+1}{\sqrt{T\cdot q}} \sum_{m\equiv 0(2)} |\overset{\infty}{\varphi}(m-1)| \times$$

$$\times \sum_{1\leqslant j\leqslant j_m} \alpha_{j,m}\cdot R^*_{j,m}\cdot J^*_{j,m} \quad (N=q\cdot T). \tag{4.11}$$

Для функции $\tilde{\varphi}(m-1)$, при $w=z_n$, получаем из (5.14) [2] аналоги оценок (1.15) и (1.20), где $\varkappa_j$ надо заменить на m:

$$\tilde{\varphi}(m-1) \ll \begin{cases} \frac{1}{m}, & m\leqslant\sqrt{T} \\ \frac{1}{m}\left(\frac{\sqrt{T}}{m}\right)^{2\sigma}, & m>\sqrt{T}, \end{cases} \tag{4.12}$$

где $\sigma>1$ – сколь угодно велико, но фиксировано (при достаточно большом $T\geqslant T_0(\sigma)$).

Хотя здесь также справедливы аналоги Лемм 1–4 из §1, тем не менее для cusp-форм можно использовать более грубую схему оценок суммы (4.11). Для этого разобьем ее на три части:

$$m\leqslant\sqrt{T}, \quad \sqrt{T}<m\leqslant T, \quad m>T \tag{4.13}$$

и в первых двух "ящиках" (4.13) воспользуемся оценкой по выпуклости на половинной прямой для свертки Ранкина в ядре интеграла (4.9). В результате получается оценка:

$$R^*_{j,m} \ll m\cdot\log^5(T+m). \tag{4.14}$$

Затем воспользуемся укороченным уравнением для ряда Гекке $L^*_{j,m}$ и получим оценку нормированного интеграла $J^*_{j,m}$:

$$J^*_{j,m} \ll \log^3 T. \tag{4.15}$$

Эта оценка справедлива для всех $m\leqslant T$ с абсолютной константой в символе $\ll$. (Константа в (4.14) зависит от $\varkappa_{j_0}\equiv\varkappa_n$.)

В результате получаем оценку двух первых частей суммы (4.11), отвечающую первым двум "ящикам" (4.13). Вместе по своему порядку они не больше суммы

$$\frac{\log^9 T}{\sqrt{T}\cdot q}\cdot \sum_{m\leqslant T, m\equiv 0(2)} m\cdot|\tilde{\varphi}(m-1)|\cdot \sum_{1\leqslant j\leqslant j_m} \alpha_{j,m}. \tag{4.16}$$

Для внутренней суммы (4.16) из равенства (6.38) [7], получаем оценку:

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant j_m} \alpha_{j,m} \ll 1. \tag{4.17}$$

Подставляя (4.17) и (4.12) в (4.16) видим, что порядок этой суммы не больше величины
$$\frac{\log^9 T}{\sqrt{q}}. \tag{4.18}$$

Если $m > T$, тогда из трех оценок (4.14), (4.15) и (4.17) первая и третья остаются справедливыми, а оценка (4.15) принимает вид:
$$J^*_{j,m} \ll \frac{m \cdot \log^4 m}{T \cdot \log T}. \tag{4.19}$$

Кроме того при $m \geqslant T$ из второго неравенства (4.12) получаем оценку:
$$\tilde{\varphi}(m-1) \ll m^{-1-\sigma}, \quad m \geqslant T \geqslant T_0(\sigma), \tag{4.20}$$

где $\sigma > 1$ – сколь угодно велико, но фиксировано. Поэтому часть суммы (4.11) для $m > T$ по своему порядку не превосходит величины (4.18). Поэтому из (4.11) получаем:
$$S \otimes J \otimes \overset{\infty}{Z}{}^{\mathrm{cusp}}_l(z_n, \varphi) \ll q^{-1/2+\varepsilon}, \tag{4.21}$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало, но фиксировано.

Степенной запас 1/2 в оценке (4.21) показывает, что оценка Делиня здесь не по существу, ее можно заменить более грубой оценкой (1.17).

Для оценки первой компоненты (4.3) следует воспользоваться рассуждениями §3, которые сводят задачу к полученной оценке (4.21).

В результате для левой части (4.3) получаем общую оценку
$$S \otimes J(\mathcal{M}_1^{-1} \cdot R^{\mathrm{cusp}})(z_n) \ll q^{-1/2+\varepsilon}. \tag{4.22}$$

Она остается справедливой при замене оператора J на сопряженный к нему $\bar{J}$. В результате получаем окончательную оценку для cusp-компонент:
$$S \otimes (\bar{J} - J) \otimes (\mathcal{M}_1^{-1} \cdot R_n^{\mathrm{cusp}})(z_n) \ll q^{-1/2+\varepsilon}. \tag{4.23}$$

§5. Непрерывные компоненты

Непрерывные компоненты в общем виде для конгруэнц-групп с мультипликатором приведены в [2] и [3]. При переходе к случаю $SL(2,\mathbb{Z})$, который мы рассматриваем здесб, они упрощаются. Равенство (3.10) [2] при $\omega_2 = \bar{\omega}_1$ (когда $\omega_1 = s_1 = 1/2 + it_1$)

для группы $SL(2\mathbb{Z})$ принимает вид:

$$\overset{\infty}{Z}{}^{\mathrm{con}}_{l}(w,\varphi)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} z=1/2}\zeta(s_1,z)\cdot\tau_z(l)\cdot\hat{\varphi}(z,w)|\zeta(2z)|^{-2}dz-$$

$$-2\zeta(0)\left[\hat{V}_\infty(s_1,w)\tau_{it_1}(l)+\hat{V}_\infty(\bar{s}_1,w)\tau_{-it_1}(l)\right], \qquad (5.1)$$

где

$$\zeta(s_1,z)=\zeta(z+it_1)\zeta(1-z+it_1)\zeta(z-it_1)\zeta(1-z-it_1)$$

$$\hat{V}_\infty(s_1,w)=\zeta(2-2s_1)\zeta^{-1}(3-2s_1)\hat{\varphi}(\frac{3}{2}-s_1,w)$$

$\zeta(s)$ – дзета-функция Римана.

При упрощениях равенства (5.1) мы использовали функциональные уравнения:

$$\tau_s(l)=\tau_{1-s}(l) \quad \text{и} \quad \hat{\varphi}(s,w)=\hat{\varphi}(1-s,w).$$

Равенство (4.7) [2] при этих же условиях принимает вид:

$$\overset{\infty}{Z}{}^{\mathrm{con}}_{-l}(w,\varphi)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} z=1/2}\zeta(s_1,z)\tau_z(l)\check{\varphi}(z,w)\zeta^{-2}(2z)dz-$$

$$-2\zeta(0)[\check{V}_\infty(s_1,w)\tau_{s_1+1/2}(l)+\check{V}_l(\bar{s}_1,w)\tau_{\bar{s}_1-1/2}(l)], \qquad (5.2)$$

где

$$\check{V}_\infty(s_1,w)=\zeta(2s_1-1)\zeta(2\bar{s}_1)[\zeta^{-2}(3-2s_1)+\zeta^{-2}(2s_1+1)]\check{\varphi}(\frac{3}{2}-s_1,w)$$

$\zeta(s_1,w)$ из (5.1).

Правая часть равенства (3.10) [3] в случае группы $SL(2,\mathbb{Z})$ имеет разрешимую особенность в точке $s_2=1/2$, устравнив которую, получаем аналог равенства (5.2) с теми же условиями на комплексные параметры $\omega_2=\bar{\omega}_1=1-\omega_1$, $\omega_1=s_1=1/2+it_1$:

$$\overset{\circ}{Z}{}^{\mathrm{con}}_{-l}(w,\varphi)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re} z=1/2}\zeta^2(z+it_1)\zeta^2(1-z+it_1)\tau_z(l)\frac{\check{\varphi}(z,w)}{\zeta^2(2z)}\,dz-$$

$$-2\left[\frac{\tau'}{\tau}(it_1,l)+\frac{\check{\varphi}'}{\check{\varphi}}(it_1,w)-3\frac{\zeta'}{\zeta}(2it_1)-4\frac{\zeta'}{\zeta}(-2it_1)\right]\times$$

$$\times|\zeta(2it_1)|^2\zeta^{-2}(2-2it_1)\tau_{it_1}(l)\check{\varphi}(it_1,w)-$$

$$-2\big[2\gamma+\frac{\zeta'}{\zeta}(2it_1)\big]\big[1+\frac{\zeta^2(2it_1)}{\zeta^2(2-2it_1)}\big]\tau_{it_1}(l)\check{\varphi}(it_1,w)-$$

$$-2\big[\frac{\zeta'}{\zeta}(2it_1)-\frac{\tau'}{\tau}(it_1;l)-\frac{\check{\varphi}'}{\check{\varphi}}(it_1,w)\big]\frac{\zeta(-2it_1)}{\zeta(2it)}\times$$

$$\times\tau_{it_1}(l)\cdot\check{\varphi}(it_1,w);\quad \gamma - \text{константа Эйлера.} \tag{5.3}$$

Отметим, что $\frac{\check{\varphi}'}{\check{\varphi}}$ означает логарифмическую производную функции $\check{\varphi}(s,w)$ по параметру s; аналогичный смысл имеет символ $\frac{\tau'}{\tau}(s;l)$ для функции $\tau_s(l)$.

Из равенства (3.20) [3] получаем аналог равенства (5.3) для компоненты $\overset{\circ}{Z}{}^{\rm con}_{+l}$:

$$\overset{\circ}{Z}{}^{\rm con}_{+l}(w,\varphi)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}z=1/2}\frac{\zeta^2(z+it_1)\zeta^2(1-z+it_1)}{\zeta(2z)\zeta(2-2z)}\,\tau_z(l)\check{\varphi}(z,)dz+$$

$$+4\big[\frac{\tau'}{\tau}(it_1,l)+\frac{\hat{\varphi}'}{\hat{\varphi}}(it_1,w)+2\frac{\zeta'}{\zeta}(-2it)-2\gamma\big]\frac{\zeta(2it_1)}{\zeta(2-2it_1)}\times$$

$$\times\tau_{it_1}(l)\hat{\varphi}(it_1,w). \tag{5.4}$$

В дальнейшем составляющие вектора

$$\overset{\infty}{Z}{}^{\rm con}(w,\varphi)={}^t(\overset{\infty}{Z}{}^{\rm con}_{+l},\overset{\infty}{Z}{}^{\rm con}_{-l})(w,l) \tag{5.5}$$

и вектора

$$\overset{\circ}{Z}{}^{\rm con}(w,\varphi)={}^t(\overset{\circ}{Z}{}^{\rm con}_{-l},\overset{\circ}{Z}{}^{\rm con}_{+l})(w,\varphi) \tag{5.6}$$

будут определяться равенствами (5.1)–(5.4).

Непрерывная составляющая $R_n^{\rm con}(z_n)$ правой части (4.1) определяется через вектора (5.5) и (5.6) равенством:

$$R_n^{\rm con}(z_n)=\Gamma_1(z_n)\mathcal{M}_2(z_n)\overset{\circ}{Z}{}^{\rm con}(z_n,\varphi)-\mathcal{M}_1(z_n)\overset{\infty}{Z}{}^{\rm con}(z_n,\varphi). \tag{5.7}$$

По аналогии с предыдущими параграфами следует перейти от (5.7) к вектору:

$$(\mathcal{M}_1^{-1}R_n^{\rm con}(z_n)=\Gamma_1(z_n)(\mathcal{M}_1^{-1}\mathcal{M}_2)(z_n)\overset{\circ}{Z}{}^{\rm con}(z_n,\varphi)-\overset{\infty}{Z}{}^{\rm con}(z_n,\varphi) \tag{5.8}$$

с теми же обозначениями для матричных коэффициентов что и в предыдущих параграфах (см. §3).

Так же по аналогии с §1 и §4 мы начнем исследовать действие операторов J и S на второе слагаемое правой части (5.8) (без постоянной c_n^{-1}). Исследование усредненного вектора

$$S \otimes J \otimes \overset{\infty}{Z}{}^{\mathrm{con}}(z_n, \varphi) \tag{5.9}$$

распадается на исследование его компонент из (5.5). Для определенности мы начнем со второй компоненты

$$S \otimes J \otimes \overset{\infty}{Z}{}^{\mathrm{con}}_{-l}(z_n, \varphi), \tag{5.10}$$

т.к. структура внеинтегрального слагаемого правой части (5.2) требует более тонкого счета по сравнению с (5.1). Равенство (5.2) показывает, что исследование (5.10) распадается на две части: Исследование интеграла:

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, z=1/2} J(z) S(z) \tau_z(q) \check{\varphi}(z, z_0) \zeta^{-2}(2z) dz, \tag{5.11}$$

где

$$J(z) = \frac{\pi^2/24}{T \log T} \int\limits_{T/2}^{3T/2} \zeta(s_1, z) dz \tag{5.12}$$

$$S(z) = \frac{c_0}{N} \sum_{(l,p)=1} \overline{t_{j_0}} \tau_z(l) \exp\big(-\frac{l}{N}\big), \tag{5.13}$$

и двух внеинтегральных слагаемых:

$$2\zeta(0)[J_n(\check{V}_\infty; S) + \bar{J}_n(\check{V}_\infty; S)], \tag{5.14}$$

где

$$J_n(\check{V}_\infty, S) = \frac{\pi^2/24}{T \log T} \int\limits_{T/2}^{3T/2} \check{V}_\infty(s_1, z_n) S(it_1) \tau_{it_1}(q) dt_1 \tag{5.15}$$

символ $\check{V}_\infty(s_1, z_n)$ определен в (5.2); $S(it)$ из (5.13).

Величина $\bar{J}_n$ в (5.14) определяется равенством (5.15), когда параметр интегрирования правой части $s_1 = 1/2 + it$, заменен на сопряженный $\bar{s}_1 = 1/2 - it_1$.

Используя интегральный оператор (0.21) сведем сумму (5.13) к аналогу интеграла (0.22):

$$S(z) = \frac{c_0}{2\pi i}\times$$

$$\times \int\limits_{\operatorname{Re} s > 1 + |\operatorname{Re} z - 1/2|} N^{s-1}\Gamma(s)\overline{L_{j_0}}(\bar{s}+\bar{z}-1/2)\bar{L}_{j_0}(\bar{s}-\bar{z}+1/2)\frac{\pi_p(s,z)}{\zeta^2(2s)}\,ds, \tag{5.16}$$

где $\pi_p(s,z)$ – локальная компонента эйлеровского произведения ядра интеграла (5.16). Она состоит из трех множителей:

$$\pi_p(s,z) = \pi_p(s+z-1/2)\pi_p(s-z+1/2)\big(1-\frac{1}{p^{2s}}\big)^{-1},$$

где

$$\pi_p(s) = 1 - p^{-s}\overline{t_{t_{j_0}(p)}} + p^{-2s}.$$

Если $\operatorname{Re} z = 1/2$, как в интеграле (5.11), тогда контур (5.16) надо перенести влево на прямую $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Точкой накопления полученного интеграла становится точка $s = 1/2$, где $\operatorname{Im} s = 0$, т.к. $\Gamma(s)$ экспоненциально убывает по мнимой части s. Поэтому в среднем по z справедлива оценка:

$$S(z) \ll \frac{1}{\sqrt{N}}(|L_{j_0}(z)|^2+1),$$

которую надо понимать как наводящую.

В строгом варианте она имеет вид: $(s = 1/2 + it)$

$$S(z) \ll \frac{1}{\sqrt{N}}\int\limits_{\operatorname{Re} s=1/2} |\Gamma(s)|\cdot(|L_{j_0}(z+it)|^2+|L_{j_0}(z-it)|^2)\frac{dt}{|\zeta(2s)|^2}. \tag{5.17}$$

Из (1.15) и (1.20) получаем оценку: $(0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1)$

$$\check{\varphi}(z,z_n) \ll \begin{cases} \frac{1}{|z|}, & |\operatorname{Im} z| \leqslant \sqrt{T} \\ \frac{1}{|z|}\big(\frac{\sqrt{T}}{|z|}\big)^{2\sigma}, & |\operatorname{Im} z| > \sqrt{T}, \end{cases} \tag{5.18}$$

где $\sigma > 1$ – сколь угодно велико, но фиксировано.

Для случая $|\operatorname{Im} z| \leqslant T$ получаем оценку из равенства (5.12):

$$J(z) \ll \frac{1}{T\log T}\int\limits_0^{3T}\big|\zeta\big(\frac{1}{2}+it\big)\big|^4 dt \ll \log^3 T. \tag{5.19}$$

Кроме того на прямой $\operatorname{Re} z = 1/2$ справедливы неравенства

$$|\tau_z(q)| = |\tau_z(p^\nu)| \leqslant \nu + 1; \quad \zeta^{-2}(2z) \ll \log^2 |2z|). \tag{5.20}$$

Оценки (5.17)–(5.20) обеспечивают для интеграла (5.11) окончательную оценку:

$$(5.11) \ll \frac{\nu+1}{\sqrt{N}} \log^8 T. \tag{5.21}$$

Для оценки внеинтегральных слагаемых (5.14) следует учесть, что порядок $\tau_{it_1}(l) \gg \sqrt{l}$, поэтому для $z = it_1$ контур интеграла (5.16) надо перенести влево на прямую $\operatorname{Re} s = 1$. При этом точкой накопления полученного интеграла будет центральная точка $s = 1$. Поэтому для $z = it_1$ в среднем по t_1 справедлива оценка:

$$S(it_1) \ll \left|L_{j_0}\left(\frac{1}{2} + it_1\right)\right| + 1,$$

которую так же надо понимать как наводящую. Ее строгая форма получается из (5.16) по аналогии с (5.17): $(s = 1 + it)$

$$S(it_1) \ll \int\limits_{\operatorname{Re} s = 1} |\Gamma(s)| \cdot \left|L_{j_0}\left(\frac{1}{2} + i(t + t_1)\right)\right| dt. \tag{5.22}$$

Кроме того из явного вида $\check{V}_\infty(s, z_n)$ в (5.2) получаем оценку:

$$\check{V}_\infty(s_1, z_n) \ll \sqrt{|s_1|} \cdot \left|\check{\varphi}\left(s_1 + \frac{1}{2}; z_n\right)\right| \cdot \log^2 |2s_1|. \tag{5.23}$$

Дополняя оценку (5.23) второй оценкой (5.18) (напомним, что $t_1 \in (T/2, 3T/2)$) и неравенством $\tau_{it_1}(q) \ll \sqrt{q}$, получаем оценку для (5.14):

$$(5.14) \ll \sqrt{q} \cdot T^{-1/2-\sigma} \log^2 T. \tag{5.24}$$

По условию $q = p^\nu \leqslant \sqrt{T}$, поэтому (5.21) и (5.24) вместе приводят к оценке:

$$(5.10) \ll |(5.11)| + |(5.14)| \ll (\sqrt{N})^{-1} \log^9 T.$$

Эта оценка верна для первой компоненты (5.9), поэтому окончательно получаем:

$$S \otimes J \otimes \overset{\infty}{Z}{}^{\mathrm{con}}(z_n, \varphi) \ll (\sqrt{N})^{-1} \log^9 T, \tag{5.25}$$

Эта оценка остается справедливой, если интегральный оператор J заменить на сопряженный $\bar{J}$.

§6. Непрерывные компоненты. Окончание

Переходя к первому слагаемому (5.8) мы снова воспользуемся асимптотикой (3.2) для матричного коэффициента, которая позволяет выделить главный вектор, аналогичный (3.6):

$$i \cdot e^{-\pi\varkappa_n}\Gamma_1(z_n)\delta\overset{\circ}{Z}{}^{\mathrm{con}}(z_n,\varphi). \tag{6.1}$$

Использование остаточного вектора тривиально в виду экспоненциального убывания остатка в (3.2) по параметру t_1.

Напомним, что $\delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, поэтому, исходя из определения вектора $\overset{\circ}{Z}{}^{\mathrm{con}}$ в (5.6), получаем

$$\delta\overset{\circ}{Z}{}^{\mathrm{con}} = {}^t(\overset{\circ}{Z}{}^{\mathrm{con}}_{+l}, \overset{\circ}{Z}{}^{\mathrm{con}}_{-l}). \tag{6.2}$$

Поэтому среднее от вектора (6.1) сводится к среднему от компонент вектора (6.2), умноженных на функцию $\Gamma_1(z_n) \equiv \Gamma_1(z_n, s_1)$ для которой справедливо равенство (3.4) и (3.5).

Для определенности рассмотрим среднее для второй компоненты вектора (6.2), т.к. она сложнее первой:

$$S \otimes J \otimes \Gamma_1(z_n)\overset{\circ}{Z}{}^{\mathrm{con}}_{-l}(z_n,\varphi). \tag{6.3}$$

Среднее (6.3) сводится к среднему от интеграла и внеинтегральных членов правой части (5.3) умноженных на $\Gamma_1(z_n)$.

Исследование среднего для интеграла проводится точно также как и для случая $\overset{\infty}{Z}{}^{\mathrm{con}}_{-l}$ и в виду равенства (3.5) для него сохраняется оценка (5.21).

Среди внеинтегральных слагаемых (5.3) для определенности рассмотрим величину

$$\check{V}_n(s_1) \cdot \tau'_{it_1}(l), \tag{6.4}$$

которая дает максимальный вклад в оценку. При этом для краткости мы положили

$$\check{V}_n(s_1) = \frac{|\zeta(it_1)|^2}{\zeta^2(3-2s_1)}\,\check{\varphi}(it_1, z_n).$$

По условию (0.17) $l = q \cdot l_1$, где $(l_1, q) = 1$, поэтому

$$\tau_s(l) = \tau_s(q)\tau_s(l_1).$$

Отсюда следует равенство для производной по s:

$$\tau_s'(l) = \tau_s'(q)\tau_s(l_1) + \tau_s(q)\tau_s'(l_1). \tag{6.5}$$

Согласно разбиению (6.5) компонента (6.4) также распадается на две части:

$$\check{V}_n(s_1)\tau_{it_1}'(q)\tau_{it_1}(l_1) + \check{V}_n(s_1)\tau_{it_1}(q)\tau_{it_1}'(l_1). \tag{6.6}$$

Более тонким является второе слагаемое (6.6), поэтому его мы и рассмотрим в первую очередь.

Двойное среднее от него (6.3) можно записать по аналогии с (5.15) в виде интеграла:

$$J(\check{V}_n, S') = \frac{\pi^2/24}{T\log T}\int\limits_{T/2}^{P3T/2} \check{V}_n(s_1)S'(it_1)\tau_{it_1}(q)dt_1, \tag{6.7}$$

где

$$S'(z) = \frac{c_0}{N}\sum_{(l,p)=1} \overline{t_{j_0(l)}}\tau_z'(l)\exp\big(-\frac{l}{N}\big). \tag{6.8}$$

В правой части (6.8) мы опустили индекс 1 у переменной суммирования l.

Из определяющего равенства

$$\tau_s(l) = \sum_{l=d_1\cdot d_2} d_1^{s-1/2}\cdot d_2^{1/2-s}$$

получаем равенство для производной

$$\tau_s'(l) = \sum_{l=d_1\cdot d_2} d_1^{s-1/2}\cdot d_2^{1/2-s}\log\frac{d_1}{d_2}. \tag{6.9}$$

Поэтому для суммы (6.8) оператор (0.21) и равенство (6.9) приводят к аналогу представления (5.16) в ядре которого появляется дополнительный множитель из логарифмических производных:

$$\Big[\frac{\bar{L}_{j_0}'}{\bar{L}_{j_0}}\big(\bar{s}+\bar{z}-\frac{1}{2}\big) - \frac{\bar{L}_{j_0}'}{\bar{L}_{j_0}}\big(\bar{s}-\bar{z}+\frac{1}{2}\big) + \\ + \frac{\pi_p'}{\pi_p}\big(s+z-\frac{1}{2}\big) - \frac{\pi_p'}{\pi_p}\big(s-z+\frac{1}{2}\big)\Big]. \tag{6.10}$$

Производные рядов Гекке в критической полосе ведут себя так же как сами ряды, с точки зрения укороченного уравнения и степенного роста их модулей. Интегральные средние от квадрата модулей производных на половинной прямой имеют оценки только на квадрат логарифма больше средних от самих рядов Гекке. Поэтому замена среднего (5.16) на (6.8) практически не влияет на схему счета, добавляя в конечную оценку лишний квадрат логарифма.

Существенное отличие в оценку (6.7), по сравнению с (5.15) вносит множитель $|\zeta(it_1)|^2$ по сравнению с первой степенью $|\zeta(it_1)|$ в (5.2). Поэтому вместо оценки (5.23) появляется оценка:

$$\check{V}_n(s_1) \ll |s_1| \cdot |\check{\varphi}(it_1, z_n)|. \tag{6.11}$$

Вместе с оценкой (5.18) она приводит к оценке среднего (6.7) вида

$$J(\check{V}_n, S) \ll \sqrt{\frac{q}{T}} \log^4 T. \tag{6.12}$$

По условию $q \leqslant \sqrt{T}$, поэтому из (6.12) следует окончательная оценка:

$$J(\check{V}_n, S) \ll (\sqrt[4]{T})^{-1} \log^4 T. \tag{6.13}$$

В первом слагаемом (6.5) стоит $\tau_{it_1}(l)$ вместо $\tau'_{it_1}(l)$, что снимает в оценке (6.13) квадрат логарифма (от неравенства Шварца). Но в то же время там стоит $\tau'_{it_1}(q)$ вместо $\tau_{it_1}(q)$, что добавляет лишний $\log q$. Поэтому в целом оценка двойного среднего от первого слагаемого (6.6) имеет вид (6.13), где будет стоять $\log^3 T$ вместо 4-ой степени логарифма.

Остальные внеинтегральные слагаемые (5.3) оцениваются точно также. При этом величина (6.13) имеет среди них максимальный порядок. Поэтому для всего выражения (5.8) получаем оценку:

$$S \otimes J \otimes (\mathcal{M}_1^{-1} R_n^{\mathrm{con}})(z_n) \ll T^{-1/4} \log^4 T. \tag{6.14}$$

Она остается справедливой при замене J на $\bar{J}$.

Литература

1. А. И. Виноградов, *Укороченное уравнение для сверток.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **211** (1994), 104–120.
2. А. И. Виноградов, *Спектральное разложение сверток.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **212** (1994), 71–91.

3. А. И. Виноградов, *Спектральное разложение в разных вершинах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **224** (1995), 129–146.
4. А. И. Виноградов, *Свертки. Сравнение спектральных разложений в различных вершинах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **227** (1995), 23–41.
5. Н. В. Кузнецов, *О среднем значении рядов Гекке параболической формы веса нуль.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **109** (1981), 93–131.
6. N. V. Kuznetzov, *Sums of Klosterman sums and the eight pover moment of Riemanien Zeta-function.* Number Theory and Related Topics. Tata Inst/ of fund. Research. Bombey 1988.
7. Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника.* Препринт. Хабаровск, 1977.
8. J.-M. Deshouiller and H. Jwaniec, *Klosterman Sums and Fourier Coefficients of cusp forms.* — Invent. Math. **70**, No. **2** (1982), 219–288.
9. А. И. Виноградов, *Неоднородные свертки Ранкина.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 37–52.

Vinogradov A. I. The Petersson conjecture for the zeroth weight. I.

In the present work, a known result by Eichler–Deligne concerning the Petersson conjecture for finite-dimensional classical spaces is proved for infinite-dimensional Hilbert spaces of weight 0. In this work, the techniques of spectral decompositions of convolutions are used. The work is subdivided into two parts. In this (first) part, an explicit representation of an eigenvalue of the Hecke operator in terms of spectral components of the convolution is obtained. On the basis of this representation, the Petersson conjecture will be proved in the second part.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 4 апреля 1997 г.