В. А. Солонников

ОБ ОЦЕНКЕ МАКСИМУМА МОДУЛЯ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Посвящается юбилею
Ольги Александровны Ладыженской

§1. Введение

В настоящей работе, являющейся продолжением статьи [1], доказывается оценка

$$\sup_{x\in\Omega} | \vec{v}(x) | \leqslant c \left(\sup_{x\in\partial\Omega} | \vec{a}(x) | \right) \tag{1}$$

для решения задачи

$$\begin{aligned} &-\nabla^2 \vec{v} + R(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} + \nabla p = 0, \quad \nabla\cdot\vec{v} = 0 \quad (x\in\Omega) \\ &\vec{v}\big|_{\partial\Omega} = \vec{a} \end{aligned} \tag{2}$$

в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с гладкой границей. Из нее вытекает, что производные решения задачи (2) в любой точке $x\in\Omega$ могут быть оценены через $\sup\limits_{x\in\partial\Omega} | \vec{a}(x) |$ и через $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$. В работе [1] была получена оценка $\mathcal{D}^j\,\vec{v}(x)$ через норму Гельдера $\vec{a}(x)$ с показателем $\alpha > 1/2$.

Ради простоты изложения мы считаем, что $\partial\Omega$ является связной поверхностью и $\vec{a}(x)$ удовлетворяет необходимому условию

$$\int\limits_{\partial\Omega} \vec{a}\cdot\vec{n}\,dS = 0, \tag{3}$$

хотя наши рассуждения применимы к случаю, когда $\partial\Omega$ распадается на конечное число связных компонент и условие (3) выполняется для каждой компоненты.

Приведем необходимые для дальнейшего вспомогательные предложения. Пусть $(\vec{w},s)$ – решение линейной задачи

$$\begin{aligned} &-\nabla^2\vec{w} + \nabla s = 0, \quad \nabla\cdot\vec{w}(x) = 0 \quad (x\in\Omega), \\ &\vec{w}\big|_{\partial\Omega} = \vec{a}. \end{aligned} \tag{4}$$

Имеет место следующее предложение.

Предложение 1. *Для решения задачи* (4) *справедливы оценки*

$$\sup_{x\in\Omega} \mid \vec{w}(x) \mid \leqslant c \sup_{x\in\partial\Omega} \mid \vec{a}(x) \mid, \tag{5}$$

$$\mid \mathcal{D}\,\vec{w}\,(x) \mid + \mid s(x) \mid \leqslant c(\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)^{-1} \sup_{x\in\partial\Omega} \mid \vec{a}(x) \mid . \tag{6}$$

Оценка (5) была впервые приведена без доказательства в работе [2]. Ее доказательство предельно просто: нужно воспользоваться представлением $\vec{w}\,(x)$ в виде потенциала двойного слоя (см. [2] и [3], гл. III)

$$\vec{w}\,(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{P}(x,y)\,\vec{\mu}(y)\,dS_y, \tag{7}$$

где

$$\mathcal{P} = (P_{ik})_{i,k=1,2,3},$$

$$P_{ik}(x,y) = -\frac{3}{4\pi}\sum_{j=1}^{3}\frac{(x_i-y_i)(x_k-y_k)(x_j-y_j)}{\mid x-y\mid^5}n_j(y)$$

и свойством суммируемости $\mathcal{P}$ по y:

$$\int\limits_{\partial\Omega} \mid \mathcal{P}(x,y) \mid_\xi \, dS_y \leqslant c$$

(для гармонического потенциала двойного слоя это свойство доказано в [4]). Следовательно,

$$\sup_{\Omega} \mid \vec{w}(x) \mid \leqslant c \sup_{\partial\Omega} \mid \vec{\mu}(\,\xi\, y) \mid . \tag{8}$$

Векторное поле $\vec{\mu}$ определяется из фредгольмовой системы интегральных уравнений на $\partial\Omega$

$$\vec{\mu}\,(x) + 2\int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{P}(x,y)\vec{\mu}\,(y)\,dS_y = 2\vec{a}\,(x)$$

со слабо полярным ядром $2\mathcal{P}(x,y)$, x, $y\in\partial\Omega$, и может быть выражено через резольвенту этого ядра:

$$\vec{\mu}\,(x) = 2\vec{a}\,(x) + \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{R}(x,y)\,\vec{a}\,(y)\,dS.$$

Так как $| R_{ik}(x,y) | \leqslant c|x-y|^{-2+\delta}$, $\delta > 0$ (см. [2]), то

$$\sup_{\partial\Omega} | \vec{\mu}(x) | \leqslant c \sup_{\partial\Omega} | \vec{a}(x) | \,.$$

Из этой оценки и из (8) вытекает (5). Неравенство (6) для $\mathcal{D}\,\vec{w}$ следует из (7) и из оценки

$$| \mathcal{D}\,\vec{w}\,(x) | \leqslant \sup_{\partial\Omega} | \vec{\mu}\,(y) | \int_{\partial\Omega} | \mathcal{D}_x\,\mathcal{P}(x,y) | \; dy \leqslant$$

$$\leqslant c\,(\mathrm{dist}\,(x,\partial\Omega))^{-1} \sup_{\partial\Omega} | \vec{\mu}\,(y) | \,.$$

Такая же оценка справедлива и для

$$s(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} n_j(y) \nabla \frac{x_j - y_j}{|x-y|^3} \cdot \vec{\mu}\,(y)\, dS_y \,.$$

Предложение 2. *Если $\partial\Omega$ – связная поверхность, то векторное поле $\vec{w}\,(x)$ представимо в виде*

$$\vec{w}\,(x) = rot\ \vec{b}\,(x),$$

где $\vec{b} \in W_6^1(\Omega$, причем

$$\| \vec{b} \|_{W_6^1(\Omega)} \leqslant c \sup_{\partial\Omega} | \vec{a}\,(x) | \,. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть Ω' – область, ограниченная поверхностью $\partial\Omega$ и сферой $S_R = \{|x - x_0| = R\} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, $x_0 \in \Omega$ а $\vec{w}_1(x)$ – соленоидальное векторное поле, заданное в Ω', удовлетворяющее краевым условиям

$$\vec{w}_1\big|_{\partial\Omega} = \vec{a}, \quad \vec{w}_1\big|_{S_R} = 0 \tag{10}$$

и неравенству

$$\| \vec{w}_1 \|_{L_6(\Omega_1)} \leqslant c \sup_{\partial\Omega} | \vec{a}(x) | \,. \tag{11}$$

Поле $\vec{w}_1(x)$ можно определить формулой

$$\vec{w}_1(x) = \psi(x)\,\vec{w}_2(x) + \vec{w}_3(x), \tag{12}$$

где $\vec{w}_2$ – решение внешней задачи

$$-\nabla^2\,\vec{w}_2 + \nabla p_2 = 0, \quad \nabla \cdot \vec{w}_2(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$$

$$\vec{w}_2\big|_{\partial\Omega} = \vec{a}, \quad \vec{w}_2 \to 0 \quad (|x| \to \infty), \tag{13}$$

ψ – гладкая функция, равная единице в окрестности $\partial\Omega$, нулю в окрестности S_R и удовлетворяющая нераверству $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, и $\vec{w}_3(x)$ – векторное поле, удовлетворяющее соотношениям

$$\nabla \cdot \vec{w}_3\,(x) = -\nabla \cdot (\psi\,\vec{w}_2\,) = -\vec{w}_2 \cdot \nabla\psi \quad (x \in \Omega'),$$
$$\vec{w}_3\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \vec{w}_3\big|_{S_R} = 0.$$

Его можно выбрать так (см. [5]), что

$$\|\vec{w}_3\,\|_{W_2^1(\Omega')} \leqslant c\|\,\vec{w}_2 \cdot \nabla\psi\,\|_{L_2(\Omega')}.$$

Векторное поле $\vec{w}_2$ подчиняется неравенству

$$\sup_{\Omega_1} \mid \vec{w}_2(x) \mid \leqslant c \sup_{\partial\Omega} \mid \vec{a}(x) \mid, \tag{14}$$

которое доказывается так же, как (5). Поэтому $\vec{w}_1$ удовлетворяет (11).

Положим

$$\vec{b}\,(x) = \frac{1}{4\pi}\mathrm{rot}\,\left(\int\limits_{\Omega} \frac{\vec{w}\,(y)\,dy}{|x-y|} + \int\limits_{\Omega'} \frac{\vec{w}_1\,(y)\,dy}{|x-y|}\right). \tag{15}$$

Ясно, что $\vec{b} \in W_6^1(\Omega)$; в силу теоремы Кальдерона–Зигмунда,

$$\|\,\vec{b}\|_{W_6^1(\Omega)} \leqslant c\left(\|\,\vec{w}\,\|_{L_6(\Omega)} + \|\,\vec{w}_1\,\|_{L_6(\Omega')}\right) \leqslant c \sup_{\partial\Omega} \mid \vec{a}(x) \mid. \tag{15$'$}$$

Наконец, так как

$$\nabla \cdot \left(\int\limits_{\Omega} \mid x-y \mid^{-1}\ \vec{w}\,(y)\,dy + \int\limits_{\Omega'} \mid x-y \mid^{-1}\ \vec{w}_1\,(y)\,dy\right) = 0,$$

мы имеем при $x \in \Omega$

$$\mathrm{rot}\ \vec{b}\,(x) = -\Delta\frac{1}{4\pi}\left(\int\limits_{\Omega} \frac{\vec{w}\,(y)\,dy}{|x-y|} + \int\limits_{\Omega'} \frac{\vec{w}_1\,(y)\,dy}{|x-y|}\right) = \vec{w}\,(x).$$

Предложение доказано.

§2. Доказательство оценки (1)

Воспользуемся представлением решения задачи (2) через матрицу Грина:

$$\vec{v}\,(x) = \vec{w}\,(x) + \int\limits_{\Omega} G(x,y)(\,\vec{v}\cdot\nabla)\,\vec{v}\,dy =$$

$$= \vec{w}\,(x) - \int\limits_{\Omega} \nabla_y\, G(x,y)\,(\,\vec{v}\,(y)\otimes\,\vec{v}\,(y))\;dy. \qquad (16)$$

Матрица Грина $G(x,y) = (G_{ik}(x,y))_{i,k=1,2,3}$ построена в работе К. Одквиста [2], и для нее установлены оценки

$$|\,G_{ik}(x,y)\,| \leqslant \frac{c}{|x-y|},$$

$$|\,\nabla\,G_{ik}(x,y)\,| \leqslant \frac{c}{|x-y|^2}.$$

Поэтому, как показано в [1],

$$\sup_{\Omega}\,|\,\,\vec{v}\,(x)\,| \leqslant \sup_{\Omega}\,|\,\,\vec{w}\,(x)\,\,| + c\|\,\vec{v}\,\|^2_{L_p(\Omega)}, \quad q>6$$

$$\|\,\vec{v}\,\|_{L_q(\Omega)} \leqslant \|\,\vec{w}\,\|_{L_q(\Omega)} + c\|\,\vec{v}\,\|^2_{L_q(\Omega)}, \quad p \geqslant \frac{6q}{q+3}.$$

В частности, последнее неравенство справедливо при $p=6$, так что

$$\sup_{\Omega}\,|\,\,\vec{v}\,(x)\,| \leqslant c\left(\sup_{\Omega}\,|\,\,\vec{w}\,(x)\,| + \sup_{\Omega}\,|\,\,\vec{w}\,(x)\,|^2\right) + c\|\,\vec{v}\,\|^4_{L_6(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant c\left(\sup_{\partial\Omega}\,|\,\,\vec{a}\,(x)\,| + \sup_{\Omega}\,|\,\,\vec{a}\,(x)\,|^2\right) + c\|\,\vec{v}\,\|^4_{L_6(\Omega)}. \qquad (17)$$

Для оценки $\|\,\vec{v}\,\|_{L_6(\Omega)}$ представим решение задачи (2) в виде

$$\vec{v}\,(x) = \vec{v}\,'(x) + \vec{u}\,(x),$$

$$\vec{v}\,'(x) = \operatorname{rot}\zeta(x)\,\vec{b}\,(x) = \zeta(x)\,\vec{w}\,(x) + \nabla\zeta(x)\,\times\,\vec{b}\,(x), \qquad (18)$$

где $\zeta(x)$ – “срезающая функция Хопфа” того же типа, что в [3], гл. V, §4. Она обладает следующими свойствами:

1. $\zeta(x) = 0$ при $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \geqslant \rho$, $\zeta(x) = 1$ при $\operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \leqslant \varepsilon\rho$, $0 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1$ $(x\in\Omega, \varepsilon, \rho \ll 1)$

2. Имеет место оценка

$$|\nabla\zeta(x)|\leqslant\frac{\varkappa}{\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)},\quad \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\in(\varepsilon\rho,\rho), \tag{19}$$

где $\varkappa=\frac{c}{\ln\varepsilon^{-1}}$, c – постоянная, не зависящая от ε и ρ (таким образом, $\varkappa$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малом ε).

3. $|\mathcal{D}^2\zeta(x)|\leqslant c(\varepsilon,\varkappa)$.

Легко проверить (см. [6]), что в качестве $\zeta(x)$ можно взять функцию

$$\zeta(x)=\chi\left(\varkappa\ln\frac{c\rho}{d(x)}\right),$$

где $\chi(\xi)$ – гладкая функция, равная единице при $\xi\geqslant 1$, нулю при $\xi\leqslant 0$, а $d(x)$ – регуляризованное расстояние от x до $\partial\Omega$ [7].

Из (5) и (15′) следует, что

$$\sup_\Omega|\vec v\,'(x)|\leqslant\sup_\Omega|\vec w\,'(x)|+\sup_\Omega|\nabla\zeta\times\vec b\,(x)|\leqslant c(\varepsilon,\rho)\sup_{\partial\Omega}|\vec a\,'(x)|,$$

векторное же поле $\vec u\,(x)$ является решением задачи

$$\begin{aligned}&-\nabla^2\vec u+R(\vec v\,'\cdot\nabla)\,\vec u+R(\vec u\cdot\nabla)\,\vec v\,'+R(\vec u\cdot\nabla)\,\vec u=\\&-\nabla^2\vec v\,'-R(\vec v\,'\cdot\nabla)\,\vec v,\\&\ \ \nabla\cdot\vec u=0\quad(x\in\Omega),\\&\ \ \vec u\big|_{\partial\Omega}=0,\end{aligned}$$

а значит оно удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned}Q[u,\vec\eta]\equiv\int_\Omega\nabla\vec u:\nabla\vec\eta\,dx+R\int_\Omega((\vec v\,'+\vec u\,)\cdot\nabla)\ \vec u\cdot\vec\eta\,dx-\\-R\int_\Omega\vec u\otimes\vec v\,':\nabla\vec\eta\,dx=\int_\Omega\nabla\vec v\,':\nabla\vec\eta\,dx+R\int_\Omega((\vec v\,'\otimes\vec v\,'):\nabla\vec\eta\,dx\end{aligned} \tag{20}$$

при любом соленоидальном $\vec\eta\in\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

Преобразуем первый интеграл правой части. В силу (18),

$$\int_\Omega\nabla\vec v\,':\nabla\vec\eta\,dx=\int_\Omega(\nabla\vec v\,'':\nabla\vec\eta+\vec w\cdot(\nabla\zeta\cdot\nabla)\,\vec\eta)\ dx+\int_\Omega\zeta\nabla\,\vec w\,:\nabla\vec\eta\,dx,$$

где $\vec{v}\,'' = \nabla\zeta \times \vec{b}$. Далее, так как $\vec{w}$ является решением задачи (4), то

$$\int\limits_{\Omega} \zeta \nabla \vec{w} : \nabla \vec{\eta}\, dx = -\int\limits_{\Omega} ((\nabla\zeta \cdot \nabla)\, \vec{w}\,) \cdot \vec{\eta}\, dx - \int\limits_{\Omega} \nabla s \cdot \zeta \vec{\eta}\, dx =$$

$$\int\limits_{\Omega} s(\nabla\zeta \cdot \vec{\eta})\, dx + \int\limits_{\Omega} \vec{w}\, \left[(\nabla\zeta \cdot \nabla)\, \vec{\eta} + \vec{\eta}\, \nabla^2 \zeta\right]\, dx.$$

Таким образом, (20) может быть записано в виде

$$Q[\,\vec{u}, \vec{\eta}\,] = L[\,\vec{\eta}\,],$$

где

$$L[\,\vec{\eta}\,] = \int\limits_{\Omega} s(\nabla\zeta \cdot \vec{\eta})\, dx + \int\limits_{\Omega} \vec{w} \cdot \left[2(\nabla\zeta \cdot \nabla)\, \vec{\eta} + \vec{\eta}\, \nabla^2 \zeta\right]\, dx +$$

$$\int\limits_{\Omega} \nabla(\nabla\zeta \times \vec{b}) : \nabla\, \vec{\eta}\, dx + R \int (\vec{v}\,' \otimes \vec{v}\,') : \nabla\, \vec{\eta}\, dx.$$

Положим здесь $\vec{\eta} = \vec{u}$ Легко видеть, что

$$Q[\,\vec{u}, \vec{u}\,] = \|\nabla \vec{u}\|^2_{L_2(\Omega)} - R \int\limits_{\Omega} \vec{u} \otimes \vec{v}\,' : \nabla\, \vec{u}\, dx.$$

Вследствие (5), (9), (18) и (19), имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_{\Omega} \vec{u} \otimes \vec{v}\,' : \nabla \vec{u}\, dx \right| \leqslant \sup_{\Omega} \mid \vec{w}\,(x) \mid \int\limits_{\Omega} \mid \vec{u} \mid \mid \nabla \vec{u} \mid \zeta\, dx +$$

$$+\varkappa \sup_{\Omega} \mid \vec{b}\,(x) \mid \int \frac{\mid \vec{u} \mid \mid \nabla \vec{u} \mid dx}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)} \leqslant$$

$$c \left(\rho \sup_{\Omega} \mid \vec{w}\,(x) \mid + \varkappa \sup_{\Omega} \mid \vec{b}\,(x) \mid \right) \|\nabla\, \vec{u}\,\|^2_{L_2(\Omega(} \leqslant$$

$$c_1(\rho + \varkappa) \sup_{\partial\Omega} \mid \vec{a}\,(x) \mid \, \|\nabla \vec{u}\,\|^2_{L_2(\Omega)}$$

с постоянной c_1, не зависящей от ρ и ε. Поэтому, если выбрать ρ и $\varkappa$ настолько малыми, что

$$c_1\, R(\rho + \varkappa) \sup_{\partial\Omega} \mid \vec{a}\,(x) \mid \leqslant 1/2,$$

то
$$Q[\vec{u},\vec{u}] \geqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{21}$$
Далее, для $L[\vec{u}]$ справедлива оценка
$$| L[\vec{u}] | \leqslant c(\varepsilon,\rho)\big[\|\vec{u}\|_{L_2(\Omega)}\big(\|s\|_{L_2(\omega)} + \sup_{\Omega} | \vec{w}(x) | \big) +$$
$$+ \|\nabla\vec{u}\|_{L_2(\Omega)}\big(\|\vec{b}\|_{W_2^1(\omega)} + \sup_{\Omega} | \vec{w}(x) | \big)\big] + R\|\vec{v}'\|^2_{L_4(\Omega)}\|\nabla\vec{u}\|_{L_2(\Omega)},$$
где $\omega = \operatorname{supp}\nabla\zeta$. Так как $\operatorname{dist}(\omega,\partial\Omega) \geqslant \varepsilon\rho$, то вследствие (5), (6), (9)
$$| L[\vec{u}] | \leqslant c_2(\varepsilon,\rho)\left(\sup_{\partial\Omega} | \vec{a}(x) | + \sup_{\partial\Omega} | \vec{a}(x) |^2\right)\|\nabla\vec{u}\|_{L_2(\Omega)}.$$
Из этой оценки и из (21) следует
$$\|\nabla\vec{u}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant 2c_2(\varepsilon,\rho)\left(\sup_{\partial\Omega} | \vec{a}(x) | + \sup_{\partial\Omega} | \vec{a}(x) |^2\right).$$
Очевидно, такое же неравенство справедливо и для $\|\vec{u}\|_{L_6(\Omega)}$. Таким образом,
$$\|\vec{v}\|_{L_6(\Omega)} \leqslant \|\vec{v}'\|_{L_6(\Omega)} + \|\vec{u}\|_{L_6(\Omega)} \leqslant c_3(\sup_{\partial\Omega} | \vec{a}(x) |),$$
что вместе с (17) влечет за собой (1).

Неравенство (1) справедливо и в случае, когда $\partial\Omega$ распадается на конечное число связных компонент: $\partial\Omega = \bigcup\limits_{j=1}^{m} S_j$ и
$$\int\limits_{S_j} \vec{a}\cdot\vec{n}\,ds = 0, \quad j = 1,\dots,m. \tag{22}$$
Оценка (5) для таких областей доказана независимо П. Маремонти, а также П. Галди и В. Фарнхорном. Предложение 2 при условии (22) остается в силе. Обозначим через Ω_j ограниченную область с $\partial\Omega_j = S_j$ и предположим, что $\Omega_m \supset \Omega\cup\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_{m-1}$. Тогда задача (13) эквивалентна совокупности $m-1$ внутренних задач (для $\Omega_1,\dots,\Omega_{m-1}$ и внешней задачи для $\mathbb{R}^3\setminus\Omega_m$; неравенство (14) остается в силе. Векторное поле $\vec{w}_1(x)$ следует определить формулой (12) в области $\Omega'_m \subset \mathbb{R}^3\setminus\Omega_m$, ограниченной S_m и сферой $|x-x_0| = R$, а в $\Omega_1,\dots,\Omega_{m-1}$ положить $\vec{w}_1(x) = \vec{w}_2(x)$; при этом оценка (11) сохранится. Наконец, $\vec{b}(x)$ следует определить

формулой (15) с $\Omega' = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_{m-1} \cup \cup \Omega'_m$. Остальные рассуждения такие же, как выше; необходимые оценки тензора Грина следуют из общих результатов работы [8].

В заключение отметим, что представление (16) и неравенство (1) дают возможность оценить производные решения задачи (2) в любой точке $x \in \Omega$ через $\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ и $\max\limits_{\partial\Omega} |\,\vec{a}\,(x)\,|$. Кроме того, рассуждения, проведенные при доказательстве оценки (1), доказывают разрешимость задачи (2) при $\vec{a} \in C(\partial\Omega)$, удовлетворяющем условию (22).

Литература

1. R. Finn, V. Solonnikov, *Gradient estimates for solution of the Navier–Stokes equations.* Submitted to Topol. Meth. Nonlinear Anal..
2. F. K. G. Qdquist, *Über die Randwertaufgaben der Hydrodynamik zäher Flüssingkei ten.* — Math. Zeithschrift **32** (1930), 329–375.
3. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.* Наука, М., 1970 288с.
4. Н. М. Гюнтер, *Теория потенциала и ее применения к основным задачам математической физики.* Гостехиздат 1953.
5. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *О некоторых задачах векторного анализа и об обобщенных постановках краевых задач для уравнений Навье–Стокса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **59** (1976), 81–116.
6. В. А. Солонников, К. Пилецкас, *О некоторых пространствах соленоидальных векторов и о разрешимости краевой задачи для системы уравнений Навье–Стокса в областях с некомпактными границами.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **73** (1977), 136–151.
7. E. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions.* Princeton Univ. Press, New York 1970.
8. В. А. Солонников, *О матрицах Грина для эллиптических и параболических краевых задач.* I: Труды МИАН СССР, **110**, (1970) 107–145; II: Труды МИАН СССР, **116**, (1971) 181–216.

Solonnikov V. A. On the estimate of maximum modulus of solution of stationary problem for the Navier–Stokes equations.

It is shown that the solution of a nonlinear stationary problem for the Navier–Stokes equations in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ with the boundary conditions $\vec{v}\big|_{\partial\Omega} = \vec{a}(x)$ satisfies the inequality

$$\sup_{x\in\Omega} |\,\vec{v}\,(x)\,| \leqslant c\left(\sup_{x\in\partial\Omega} |\,\vec{a}(x)\,|\right)$$

for arbitrary Reynolds number.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 12 апреля 1997 г.