Н. Н. Уральцева

О СВОЙСТВАХ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧЕК КОНТАКТА С ИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

Посвящается юбилею
Ольги Александровны Ладыженской

Рассматривается задача с препятсвием для уравнения Лапласа. В простейшем случае она может быть сформулирована как задача о минимизации функционала $\int\limits_{\Omega}\big(|Dv|^2+2vf\big)\,dx$ на выпуклом множестве $\{v\in H^1(\Omega):\ v\geqslant 0$ п.в. в $\Omega;\ v-\varphi\in H^1_0(\Omega)\}$. Здесь $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – ограниченная область; Dv – градиент v, f и φ – заданные функции, причем f положительна в $\overline{\Omega}$, φ неотрицательная на $\partial\Omega$.

Пусть u – решение задачи. Известно, что при определенной гладкости f, φ и $\partial\Omega$ функция u принадлежит $C^{1,1}(\overline{\Omega})$ и удовлетворяет уравнению $\Delta u=f$ на множестве $\mathcal{N}(u)=\{x\in\Omega: u(x)>0\}$. Здесь $\Delta=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа. $\Lambda(u)=\Omega\setminus\mathcal{N}(u)$ называется коинцидентным множеством, а $\sigma(u)=\partial\mathcal{N}(u)\cap\Omega$ – свободной границей.

Заслуга исследования C^1 гладкости свободной границы принадлежит Л. Каффарелли [1, 2]. В предположении, что $\Lambda(u)$ в окрестности точки $x^0\in\sigma(u)$ удовлетворяет некоторому геометрическому условию (в определенном смысле необходимому), в [1, 2] доказывается, что $\sigma(u)$ вблизи x^0 есть поверхность класса C^1. Модуль непрерывности нормали к $\sigma(u)$ оценивается равномерно для некоторого класса решений и зависит от расстояния от x^0 до границы области Ω.

Недавно в работах [3, 4] часть этих результатов была распространена на случай, когда x^0 является точкой контакта $\overline{\sigma(u)}$

Работа частично поддержана РФФИ, грант 96-01-00087, и INTAS, грант 96-0835.

и $\partial\Omega$. При условии, что в окрестности исследуемой точки $\partial\mathcal{N}(u)$ представляет собой график липшицевой функции, в [3] доказана дифференцируемость всюду этой функции, а в [4] – ее C^1 гладкость. Показано, что большей гладкости $\partial\mathcal{N}(u)$ в точках контакта, вообще говоря, нет в отличие от ситуации внутри Ω, где, как известно C^1 влечет дальнейшую сколь угодно высокую регулярность $\sigma(u)$. По-существу, в основе результатов [3, 4] лежат идеи Л. Каффарелли, дополненные оценками вблизи $\partial\Omega$ вторых производных, смешанных и чистых, для решений задачи с препятствием. Однако по сравнению с [1, 2] предположение о липшицевом характере $\partial\mathcal{N}(u)$ в [3, 4] представляется обременительным. Более тщательный анализ показывает, что от этого предположения можно избавиться. Этому вопросу и посвящена данная работа.

Ниже, также как и в [3, 4] доказательства проводятся для модельного случая, когда $f \equiv 1$, окрестность исследуемой точки есть единичный шар в плоскости $x_n = 0$, где $\varphi \equiv 0$. Следуя рассуждениям статьи [4], мы останавливаемся подробно лишь на тех моментах, где требуются дополнительные соображения, связанные с отказом от каких-либо априорных условий на $\partial\mathcal{N}(u)$.

Обозначения, в основном, соответствуют принятым в [4]. Именно,

$$x = (x_1, \dots, x_n) = (x', x_n) \text{ – точка в } \mathbb{R}^n, \ |x| = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2},$$
$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}, \ B_R(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < R\},$$
$$B_R = B_R(0), \ B^+_R(x^0) = B_R(x^0) \cap \mathbb{R}^n_+, \ B^+_R = B^+_R(0),$$
$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}, \ \Gamma_R = \Gamma \cap B_R,$$

$|\mathcal{E}|$ – n-мерная Лебегова мера множества $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^n$. Для $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ рассматриваются конусы

$$K^+_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > |x'| \operatorname{tg} \delta\}, \ K^+_\delta(x^0) = x^0 + K^+_\delta,$$
$$K^-_\delta = -K^+_\delta, \ K^-_\delta(x^0) = x^0 + K^-_\delta.$$

Символ D_i означает дифференцирование по x_i, $D_{ij} = D_i D_j$, $Du = (D_i u)$, $D^2 u = (D_{ij} u)$. Для единичных векторов ξ в $\mathbb{R}^n$ $D_\xi u = \xi_i D_i u$ – производная по направлению ξ.

Буквой τ обозначаются единичные касательные к Γ векторы, так что $\tau = (\tau', 0)$, $|\tau| = 1$.

Для краткости вместо ess sup и ess inf пишем sup и inf соответственно.

Определение 1. *Функция* $u \in C^{1,1}(B_r^+)$ *принадлежит классу* $P_r^+(\mathcal{M})$, *если* u *удовлетворяет следующим условиям:*

1°. $\operatorname{ess\,sup}\limits_{B_r^+} |D^2u| \leqslant \mathcal{M}$;

2°. $u \geqslant 0$ *в* B_r^+, $u = 0$ *на* Γ_r;

3°. $\Delta u = 1$ *на множестве* $\mathcal{N}(u) = \{x \in B_r^+ \, : \, u(x) > 0\}$.

Для функция $u \in P_r^+(\mathcal{M})$ *обозначаем также* $\Lambda(u) = \{x \in B_r^+ \, : \, u(x) = 0\}$, $\sigma(u) = \partial\mathcal{N}(u) \cap B_r^+$, $\sigma^*(u) = \overline{\sigma(u)} \cap \Gamma_r$ *– контактное множество,* $\sigma^0(u) = \partial\mathcal{N}(u) \cap \Gamma$, $\sigma^0_{\text{int}}(u) = \sigma^0(u) \setminus \sigma^*(u)$.

Замечание. Класс $P_r^+(\mathcal{M})$ отличается от класса $P_r^+(\mathcal{M}, \lambda)$, введенного в [3, 4], тем, что здесь нет никаких условий на $\partial\mathcal{N}(u)$ и не предполагается, что $0 \in \sigma^*(u)$. Ниже мы считаем число $\mathcal{M}$ фиксированным и зависимость разных констант от $\mathcal{M}$ не отмечаем.

При изучении свойств свободной границы существенную роль играют масштабные преобразования вида

$$y = r_k^{-1}(x - z^k), \quad u^{(k)}(y) = r_k^{-2} u_k(x), \tag{1}$$

где $r_k \searrow 0$ при $k \to \infty$. Ниже в качестве $\{u_k\}$ будут браться последовательности из $P_r^+(\mathcal{M})$ (иногда $u_k = u$ для всех k), а точки z^k будут выбираться так, чтобы $z^k \in \Gamma_{r/2}$, $|Du_k(z^k)| \leqslant cr_k$, $c = \text{const}$. Поскольку

$$D^2u^{(k)}(y) = D^2u_k(x) = D^2u_k(r_k y + z^k), \tag{2}$$

то $u^{(k)} \in P^+_{(2r_k)^{-1}r}(\mathcal{M})$. Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, можно считать, что $u^{(k)}$ сходится в $C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n_+ \cup \Gamma)$ к некоторой функции u^0, называемой блоу-ап пределом $\{u_k\}$:

$$u^0 = \text{blow-up} \lim u_k. \tag{3}$$

Ясно, что $u^0 \in P^+_\infty(\mathcal{M})$ и $\Gamma \cup \Lambda(u^0) \supset \overline{\lim}\, \Lambda(u^{(k)})$, где $\overline{\lim}$ обозначает множество предельных точек всех сходящихся последовательностей $x^k \in \Lambda(u^{(k)})$. Кроме того, имеет место включение

$$\overline{\mathcal{N}(u^0)} \supset \overline{\lim}\, \mathcal{N}(u^{(k)}), \tag{4}$$

что является простым следствием формулируемой ниже леммы о невырожденности.

Лемма 1 (Лемма 1 из [2]). *Если u удовлетворяет условием 2°, 3° Определения 1, то для любых $x \in \overline{\mathcal{N}(u)}$ и $\rho > 0$*

$$\sup_{B_\rho(x)} u \geqslant \frac{1}{2n}\rho^2.$$

В частности, отсюда вытекает, что если

$$y^k \in \sigma(u^{(k)}),\ \ y^0 = \lim_{k\to\infty} y^k,\ \text{то}\ y^0 \in \partial\mathcal{N}(u^0). \tag{5}$$

Для функция из $P_1^+(\mathcal{M})$ справедливы односторонние оценки вплоть до Γ_1 чистых вторых производных, обобщающие соответствующие внутренние оценки Каффарелли.

Лемма 2 (Лемма 2 из [4]). *Пусть $u \in P_1^+(\mathcal{M})$, $x^0 \in \overline{\sigma(u)} \cap B_{1/2}$. Если для некоторого направления ξ в $\mathbb{R}^n$ и некоторого $R \in]0, \frac{1}{2}]$ известно, что*

$$D_{\xi\xi} u \geqslant 0 \ \ \textit{на}\ \ \sigma^0_{\text{int}}(u) \cap B_R(x^0), \tag{6}$$

то

$$\inf_{B^+_\rho(x^0)} D_{\xi\xi} u \geqslant -C|\log\rho|^{-\beta} \ \textit{при}\ \rho \leqslant R, \tag{7}$$

где $C = C(R)$, $\beta = \frac{1}{2(n-1)}$.

Строго говоря, Лемма 2 в [4] формулируется для точек $x^0 \in \sigma^*(u)$, однако доказательство полностью сохраняется, если вместо точки контакта $x^0 = 0$ брать любую точку $x^0 \in \overline{\sigma(u)} \cap B_{1/2}$ и при этом заменять $|x|$ на $|x - x^0|$.

Следствие 1. *Пусть $\{u_k\} \subset P_1^+(\mathcal{M})$, $x^k \in \Lambda(u_k) \cap B^+_{1/4}$, $r_k = x^k_n \searrow 0$, $z^k = (x^{k'}, 0)$ и функция u^0 определена соотношениями (3), (1). Тогда*

$$\Lambda(u^0) \supset K^-_{\operatorname{arctg} 2M}(y^0) \cap B^1_+, \quad \textit{где} \quad y^0 = (0, 1).$$

Доказательство. Заметим, что указанный выбор z^k возможен, ибо $|Du_k(x^k)| = 0$, $|Du_k(z^k)| \leqslant M r_k$.

Если $u \in P_1^+(\mathcal{M})$, а μ и τ – касательные к Γ направления, то $D_{\mu\tau} u = 0$ и, в силу уравнения, $D_{nn} u = 1$ на $\sigma^0_{\text{int}}(u)$. Для произвольного же направления ξ в $\mathbb{R}^n$ с $\xi_n \neq 0$ имеем

$$D_{\xi\xi} u = \xi_n^2 \left(1 + 2D_{n\tau} u \frac{\xi\tau}{\xi n}\right) \ \text{на}\ \sigma^0_{\text{int}}(u). \tag{8}$$

В частности при $\xi \in K^{\pm}_{\operatorname{arctg} 2M}$, $x \in \sigma^0_{\mathrm{int}}(u)$

$$D_{\xi\xi} u(x) \geqslant \xi_n^2 \left(1 - 2M \frac{|\xi'|}{|\xi_n|}\right) \geqslant 0.$$

Применяя Лемму 2 к u_k, $R = \frac{1}{2}$, $\rho = 4r_k$, $x^0 = \hat{x}^k$, где $\hat{x}^k$ – ближайшая к x^k точка $\sigma(u_k) \cap B_{1/2}$, получаем

$$\inf_{B^+_{2r_k}(x^k)} D_{\xi\xi} u_k \geqslant -C\,|\log 4r_k|^{-\beta} \quad \forall \xi \in K^{\pm}_{\operatorname{arctg} 2M}. \tag{9}$$

При этом мы учли, что при $|x^k - \hat{x}^k| \geqslant 2r_k$ левая часть (9) равна нулю. Из (9) и того факта, что $u = 0$ в точке x^k и на Γ, легко заключить, что

$$u_k \leqslant 2C\, r_k^2 |\log 4r_k|^{-\beta} \text{ в } B^+_{r_k}(z^k) \cap K^-_{\operatorname{arctg} 2M}(x^k).$$

Вместе с (1) это равносильно неравенству

$$u^{(k)} \leqslant 2C |\log 4r_k|^{-\beta} \text{ в } B^+_1 \cap K^-_{\operatorname{arctg} 2M}(y^0),$$

правая часть которого стремится к нулю при $k \to \infty$. Отсюда при $k \to \infty$ вытекает желаемое заключение. $\square$

В отличие от Леммы 2 при оценках в [4] смешанных производных $D_{\tau n} u$ на Γ существенно использовалось предположение о липшицевом характере $\partial\mathcal{N}(u)$. Чтобы избежать этого, докажем следующую лемму.

Лемма 3. *Для любого $\tau \in]0, \frac{1}{2}]$ существует $R_0 = R_0(\tau) > 0$, такое что, каковы бы ни были функция $u \in P^+_1(\mathcal{M})$ и точка $x^0 \in \Lambda(u) \cap B^+_{1/4}$ с $x^0_n \leqslant R_0$, имеет место включение*

$$\Lambda(u) \supset K^-_\lambda(x^0) \cap \{x : 0 < x_n < (1-\tau)x^0_n\}, \tag{10}$$

где $\lambda = \operatorname{arctg} 4\mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть утверждение леммы неверно для какого-нибудь τ. Тогда найдется последовательность функций $u_k \in P^+_1(\mathcal{M})$ и точек $x^k \in \Lambda(u_k) \cap B^+_{1/4}$, таких что $r_k = x^k_n \searrow 0$ и при каждом k нарушается (10), т.е. существует точка $\hat{x}^k \in K^-_\lambda(x^k) \cap \mathcal{N}(u_k)$, для которой $\hat{x}^k_n < (1-\tau)x^k_n$. Замена (1) с $z^k = (x^{k\prime}, 0)$ переводит точки x^k в $y^0 = (0,1)$, а точки $\hat{x}^k$ в точки

$\hat{y}^k \in K_\lambda^-(y^0) \cap \mathcal{N}(u^{(k)}) \cap \{y : 0 < y_n < 1-\tau\}$. Возьмем подпоследовательность, сохраняя прежние обозначения, для который существуют пределы (3) и $\hat{y} = \lim \hat{y}^k$. В силу (4) имеем $\hat{y} \in \overline{K_\lambda^-(y^0) \cap \mathcal{N}(u^0)}$, $0 \leqslant \hat{y}_n \leqslant 1-\tau$. По Лемме 1 тогда найдется точка $z \in K^-_{\operatorname{arctg} 3M}(y^0) \cap \mathcal{N}(u^0)$, такая что $0 < z_n < 1 - \frac{\tau}{2}$. С другой стороны, Следствие 1 показывает, что $z \in \Lambda(u^0)$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения Леммы 3. $\square$

Чтобы не усложнять дальнейшие формулировки, будем рассматривать какую-нибудь конкретную функцию $u \in P_1^+(\mathcal{M})$, имея в виду однако, что приводимые ниже оценки равномерны для всего класса $P_1^+(\mathcal{M})$ с фиксированным $\mathcal{M}$.

Число $R_0 = R_0(\frac{1}{4})$ из Леммы 3 будем считать столь малым, чтобы для любой точки $x^0 \in \Gamma_{1/8}$ множество $K_\lambda^+(x^0) \cap \{x : x_n < R_0\}$ содержалось в $B^+_{1/4}$.

Следствие 2. *Для любой точки* $x^* \in \sigma^*(u) \cap \Gamma_{1/8}$ *справедливо*

$$\mathcal{N}(u) \supset K_\lambda^+(x^*) \cap \{x : x_n < R_0\},\ R_0 = R_0(\frac{1}{4}). \tag{11}$$

Доказательство. Если (11) неверно для какой-либо $x^* \in \sigma^*(u) \cap \Gamma_{1/8}$, то найдется точка $\hat{x} \in \Lambda(u)$, такая что $0 < \hat{x}_n < R_0$, $|\hat{x}'| < (4\mathcal{M})^{-1}\hat{x}_n$. В силу Леммы 3, тогда при некотором $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon^+(x^*) \subset \Lambda(u^0)$. Последнее противоречит принадлежности x^* контактному множеству $\sigma^*(u)$. $\square$

При оценивании смешанных производных $D_{\tau n} u$ на Γ в работах [3, 4] условие о представимости $\partial\mathcal{N}(u)$ в виде x_n – графика липшицевой функции использовалось только для получения следующей информации, необходимой для доказательства Леммы 1 в [4] (Леммы 2 в [3]):

1) если $x^0 \in \sigma(u)$ и $z = (x^{0\prime}, \frac{x_n^0}{2})$, то шар $B_{\beta x_n^0}(z)$ должен содержаться в $\Lambda(u)$;
2) если $x^* \in \sigma(u)$, то требуется, чтобы $K_\lambda^+(x^*) \cap B^+_{R_0} \subset \mathcal{N}(u)$.

Положительные константы β, R_0 и λ определялись только параметрами класса. В последующих рассуждениях (Леммы 3 и 4 в [4]), приводящих к оценкам $D_{\tau n} u$, не требовалось специальных условий на $\partial\mathcal{N}(u)$. Легко видеть, что доказанные выше Лемма 3 и Следствие 2 обеспечивают выполнение условий 1) и 2) с

$\lambda = \operatorname{arctg} 4\mathcal{M}$, $R_0(1/4)$, $\beta = (10M)^{-1}$. Таким образом, можно считать доказанной справедливость следующего утверждения, аналогичного Лемме 4 из [3].

Лемма 4. *Существует положительная неубывающая функция* $\omega^* :]0, \frac{1}{2}[\to \mathbb{R}_+$, *удовлетворяющая условию*

$$\lim_{\rho \to 0} \omega^*(\rho) = 0,$$

и такая что неравенство

$$\frac{|D_\tau u(x)|}{x_n} \leqslant \omega^*(\rho) \text{ при } x \in B^+_\rho(x^*) \tag{12}$$

верно для любого направления $\tau = (\tau', 0)$, *любой* $u \in P_1^+(\mathcal{M})$ *и произвольной точки* $x^* \in \sigma^*(u) \cap \Gamma_{1/8}$.

Следствие 3. *Смешанные производные* $D_{\tau n} u$, $\tau = (\tau', 0)$, *удовлетворяют оценке*

$$|D_{\tau n} u(x)| \leqslant \omega^*(d^*(x)), \quad x \in \sigma^0_{\text{int}}(u) \cap \Gamma_{1/8}. \tag{13}$$

Здесь $d^*(x) = \operatorname{dist}\{x; \sigma^*(u)\}$, ω^* *– функция из Леммы 4.*

Следствие 4. *Пусть* $h(r; x^*) = \sup\{x_n : x \in \Lambda(u) \cap B_r(x^*)\}$, *где* $x^* \in \sigma^*(u) \cap \Gamma_{1/16}$. *Тогда*

$$\frac{h(r; x^*)}{r} \leqslant 8n\omega^*(r) \to 0 \text{ при } r \to 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $x^* = 0$, $h(r) = h(r; 0)$. Применяя Лемму 1 к шару $B_{h(r)}$, находим, что существует $z \in B^+_{h(r)} \cap \mathcal{N}(u)$, в которой $u(z) \geqslant \frac{h^2(r)}{4n}$. Точку z можно соединить отрезком, параллельным Γ, с некоторой точкой $\hat{z} \in \sigma(u) \cap B_r$, т.е. найдется направление $\tau = (\tau', 0)$, такое что $u(z) = (z_\tau - \hat{z}_\tau) \int_0^1 D_\tau u(\hat{z} + t(z - \hat{z}))dt$. В силу (12) отсюда следует, что

$$\frac{h^2(r)}{4n} \leqslant u(z) \leqslant 2r\omega^*(r)h(r). \quad \square$$

Лемма 5. *Пусть* $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. *Существует постоянная* c_δ, *такая что при произвольных* $\xi \in K_\delta^\pm$, $|\xi| = 1$, $\rho \in]0, \frac{1}{8}[$ *и* $x^* \in \sigma^*(u) \cap \Gamma_{1/16}$ *имеет место оценка*

$$\inf_{B_\rho(x^*)} D_{\xi\xi} u \geqslant -c_\delta |\log \rho|^{-\beta}, \quad \beta = \frac{1}{2(n-1)}. \tag{14}$$

Доказательство. Выберем $R \in]0, \frac{1}{8}[$ так, чтобы $2\omega^*(R) \leqslant \operatorname{tg} \delta$. Тогда из соотношения (8) и оценки (13) следует (6), так что при $\rho \leqslant R$ справедливость (14) вытекает из Леммы 2. При $\rho > R$ оценка (14) с постоянной $c_\delta = 2M|\log R|^\beta$ очевидна. $\square$

Теорема 1. *Пусть* $u \in P_1^+(\mathcal{M})$, $x^* \in \sigma^*(u) \cap \Gamma_{1/16}$. *Существует* $\rho_0 > 0$ *и функция* $b \in C^1$, *такая что*

$$\mathcal{N} \cap B_{\rho_0}(x^*) = \{x : x_n > b(x')\}, \quad b(x^{*'}) = |Db(x^{*'})| = 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем $x^* = 0$. Рассмотрим какую-либо последовательность $x^k \in \sigma(u) \cap B_{1/16}$, $x^k \to 0$, и пусть функция u^0 определена соотношениями (3), (1) с $z^k = (x^{k'}, 0)$, $r_k = x_n^k$, $u_k = u$. Покажем, что

$$u^0(y) = \frac{1}{2}(y_n - 1)_+^2 \tag{15}$$

Для этого заметим сначала, что если $z \in \Lambda(u^0)$, то полоса $\Pi(z_n) = \{y : 0 < y_n \leqslant z_n\}$ также содержится в $\Lambda(u^0)$. В самом деле, при $|y| < R$ и $\delta > 0$ из Леммы 5 и равенства (2) получаем при $\xi \in K_\delta^\pm$

$$D_{\xi\xi} u^{(k)}(y) \geqslant -c_\delta |\log(r_k R + |z^k||^{-\beta}.$$

Отсюда для любого отрезка l в $K_\delta^-(z) \cap B_R^+$, соединяющего точку z с точками на Γ, следует оценка

$$\sup_l u^{(k)} \leqslant c_\delta |l|^2 |\log(r_k R + |z^k|)|^{-\beta} \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

так что u^0 равна нулю в $K_\delta^-(z) \cap B_R^+$. Ввиду произвольности $\delta > 0$ и $R < \infty$ заключаем, что $u^0 \equiv 0$ в $\Pi(z_n)$.

Далее, поскольку $y^0 = (0, 1) \in \sigma(u^k)$ при $k = 1, 2, \ldots$, то $y^0 \in \sigma(u^0)$ (см. (5)) и, следовательно, $\Lambda(u^0) = \Pi(1)$. В силу единственности решения задачи Коши для уравнения Лапласа отсюда следует (15).

Вернемся к рассмотрению семейства $\{u^{(k)}\}$ в шаре $B_1(y^0)$. Соответствующие свободные границы $\sigma(u^{(k)})$ содержат точку y^0, а ее некоторая окрестность находится вдали от Г. Результаты Л. Каффарелли гарантируют существование положительных $\varkappa$, r_0 и функции $\sigma\ :]0,r_0[\to \mathbb{R}^+$, $\sigma(r)\searrow 0$ при $r\to 0$, определяемых только величиной M, таких что, если при каком-либо $\rho\in]0,r_0[$

$$\frac{|\Lambda(u^{(k)})\cap B_\rho(y^0)|}{|B_\rho|} > \sigma(\rho), \tag{16}$$

то в соответствующей декартовой системе координат $\sigma(u^{(k)})\cap B_{\varkappa\rho}(y^0)$ представляет собой график функции класса C^1. Более того, если (16) при каком-либо $\rho\in]0,r_0[$ выполняется для всех $k\geqslant k_0$, то нормали к поверхностям $\{\sigma(u^{(k)})\cap B_{\varkappa\rho}(y^0)\}$ равностепенно непрерывны.

Удовлетворить требованию (16) для достаточно больших k возможно, если воспользоваться Леммой 3 с $\tau=\frac{\rho}{2}$. Для любого $\rho\in]0,\frac14[$ она обеспечивает наличие оценки

$$\frac{|\Lambda(u)\cap B_{\rho r_k}(x^k)|}{|B_{\rho r_k}|}\geqslant a>0 \quad a=\frac12\,\frac{|K_\lambda^-\cap B_1|}{|B_1|},\ \lambda=\operatorname{arctg}4M, \tag{17}$$

при условии, что

$$r_k=x_k^n\leqslant R_0\left(\frac{\rho}{2}\right). \tag{18}$$

Неравенство (17), в свою очередь равносильно оценке

$$\frac{|\Lambda(u^{(k)})\cap B_\rho(y^0)|}{|B_\rho|}\geqslant a.$$

Поскольку $\sigma(r)\searrow 0$ при $r\to 0$, то можно фиксировать ρ, для которого $\sigma(\rho)<a$ и тогда для всех k, удовлетворяющих (18), бедет выполнено условие (16).

Ввиду сказанного выше $\{\sigma(u^{(k)})\}$ в шаре $B_{\varkappa\rho}(y^0)$ представляет собой семейство непараметрических поверхностей с равностепенно непрерывными нормалями $\nu^{(k)}$. На основании (5) и (15) отсюда легко вывести, что предельная для $\sigma(u^{(k)})$ поверхность совпадает в шаре $B_{\varkappa\rho}(y^0)$ с $\sigma(u^0)=\{y\ :\ y_n=1\}$, а нормали $\nu^{(k)}(y^0)$ при $k\to\infty$ стремятся к $\nu^0(y^0)=e_n$. Обращаясь к определению (1) (с $u_k=u$), видим, что точки x^k, удовлетворяющие (18), являются точками гладкости $\sigma(u)$ и для соответствующих нормалей $\nu(x^k)=\nu^k(y^0)$ верно $\lim\limits_{k\to\infty}\nu(x^k)=e_n$.

Так как последовательность $x^k \in \sigma(u)$, $x^k \to 0$, выбиралась произвольно, то в некоторой ρ_0 окрестности нуля имеем

$$B_{\rho_0} \cap \partial\mathcal{N}(u) = \{x : x_n = b(x')\}, \quad |Db(x')| \to 0$$

при $x' \to 0$. Следствие 4 показывает, что $|Db(0)| = 0$.

Заметим еще, что в силу равномерного характера оценок модулей непрерывности $\nu^{(k)}$ число ρ_0 может быть выбрано общим для всех $x^* \in \Gamma_{1/16}$. $\square$

Теорема 2. *$u \in C^2(\overline{\mathcal{N}(u)} \cap B_{\rho_0}(x^*))$ при некотором $\rho_0 > 0$ и любой $x^* \in \sigma^*(u)$.*

Доказательство этой теоремы фактически совпадает с доказательством Теоремы 2 в статье [4]. Единственное отличие состоит в том, что доказывая Лемму 6 в [4], мы использовали включение $K^+_\lambda(z^*) \subset \mathcal{N}(u)$ $\forall z^* \in \sigma^*(u)$, вытекавшее из предположения о липшицевом характере $\partial\mathcal{N}(u)$. Вместо этого можно воспользоваться Следствием 2.

Литература

1. L. A. Caffarelli, *The regularity of free boundaries in higher dimentions.* Acta Math. **139** (1977), 155–184.
2. L. A. Caffarelli, *Compactness methods in free boundary problems.* Commun. Part. Diff. Eq. **5(4)** (1980), 427–448.
3. Д. Е. Апушкинская, Н. Н. Уральцева, *О поведении свободной границы вблизи границы области.* Зап. научн. семин. ПОМИ **221** (1995), 5–19.
4. Н. Н. Уральцева, *C^1-регулярность границы некоинцидентного множества в задаче с препятствием.* Алгебра и агализ **8** (1996), вып. 2, 205–221.

Uraltseva N. N. On properties of the free boundary in the neighborhood of contact with the given boundary.

For the simpliest elliptic obstacle problem, the behavior of the free boundary in the vicinity of the points where it contacts the prescribed boundary of the domain is studied. The eairlier result concerning the C^1 regularity of the boundary $\partial\mathcal{N}$ of the noncoincidence set is strengthened. It is proved that the assumed earlier Lipschitz condition on $\partial\mathcal{N}$ can be omitted.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 21 сентября 1997 г.