В. Г. Осмоловский

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА О МАРТЕНСИТНО АУСТЕНИТНЫХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ ПРИ НУЛЕВОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Рассматривается модель упругой среды, допускающей двуфазовое состояние равновесия – мартенситное и аустенитное. Считается, что обе фазы описываются общим классическим законом Гука, среда аустенитной фазы обладает остаточным напряжением, а плотность энергии деформации мартенситной фазы зависит от температуры. В этих предположениях строятся в явном виде состояния равновесия двуфазовой среды и указываются значения температуры, при которых происходят фазовые переходы.

1. Постановка задачи. Двуфазовая упругая среда, заполняющая ограниченную область $\Omega \subset R^m$, $m \geqslant 2$ характеризуется полем смещения – m-мерной вектор-функцией $u(x)$, $x \in \Omega$ и месторасположением каждой из фаз в недеформированном состоянии – измеримыми множествами $\Omega^{\pm}$, $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega$, $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$. Каждая из фаз имеет свою плотность энергии $F^{\pm}(\dot{u}, u, x, \tau)$, где индексы $\pm$ отвечают первой и второй фазе соответственно, $\dot{u}$ – матрица первых производных вектор-функции $u(x)$, а параметр $\tau \in R^1$ для нашей задачи играет роль температуры. Будем считать, что обе фазы имеют квадратичные плотности энергии деформации с общим законом Гука, аустенитная фаза (фаза с индексом $-$) обладает остаточным напряжением, зависящим от температуры, а мартенситная фаза (фаза с индексом $+$) явно зависит от температуры. Если коэффициенты в законе Гука не зависят от температуры, то при сделанных предположениях плотности энергии можно задать равенствами

$$\begin{aligned} F^+ &= F^+(\dot{u}, x, \tau) = a_{ijkl}(x)\xi_{ij}\xi_{kl} - \tau, \\ F^- &= F^-(\dot{u}, x, \tau) = (a_{ijkl}(x)\xi_{ij} + \zeta_{kl})\xi_{kl}, \\ \xi_{ij} &= \frac{1}{2}(u^i_{x_j} + u^j_{x_i}), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где u^i – i-тая компонента смещения u, ζ – квадратично суммируемый в Ω тензор остаточного напряжения, ξ_{ij} – тензор деформации, по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 0 до m, а ограниченные измеримые функции a_{ijkl} удовлетворяют условиям [1]

$$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl} = a_{ijlk}, \qquad a_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geqslant \nu\xi_{ij}\xi_{ij}, \quad \nu > 0.$$

Пусть $\chi(x)$ – характеристическая функция множества Ω^+. Тогда функционнал энергии деформации двуфазовой среды имеет вид

$$I[u,\chi,\tau] = \int\limits_{\Omega} \left[\chi F^+(\dot{u},x,\tau) + (1-\chi)F^-(\dot{u},x,\tau)\right]\, dx \tag{1.2}$$

Будем считать, что на границе области выполнено условие закрепления. Тогда при фиксированном значении τ под состоянием равновесия двуфазовой среды будем понимать такую пару $\widehat{u}_\tau$, $\widehat{\chi}_\tau$, которая дает глобальный минимум функционалу (1.2) на множестве

$$\begin{aligned} &u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m), \\ &\chi \text{ – измеримая характеристическая функция.} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Состояние равновесия будем называть однофазным, если $\widehat{\chi}_\tau \equiv 0$ или $\widehat{\chi}_\tau \equiv 1$ и двуфазным, если $0 \not\equiv \widehat{\chi}_\tau \not\equiv 1$.

Функционал (1.2) с математической точки зрения не является достаточно удачным. Действительно, производя в (1.2) сначала минимизацию по χ при фиксированном u и τ, придем к вариационной задаче по определению равновесного состояния $\widehat{u}_\tau$ со следующим функционалом

$$\begin{gathered} J[u,\tau] = \int\limits_{\Omega} F(\dot{u},x,\tau)\, dx, \quad u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m), \\ F(M,x,\tau) = \min\{F^+(M,x,\tau), \quad F^-(M,x,\tau)\}, \quad M \in R^{m\times m}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Функция F не является выпуклой по компонентам матрицы M. Поэтому общие теоремы не гарантируют существование минимума для функционала (1.4). Для борьбы с этой неприятностью рассматривается какая-либо регуляризация функционала (1.4) или (1.2).

Одна из возможных регуляризаций – это слабо полунепрерывная снизу регуляризация функционала (1.4). При этой регуляризации функционал (1.4) заменяется на наибольший слабо полунепрерывный снизу функционал $\widetilde{J}$, не превосходящий функционал (1.4). Функционал $\widetilde{J}[u,\tau]$ достигает своего наименьшего значения и каждая минимизирующая последовательность для функционала (1.4) слабо сходится к минимуму функционала $\widetilde{J}$. Поэтому при данной регуляризации изучению и физической интерпретации подвергаются минимизирующие последовательности для функционала (1.4). Такой подход описан в [2, 3].

Другая регуляризация основна на добавлении к функционалу (1.2) слагаемого $\sigma|S|$, где $\sigma > 0$ – коэффициент поверхностного натяжения, S – граница раздела множеств Ω^+ и Ω^-, а $|S|$ – ее площадь. Данная регуляризация доускает хорошую физическую интерпретацию [4] и гарантирует существование состояния равновесия [5, 6]. Этой регуляризации посвящены работы [5–10].

Сторонники слабо полунепрерывной снизу регуляризации не отрицают роль поверхностной энергии, но считают ее достаточно малой и поэтому не учитывают. Этот подход внутренне противоречив, поскольку, если у функционала (1.2) при данном τ есть минимизирующая последовательность u_n, χ_n с равномерно по n ограниченной (но не обязательно малой) последовательностью $|S_n|$, то у функционала (1.2) есть состояние равновесия и он не нуждается в какой-либо регуляризации [6].

Вернемся к функционалу (1.2). После несложных преобразований перепишем его в виде

$$I[u,\chi,\tau] = \int\limits_{\Omega} \left[a_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} + \zeta_{kl}\xi_{kl} - \chi(\tau + \zeta_{kl}\xi_{kl})\right] dx. \tag{1.5}$$

Рассмотрим частный случай классического закона Гука и однородного изотропного тензора остаточного напряжения. Тогда

$$\begin{gathered} a_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} = a \operatorname{sp}\xi^2 + b \operatorname{sp}^2\xi, \quad \zeta_{ij} = c(\tau)\delta_{ij}, \\ a = \mu > 0, \quad b = \frac{k}{2} + \mu\left(\frac{m}{9} - \frac{2}{3}\right) > 0, \quad c(\tau) \neq 0, \end{gathered} \tag{1.6}$$

где μ – модуль сдвига, k – модуль сжатия, а $\operatorname{sp} A$ – след матрицы A. Так как $\zeta_{kl}\xi_{kl} = c \operatorname{sp}\xi = c \operatorname{div} u$ и $u|_{\partial\Omega} = 0$, то подстановка

(1.6) в (1.5) приводит к равенству

$$I[u,\chi,\tau] = \int\limits_{\Omega} [a\,\mathrm{sp}\,\xi^2 + b\,\mathrm{sp}^2\,\xi - c\chi\,\mathrm{sp}\,\xi - \tau\chi]\,dx. \tag{1.7}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} &q(\tau) = 1 + \frac{4(a+b)\tau}{c^2(\tau)}, \\ &Q(\tau) = 0 \quad \text{при } q(\tau) \leqslant 0, \qquad Q(\tau) = 1 \quad \text{при } q(\tau) \geqslant 2, \\ &Q(\tau) = \frac{q(\tau)}{2} \quad \text{при } q(\tau) \in (0,2). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Оказывается, что функционал (1.7) по сравнению с общим функционалом (1.2) обладает рядом индивидуальных свойств, позволяющих доказать не только теорему существования состояний равновесия, но и теорему, описывающую множество всех состояний равновесия функционала (1.7).

Теорема. *При $q(\tau) \leqslant 0$ единственным состоянием равновесия является пара $\widehat{u}_\tau \equiv 0$, $\widehat{\chi}_\tau \equiv 0$. При $q(\tau) \geqslant 2$ единственным состоянием равновесия является пара $\widehat{u}_\tau \equiv 0$, $\widehat{\chi}_\tau \equiv 1$. При $q(\tau) \in (0,2)$ существуют лишь двуфазные состояния равновесия, причем каждому τ с указанным $q(\tau)$ соответствует бесконечно много различных состояний равновесия. При всех τ объем фазы с индексом + определен однозначно и выполняется равенство*

$$\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} \widehat{\chi}_\tau\,dx = Q(\tau), \tag{1.9}$$

где $|\Omega|$ – мера области Ω.

Доказательство этой теоремы содержится в следующих разделах статьи. Нужно отметить, что для каждого τ с $q(\tau) \in (0,2)$ бесконечное множество различных (но может быть не всех) состояний равновесия находится в явном виде. Найденное семейство решений имеет весьма экзотический вид (см. рис. 1). Структура множества Ω^+ напоминает расположение пузырьков в закипающей жидкости. Множество аналогичной структуры известно в анализе под названием “швейцарский сыр” [11]. Методы доказательства теоремы использовались ранее автором в [9].

2. Основная лемма. В этом разделе мы сведем вопрос об отыскании состояния равновесия для функционала (1.7) при фиксированном τ к решению краевой задачи для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
&u^i_{x_j}(x) - u^j_{x_i}(x) = 0, \qquad x \in \Omega, \quad i,j = 1,\dots,m,\\
&\operatorname{div} u(x) = \frac{c(\tau)}{2(a+b)}\,(\chi(x) - Q(\tau)), \qquad x \in \Omega,\\
&\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_\Omega \chi(x)\,dx = Q(\tau),\\
&\text{пара } u,\ \chi \text{ лежит в множестве (1.3).}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Лемма 1. *Пусть система* (2.1) *разрешима. Тогда на ее решениях* $u = \widehat{u}_\tau$ *и* $\chi = \widehat{\chi}_\tau$ *и только на них функционал* (1.7) *достигает на множестве* (1.3) *своего наименьшего значения.*

Доказательство. Интегрируя по частям равенство

$$\left(u^i_{x_j} + u^j_{x_i}\right)\left(u^i_{x_j} + u^j_{x_i}\right) = \left(u^i_{x_j} - u^j_{x_i}\right)\left(u^i_{x_j} - u^j_{x_i}\right) + 4u^i_{x_j}u^j_{x_i},$$

получим

$$\int\limits_\Omega \operatorname{sp}\xi^2\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_\Omega \left(u^i_{x_j} - u^j_{x_i}\right)\left(u^i_{x_j} - u^j_{x_i}\right)\,dx + \int\limits_\Omega (\operatorname{div} u)^2\,dx. \tag{2.2}$$

С помощью (2.2) функционал (1.7) преобразуем к виду

$$I[u,\chi,\tau] = \\ = \int\limits_\Omega \left[\frac{a}{4}\sum_{i,j}\left(u^i_{x_j} - u^j_{x_i}\right)^2 + (a+b)(\operatorname{div} u)^2 - c(\tau)\chi\operatorname{div} u - \tau\chi\right]dx. \tag{2.3}$$

По данной измеримой характеристической функции $\chi(x)$ определим число $Q = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \chi(x)\,dx$. Выделяя полный квадрат, находим

$$(a+b)(\operatorname{div} u)^2 - c(\tau)(\chi - Q)\operatorname{div} u = \\ = (a+b)\left[\operatorname{div} u - \frac{c(\tau)}{2(a+b)}(\chi - Q)\right]^2 - \frac{c^2(\tau)}{4(a+b)}(\chi - Q)^2.$$

Так как

$$\int\limits_{\Omega} \frac{c^2(\tau)(\chi - Q)^2}{4(a+b)}\,dx = \frac{c^2(\tau)|\Omega|}{4(a+b)}\,(Q - Q^2),$$

то для (2.3) получим выражение

$$I[u,\chi,\tau] =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left\{ \frac{a}{4}\sum_{i,j}\left(u^i_{x_j} - u^j_{x_i}\right)^2 + (a+b)\left[\operatorname{div} u - \frac{c(\tau)}{2(a+b)}(\chi - Q)\right]^2 \right\} dx +$$

$$+\frac{c^2(\tau)}{4(a+b)}[Q^2 - q(\tau)Q]. \tag{2.4}$$

При каждом фиксированном τ последнее слагаемое в (2.4) как функция аргумента $Q \in [0,1]$ достигает своего наименьшего значения при $Q = Q(\tau)$, где $Q(\tau)$ определено в (1.8). Таким образом,

$$I[u,\chi,\tau] \geqslant \frac{c^2(\tau)|\Omega|}{4(a+b)}[Q^2(\tau) - q(\tau)Q(\tau)]$$

и равенство возможно лишь на решениях системы (2.1). •

3. Решение системы (2.1) в шаре. В этом разделе мы предположим, что $\Omega = B_R$, где B_R – шар в пространстве R^m с центром в точке 0 и радиусом R. Наша цель – найти для этого случая радиально симметричные решения системы (2.1).

Лемма 2. *При каждом фиксированном* τ *функции*

$$\chi(x) \equiv \chi(|x|), \qquad u(x) = \frac{x}{|x|}v(|x|), \qquad |x| \leqslant R,$$

$$v(|x|) = \frac{c(\tau)|x|}{2(a+b)m}\left[\frac{1}{|B_{|x|}|}\int\limits_{B_{|x|}} \chi\,dx - \frac{1}{|B_R|}\int\limits_{B_R}\chi\,dx\right], \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{|B_R|}\int\limits_{B_R}\chi\,dx = Q(\tau)$$

являются решением системы (2.1) *в* $\Omega = B_R$.

Доказательство. В силу равенства

$$u^i_{x_j}(x) = \left(\frac{\delta_{ij}}{|x|} - \frac{x_i x_j}{|x|^3}\right) v(|x|) + \frac{x_i x_j}{|x|^2}v'(|x|)$$

имеем следующие соотношения

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} u(x) = v'(|x|) + \frac{m-1}{|x|} v(|x|) = \frac{1}{|x|^{m-1}} \left(|x|^{m-1} v(|x|)\right)', \\ &u^i_{x_j}(x) - u^j_{x_i}(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Поэтому система (2.1) при фиксированном τ для функций u и χ из первого равенства в (3.1) примет вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} u(x) = g(|x|), \qquad x \in B_R, \qquad u|_{\partial B_R} = 0, \\ &g(|x|) = \frac{c(\tau)}{2(a+b)} \left(\chi(|x|) - Q(\tau)\right), \\ &\frac{1}{|B_R|} \int\limits_{B_R} \chi(|x|)\, dx = Q(\tau). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Из (3.3) приходим к уравнению для $v(|x|)$

$$\left(|x|^{m-1} v(|x|)\right)' = |x|^{m-1} g(|x|), \qquad |x| \leqslant R, \qquad v(R) = 0,$$

интегрируя которое, получим

$$-|x|^{m-1} v(|x|) = \int\limits_{|x|}^{R} |y|^{m-1} g(|y|)\, d|y| = \frac{1}{|S_1|} \int\limits_{|x| \leqslant |y| \leqslant R} g(|y|)\, dy,$$

где $|S_1|$ – площадь единичной сферы в пространстве R^m. Так как

$$\int\limits_{B_R} g(|x|)\, dx = 0, \qquad |B_{|x|}| = \frac{|S_1|}{m} |x|^m,$$

то

$$v(|x|) = \frac{c(\tau)|x|}{2(a+b)m} \frac{1}{|B_{|x|}|} \int\limits_{B_{|x|}} \left[\chi(x) - Q(\tau)\right] dx.$$

выполняя интегрирование в правой части последнего соотношения, получим равенство из второй строки в (3.1).

Из полученной формулы для $v(|x|)$, первого уравнения в (3.3) и формулы для $v'(|x|)$ из (3.2) следует существование такого $k \neq k(R)$, что

$$|u(x)| \leqslant k|x|, \quad |u^i_{x_j}(x)| \leqslant k, \qquad k \neq k(R), \quad x \in B_R. \tag{3.4}$$

Поэтому $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B_R, R^m)$. Таким образом, пара u, χ из (3.1) лежит в множестве (1.3). •

Замечание 1. Пусть $B_R(x_0)$ – шар с центром в точке x_0 и с радиусом R. Тогда функции $u_0(x) = u(x - x_0)$, $\chi_0(x) = \chi(x - x_0)$ для пары u, χ из (3.1) являются решением системы (2.1) в шаре $B_R(x_0)$ с $k \neq k(R, x_0)$.

4. Решение системы (2.1) в произвольной ограниченной области. В этом разделе мы "склеим" из решений системы (2.1) в шарах $B_R(x_0)$ решение этой системы в произвольной ограниченной области $\Omega \subset R^m$. Для этого нам потребуется теорема Витали [12]. Напомним ее формулировку.

Теорема Витали. *Пусть $E \subset R^m$ – измеримое множество. Рассмотрим семейство открытых шаров, для которого выполняется следующее условие: для каждого $x \in E$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует шар $B_{\alpha_0}(x_0)$ из этого семейства такой, что $x \in B_{\alpha_0}(x_0)$ и $|B_{\alpha_0}(x_0)| < \varepsilon$. Тогда из этого семейства шаров можно выбрать такое подмножество $B_{R_j}(x_j)$, $j = 1, \ldots,$ что*

$$B_{R_j}(x_j) \bigcap B_{R_i}(x_i) = \emptyset, \quad i \neq j, \qquad \left| E \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{R_j}(x_j) \right| = 0.$$

Из теоремы Витали следует, что для ограниченной области Ω существует такая последовательность открытых шаров, что

$$B_{R_j}(x_j) \subset \Omega, \qquad B_{R_j}(x_j) \cap B_{R_i}(x_i) = \emptyset, \qquad i \neq j \tag{4.1}$$

и, кроме того

$$\left| \Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{R_j}(x_j) \right| = 0. \tag{4.2}$$

Из теоремы Витали также следует, что любой конечный набор шаров $B_{R_j}(x_j)$, $j = 1, \ldots, N$ удовлетворяющих (4.1) можно выбрать произвольным образом, дополнив его до счетного набора шаров, удовлетворяющих (4.1) и (4.2). Для этого нужно применить теорему Витали к множеству $E = \Omega \setminus \overline{\cup_{j=1}^{N} B_{R_j}(x_j)}$.

Пусть $\widetilde{u}_l(x)$, $\widetilde{\chi}_l(x)$, $x \in B_{R_l}(x_l) \equiv B_l$, построенное в замечании 1, решение системы (2.1) в шаре B_l из системы шаров Витали. Доопределим функции $\widetilde{u}_l(x)$, $\widetilde{\chi}_l(x)$ нулем в $\Omega \setminus B_l$. Полученные продолженные функции обозначим через $u_l(x)$, $\chi_l(x)$, $x \in \Omega$ соответственно. Тогда пара $u_l(x)$, $\chi_l(x)$ лежит в множестве (1.3).

Лемма 3. *Пара функций*

$$u(x) = \sum_{l=1}^{\infty} u_l(x), \qquad \chi(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \chi_l(x) \tag{4.3}$$

является решением системы (2.1) *в области* Ω.

Доказательство. Пусть $\chi_{B_l}(x)$, $x \in \Omega$ – характеристическая функция шара B_l. Каждая из пар $u_l(x)$, $\chi_l(x)$ является решением задачи

$$\begin{gathered} u^i_{lx_j}(x) - u^j_{lx_i}(x) = 0, \quad x \in \Omega, i, j = 1, \ldots, m, \\ \operatorname{div} u_l(x) = \frac{c(\tau)}{2(a+b)} \left(\chi_l(x) - Q(\tau)\right) \chi_{B_l}(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} \chi_l(x)\, dx = \frac{|B_l|}{|\Omega|} Q(\tau), \\ \text{пара } u_l,\ \chi_l \text{ лежит в множестве (1.3)}, \end{gathered} \tag{4.4}$$

Частичные суммы рядов (4.3)

$$u^N = \sum_{l=1}^{N} u_l(x), \quad \chi^N = \sum_{l=1}^{N} \chi_l(x)$$

являются решением задачи

$$\begin{gathered} u^{Ni}_{x_j}(x) - u^{Nj}_{x_i}(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad i, j = 1, \ldots, m, \\ \operatorname{div} u^N(x) = \frac{c(\tau)}{2(a+b)} \left(\chi^N(x) - Q(\tau)\right) \sum_{l=1}^{N} \chi_{B_l}(x), \\ \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} \chi^N(x)\, dx = \frac{\sum_{l=1}^{N} |B_l|}{|\Omega|} Q(\tau), \\ \text{пара } u^N,\ \chi^N \text{ лежит в множестве (1.3)}, \end{gathered} \tag{4.5}$$

По теореме Витали при $N \to \infty$ характеристическая функция $\sum_{l=1}^{N} \chi_{B_l}(x) \to 1$ для почти всех $x \in \Omega$, $\sum_{l=1}^{N} |B_l| \to |\Omega|$. Если мы докажем, что при $N \to \infty$

$$u^N \to u \quad \text{в } \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m), \qquad \chi^N \to \chi \quad \text{в } L_1(\Omega)), \tag{4.6}$$

то предельный переход в (4.5) приводит к тому, что пара u, χ будет удовлетворять системе (2.1).

Для доказательства (4.6) воспользуемся замечанием 1 и теоремой Витали. Тогда для всех $M > N$ и некоторой положительной константы $C \neq C(M, N)$

$$\|u^M - u^N\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2} + \|\chi^M - \chi^N\|_{L_1} \leqslant C \sum_{l=N+1}^{M} |B_l| \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty. \bullet$$

Структура носителя функции χ полученной в лемме 3 с известной долей условности изображена на рис. 1.

5. Доказательство теоремы. Пусть u, χ – решение (2.1) при некотором τ, существование которого установлено в разделе 4. Если $q(\tau) \leqslant 0$, то $Q(\tau) = 0$. Тогда из третьей строки в (2.1) следует, что $\chi \equiv 0$. Если $q(\tau) \geqslant 2$, то $Q(\tau) = 1$. Тогда третья строка из (2.1) приводит к равенству $\chi \equiv 1$. В обоих случаях система (2.1) преобразуется к виду

$$u^i_{x_j} - u^j_{x_i} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, m, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m). \quad (5.1)$$

В этом случае в силу (2.2) и неравенства Корна [1]

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2} \leqslant c \int_\Omega \operatorname{sp} \xi^2 \, dx, \qquad u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m) \qquad (5.2)$$

следует, что единственным решением (5.1) является функция $u \equiv 0$.

Для $q(\tau) \in (0, 2)$ решения системы (2.1) (быть может не все) построены в разделе 4. Заметим, что было построено бесконечно много различных решений, так как конечное число шаров, удовлетворяющих условию (4.1) в покрытии Витали можно выбрать произвольным образом.

Равенство (1.9) автоматически выполняется, поскольку оно входит составной частью системы (2.1). $\bullet$

Замечание 2. Любопытно отметить, что при $q(\tau) \in (0, 2)$ в области $\Omega = B_R$ существуют как радиально симметричное решение из раздела 3, так и решение, не обладающее этой симметрией, из раздела 4.

Замечание 3. Различные решения системы (2.1) при $q(\tau) \in (0,2)$ можно получить не только с помощью различных покрытий Витали области Ω, но и с помощью различных разбиений носителя функции χ в каждом шаре покрытия Витали на концентрические шаровые слои с сохранением в каждом шаре третьего равенства из (3.1).

6. Зависимость множеств Ω^+ от граничных условий. Если $\partial\Omega$ кусочно непрерывно дифференцируема, то можно попытаться искать решение системы (2.1) в виде $u = \nabla p$. Тогда для функций p и χ получим уравнения

$$\begin{aligned} &\Delta p = \frac{c(\tau)}{2(a+b)}\,(\chi(x) - Q(\tau)), \qquad x \in \Omega, \quad p \in W_2^2(\Omega), \\ &\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} \chi(x)\,dx = Q(\tau). \end{aligned} \tag{6.1}$$

Граничное условие $u|_{\partial\Omega} = \nabla p|_{\partial\Omega} = 0$ заведомо выполняется, если

$$p|_{\partial\Omega} = \frac{\partial p}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6.2}$$

Задача (6.1), (6.2) – это задача Коши для оператора Лапласа, поэтому естественно ожидать, что ее разрешимость требует серьезных ограничений на функцию χ. Цель этого раздела – рассмотреть вариационную задачу для функционала (1.7) при других граничных условиях на функцию $u(x)$, чем в (1.3). Требования на них таковы: эти граничные условия должны быть достаточно физичны, для них должна оставаться справедливой лемма 1, задача (5.1) должна иметь лишь нулевое решение, условия (6.2) должны трансформироваться в такие, для которых разрешимость задачи (6.1) не вызывает затруднений. Мы рассмотрим два типа таких граничных условий.

К первому типу относятся условия периодичности. Пусть $\Omega = [0,1]^m \subset R^m$ – куб с единичным ребром, $x_i' = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_m)$, $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, где 1 стоит на i-ом месте. Рассмотрим функционал (1.7) на множестве

$$\begin{aligned} &u \in W_2^1(\Omega, R^m), \quad u(x_i') = u(x_i' + e_i), \\ &i = 1, \ldots, m, \quad \int\limits_{\Omega} u\,dx = 0, \end{aligned} \tag{6.3}$$

χ – измеримая характеристическая функция.

Тождество (2.2), неравенство Корна (5.2) для функций u из (6.3) остаются в силе, условия (6.2) заменяются на

$$p(x_i') = p(x_i' + e_i), \qquad \frac{\partial p(x_i')}{\partial x_i} = \frac{\partial p(x_i' + e_i)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, m. \quad (6.4)$$

С условиями (6.4) первое уравнение в (6.1) разрешимо для любой функции χ, удовлетворяющей второму уравнению из (6.1). Таким образом, условия периодичности удовлетворяют всем перечисленным выше требованиям.

Ко второму типу условий относятся условия проскальзывания. Пусть $\Omega \subset R^m$ – многогранник, n – вектор нормали к $\partial\Omega$, u_n – нормальная компонента u. Рассмотрим функционал (1.7) на множестве

$$\begin{aligned} &u \in W_2^1(\Omega, R^m), \qquad u_n|_{\partial\Omega} = 0, \\ &\chi \text{ – измеримая характеристическая функция.} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Для таких функций u в случае кусочно-линейной границы (Ω – многогранник) тождество (2.2) сохранится, поскольку для гладкой функции u в правой части тождества (2.2) добавляется слагаемое

$$4 \int\limits_{\partial\Omega} \left[u^i \frac{\partial u_n}{\partial x_i} - u_n \operatorname{div} u - k_{ij} u^i u^j \right] dS, \quad k_{ij} \text{ – матрица кривизны,}$$

исчезающее для гладких функций u с нулевой нормальной компонентой в случае многогранника. Неравенство Корна (5.2) для функций u из (6.5) остается в силе, условия (6.2) заменятся на

$$\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6.6)$$

С условием (6.6) первое уравнение из (6.1) разрешимо для любой функции χ, удовлетворяющей второму уравнению из (6.1). Таким образом, условия проскальзывания удовлетворяют всем перечисленным выше требованиям.

Итак, для условий периодичности и условий проскальзывания справедлива теорема из первого раздела с одним существенным дополнением: в качестве $\widehat{\chi}_\tau$ может быть взята любая измеримая характеристическая функция, удовлетворяющая условию (1.9). Поле смещений $\widehat{u}_\tau$ восстанавливается по $\widehat{\chi}_\tau$ однозначно в силу единственности решений задачи (5.1) при этих граничных условиях. Функцию $\widehat{u}_\tau$ можно получить как градиент решения первого уравнения из (6.1) с граничным условием (условие периодичности) или (6.6) (условие проскальзывания).

Работа поддержана РФФИ 96-91-00790, INTAS 96-0835) и грантом Госкомвуза по высшему образованию (Новосибирский университет).

Литература

1. Г. Фикера, *Теоремы существования в теории упругости.* М., Мир, 1974.
2. J. M. Ball, R. D. James, *Fine phase mixture as minimisers of energy.* — Arch. Rational Mech. Anal. **100** (1987), 13–52.
3. N. B. Firoozy, R. V. Kohn, *Geometric parametrs and the relaxation of multiwell energies.* In: Microstructure and Phase Transition, eds. D. Kinderlehrer et al., (Berlin: Springer, 1993).
4. М. А. Гринфельд, *Методы механики сплошной среды в теории фазовых превращений.* М., Наука, 1990.
5. В. Г. Осмоловский, *Теорема существования и сдабая форма уравнений Лагранжа для вариационной задачи теории фазовых превращений.* — Сиб. матем. журн. **35, No. 4** (1994), 835–846.
6. В. Г. Осмоловский, *Зависимость состояния равновесия двуфазовой среды от коэффициента поверхностного натяжения и температуры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **213** (1994), 131–150.
7. Н. Ф. Морозов, В. Г. Осмоловский, *О постановке и теореме единственности для вариационной задачи о фазовых переходах в механике сплошных сред.* — Журн. прикл. матем. и мех. **58, No. 5** (1994), 125–132.
8. В. Г. Осмоловский, *Вариационная задача теории упругости двуфазовой среды с нулевым коэффициентом поверхностного натяжения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **221** (1995), 208–225.
9. В. Г. Осмоловский, *Теорема существования и точные решения в вариационной задаче о высокотемпературных фазовых переходах при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения.* — Проблемы мат. анализа вып. **15** (1995), 201–212.
10. V. G. Osmolovski, *Phase transition in the mechanics of continuous media for big loading.* — Math. Nachr. **177** (1996), 233–250.
11. Т. Гамелин, *Равномерные алгебры.* М., Мир, 1973.
12. С. Сакс, *Теория интеграла.* ИЛ, М. 1949.

Osmolowski V. G. Martenoitic-anotenitic phase transformation variation problem for zero ourface tension coefficient.

For martenoitic-anotenitic phase transformation variation problem with classical Hook's law the solutions in explicit form are given.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 5 мая 1997 г.