Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

С. А. Авдонин, М. И. Белишев, Ю. С. Рожков

ДИНАМИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ

0. Введение

В статье развивается подход к обратным задачам (т. н. BC-метод), основанный на идеях теории граничного управления ([1, 2]). Он дает также новую интерпретацию локального подхода А. С. Благовещенского [3]. BC-метод для несамосопряженного оператора Штурма–Лиувилля изложен в [5] (см. также [6]); в данной работе приводится вариант метода, наиболее пригодный для численной реализации. Обсуждаются результаты численных экспериментов.

1. Прямая задача. Задача граничного управления

1.1. Прямая задача

Пусть $V(x)$, $x \geqslant 0$ вещественная $N \times N$ матрица-функция с непрерывно дифференцируемыми элементами. Рассмотрим начально-краевую задачу (Задача I)

$$u_{tt} - u_{xx} + V(x)u = 0, \quad (x,t) \in \mathbf{R}_+ \times (0,T), \quad T > 0, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \tag{2}$$

$$u(0,t) = f(t). \tag{3}$$

Решение этой задачи есть вектор-функция $u = u^f(x,t)$ со значениями в R^n. Иногда, используя физическую терминологию, будем называть V, f и u^f потенциалом, управлением и волной, соответственно.

Данная работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 97-01-01115 и грант 96-01-00666).

Пусть матрица-функция $w(x,t)$ есть решение задачи Гурса

$$\begin{cases} w_{tt} - w_{xx} + V(x)w = 0, & 0 < x < t < T, \\ w(0,t) = 0, & w(x,x) = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x V(s)ds; \end{cases} \tag{4}$$

Известно, что $w(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $\{(x,t) : 0 \le x \le t \le T\}$. Легко проверить следующее утверждение.

Предложение 1.1.

(а) *Если $f \in C^2([0,T];\mathbf{R}^N)$ и $f(0) = f'(0) = 0$, то задача* I *имеет единственное классическое решение $u = u^f(x,t)$. В этом случае справедливо представление*

$$u^f(x,t) = \begin{cases} f(t-x) + \displaystyle\int_x^t w(x,s)f(t-s)ds & npu \quad x < t \\ 0 & npu \quad x \ge t \end{cases} \tag{5}$$

(б) *Для $f \in L_2([0,T];\mathbf{R}^N)$ функция $u^f(x,t)$, определенная представлением* (5) *удовлетворяет уравнению* (1) *в смысле теории распределений.*

В последнем случае мы считаем u^f *обобщенным решением* задачи 1 для управлений класса $L_2([0,T];\mathbf{R}^N)$. Согласно (5), для любого фиксированного момента $t = \xi$ имеем:

$$\operatorname{supp}\ u^f(\cdot,\xi) \subset \Omega^\xi, \quad 0 \le \xi \le T, \tag{6}$$

где $\Omega^\xi := [0,\xi]$ интервал оси OX, и справедливо включение

$$u^f(\cdot,T) \in L_2(\Omega^T;\mathbf{R}^N) \qquad f \in L_2([0,T]);\mathbf{R}^N). \tag{7}$$

Пусть $\mathcal{T}_\xi^T$ оператор запаздывания,

$$(\mathcal{T}_\xi^T f)(t) := f_{T-\xi}(t) := \begin{cases} 0, & 0 \le t < T-\xi, \\ f(t-(T-\xi)), & T-\xi \le t \le T; \end{cases} \tag{8}$$

ξ – параметр, $\xi \in (0,T)$;

$$\mathcal{T}_T^T f := f, \quad \mathcal{T}_0^T f := 0. \tag{9}$$

Независимость потенциала $V(\,\cdot\,)$ от времени приводит к известному свойству решения u^f:

$$u^{f_{T-\xi}}(\cdot,T)=u^f(\cdot,\xi). \tag{10}$$

Отметим еще одно свойство решения u^f следующее из гиперболичности системы (1)–(3) – так называемый "принцип локальности." Для любого фиксированного $\xi\in(0,T/2)$ значения решения $u^f(x,t)$ для $(x,t):0\le x\le\xi,\ x\le t\le 2\xi-x$ однозначно определяются значениями $V\,|_{x\le\xi}$ и не зависят от поведения $V\,|_{x>\xi}$.

1.2. Задача граничного управления

Поставим задачу граничного управления: для данного $a\in L_2(\Omega^T;\mathbf{R}^N)$ найти $f\in L_2([0,T];\mathbf{R}^N)$ так, что

$$u^f(\,\cdot\,,T)=a. \tag{11}$$

Эта постановка естественно следует из соотношений (6), (7).

Лемма 1.1. *Для любого $a\in L_2(\Omega^T;\mathbf{R}^N)$ существует единственное решение задачи* (11).

Доказательство. В соответствии с (5) поставленная задача эквивалентна уравнению

$$a(x)=f(T-x)+\int\limits_x^T w(x,s)f(T-s)ds,\quad x\in\Omega^T. \tag{12}$$

Это уравнение Вольтерра второго рода относительно $f(T-x)$. Его разрешимость влечет разрешимость задачи граничного управления.

2. Динамическая система

2.1. Оператор управления

В этом разделе мы снабжаем задачу 1 атрибутами динамической системы – пространствами и операторами. Пространство управлений $\mathcal{F}^T:=L_2([0,T];\mathbf{R}^N)$ будем называть *внешним пространством* динамической системы (1)–(3). Пространство $\mathcal{H}^T:=L_2(\Omega^T;\mathbf{R}^N)$ назовем *внутренним*; в каждый момент времени $t=\xi$ волна $u^f(\cdot,\xi)$ принадлежит $\mathcal{H}^T$ (см. (6), (7)). Оператор $W^T:\mathcal{F}^T\mapsto\mathcal{H}^T$,

$$W^Tf=u^f(\cdot,T) \tag{13}$$

называется *оператором управления* системы.

Лемма 2.1. *Для любого $T>0$ оператор W^T ограничен и ограниченно обратим (т.е. W^T – изоморфизм).*

Доказательство непосредственно следует из леммы 1.1. Формула (5) дает представление оператора W^T:

$$(W^T f)(x) = f(T-x) + \int_x^T w(x,s) f(T-s)ds, \quad x \in \Omega^T. \tag{14}$$

Во внешнем пространсве $\mathcal{F}^T$ содержится семейство подпространств $\mathcal{F}^{T,\xi}$ образованных запаздывающими управлениями (см. (8)–(10)),

$$\mathcal{F}^{T,\xi} := \mathcal{T}_\xi^T \mathcal{F}^T = \left\{ f \in \mathcal{F}^T : \mathrm{supp} f \subset [T-\xi, T] \right\}, \; 0 \le \xi \le T. \tag{15}$$

Множество

$$\mathcal{U}^\xi := W^T \mathcal{F}^{T,\xi} \tag{16}$$

называется *достижимым* (за время ξ).

Лемма 2.1 утверждает, что $\mathcal{U}^T = \mathcal{H}^T$. Ясно, что аналогичное равенство верно для любого момента времени:

$$\mathcal{U}^\xi = \mathcal{H}^\xi, \quad 0 \le \xi \le T, \tag{17}$$

где $\mathcal{H}^\xi$ подпространство пространства $\mathcal{H}^T$,

$$\mathcal{H}^\xi := \left\{ a \in \mathcal{H}^T : \mathrm{supp}\, a \subset \Omega^\xi \right\}.$$

2.2 Оператор реакции

Отображение “вход-выход” в нашей динамической системе осуществляется *оператором реакции* $R^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{F}^T$;

$$\mathrm{Dom}\, R^T = \left\{ f \in C^2([0,T]; \mathbf{R}^N) : f(0) = f'(0) = 0 \right\},$$

$$\left(R^T f \right)(t) := u_x^f(0,t), \quad t \in [0,T].$$

Он корректно определен в силу предложения 1.1.

Предложение 2.1. *Для любого $T>0$ справедливо представление:*

$$\left(R^T f \right)(t) = -f'(t) + \int_0^t r(t-s) f(s) ds, \; 0 < t < T, \tag{18}$$

где матрица-функция $r(t)$ непрерывно дифференцируема при $t>0$.

Это утверждение легко следует из предложения 1.1.

Оператор реакции будет играть роль данных в обратной задаче.

2.3. Двойственная система

Динамическую систему вида

$$u_{tt} - u_{xx} + V^{\#}(x)u = 0, \quad (x,t) \in \mathbf{R}_{+} \times (0,T), \quad T > 0,$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad u(0,t) = g(t).$$

с матрицей-потенциалом $V^{\#}$, транспонированной к V назовем *двойственной* к исходной системе (1)–(3). Пусть $u_{\#}^g$ – ее решение; $W_{\#}^T$ – соответствующий оператор управления: $W_{\#}^T g = u_{\#}^g(\cdot,T)$. Так же как и W^T оператор $W_{\#}^T$ является изоморфизмом.

Оператор реакции двойственной системы также допускает представление вида (18):

$$(R_{\#}^T\, g)(t) := \left(u_{\#}^g\right)_x(0,t) = -g'(t) + \int_0^t r_{\#}(t-s)g(s)ds. \tag{19}$$

Как можно показать, между операторами реакции исходной и двойственной систем имеется простая связь.

Предложение 2.2. *Матричные ядра r в (18) и $r_{\#}$ в (19) являются взаимно транспонированными:*

$$r^{\#}(t) = r_{\#}(t). \tag{20}$$

2.4. Связывающий оператор

Для произвольных управлений $f,\, g \in \mathcal{F}^T$ и соответствующих решений u^f, $u_{\#}^g$ задач I и $I_{\#}$ мы имеем:

$$\begin{aligned}\Big(u^f(\cdot,T), u_{\#}^g(\cdot,T)\Big)_{\mathcal{H}^T} &= \left(W^T f, W_{\#}^T g\right)_{\mathcal{H}^T} = \\ = \Big(\left(W_{\#}^T\right)^* W^T f, g\Big)_{\mathcal{F}^T} &= \left(C^T f, g\right)_{\mathcal{F}^T}\ ;\end{aligned} \tag{21}$$

с оператором $C^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{F}^T$, $C^T := \left(W_{\#}^T\right)^* W^T$. Этот оператор есть изоморфизм, т.к. $W_{\#}^T$ и W^T суть изоморфизмы.

Мы назовем C^T *связывающим оператором*, поскольку он связывает метрики внешнего и внутреннего пространств.

Важным для обратной задачи оказывается следующий факт: связывающий оператор определяется оператором реакции.

Для формулировки результата введем вспомогательные операторы:

оператор нечетного продолжения $S^T : \mathcal{F}^T \mapsto \mathcal{F}^T t$,

$$(S^T f)(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \le t \le T \\ -f(2T-t), & T < t \le 2T; \end{cases}$$

оператор выделения нечетной части $Q^{2T} : \mathcal{F}^T t \mapsto \mathcal{F}^T t$,

$$(Q^{2T} f)(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(2T-t)];$$

оператор сужения $N^{2T} : \mathcal{F}^T t \mapsto \mathcal{F}^T$,

$$N^{2T} f = f\,|_{[0,T]};$$

оператор интегрирования $J^{2T} : \mathcal{F}^T t \mapsto \mathcal{F}^T t$,

$$(J^{2T} f)(t) = \int\limits_0^t f(s)ds, \quad 0 \le t \le 2T.$$

Отметим легко проверяемое соотношение

$$\left(S^T\right)^* := 2M^T Q^{2T}. \tag{22}$$

Пусть R^{2T} есть оператор реакции, отвечающий системе (1)–(3) с финальным моментом времени $2T$

Теорема 2.1. *Справедливы следующие представления*

$$C^T = -\frac{1}{2}\left(S^T\right)^* J^{2T} R^{2T} S^T; \tag{23}$$

$$(C^T f)(t) = f(t) + \int\limits_0^T [p(2T-t-s) - p(|\,t-s\,|)] f(s)ds, \tag{24}$$

где

$$p(t) := \frac{1}{2}\int\limits_0^t r(s)ds.$$

Доказательство. Для произвольных функций $f,\ g \in C_0^\infty([0,T];\mathbf{R}^N)$ положим $f_- := S^T f$ и введем функцию

$$w^{fg}(s,t) := \left(u^{f_-}(\cdot,s), u^g_\#(\cdot,t)\right)_{\mathcal{H}^T}; \quad 0 \le s \le 2T,\ 0 \le t \le T.$$

Заметим, что $f_- \in \operatorname{Dom} R^{2T}$. Имеем соотношения:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right] w^{fg}(s,t) = \int\limits_{\Omega^T} \Big[\langle u^{f_-}(x,s), (u^g_{\#})_{tt}(x,t)\rangle -$$

$$- \langle u^{f_-}_{ss}(x,s), (u^g_{\#})(x,t)\rangle\Big]\, dx = \int\limits_{\Omega^T} \Big[\langle u^{f_-}(x,s), (u^g_{\#})_{xx} - V^{\#}(x) u^g_{\#}(x,t)\rangle -$$

$$\langle u^{f_-}_{ss}(x,s) - V(x)u^{f_-}(x,s), u^g_{\#}(x,t)\rangle\Big]\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega^T} \Big[\langle u^{f_-}(x,s), (u^g_{\#})_{xx}(x,t)\rangle - \langle u^{f_-}_{xx}(x,s), (u^g_{\#})(x,t)\rangle\Big]\, dx =$$

$$= \Big[\langle u^{f_-}(x,s), (u^g_{\#})_x(x,t)\rangle - \langle u^{f_-}_x(x,s), (u^g_{\#})(x,t)\rangle\Big]_{x=0}^{T} =$$

$$= -\langle f_-(s), (R^T_{\#} g)(t)\rangle + \langle (R^{2T} f_-)(s), g(t)\rangle.$$

В последнем равенстве мы воспользовались тем, что $(u^g_{\#})_x(T,s) = u^g_{\#}(T,t) = 0$ для $f,\, g \in C_0^\infty([0,T]; \mathbf{R}^N)$, легко следует из (5).

Таким образом, функция w^{fg} удовлетворяет уравнению

$$w^{fg}_{tt} - w^{fg}_{ss} = -\langle f_-(s), (R^T_{\#} g)(t)\rangle + \langle (R^{2T} f_-)(s), g(t)\rangle;$$
$$0 \le s \le 2T, \quad 0 \le t \le T \tag{25}$$

и условиям (см. (2))

$$w^{fg}(s,0) = w^{fg}_t(s,0) = 0. \tag{26}$$

Интегрируя (25), (26) в области $(s,t) : 0 \leqslant t \leqslant T,\ t \leqslant s \leqslant 2T - t$ по формуле Д'Аламбера и полагая в ней $t = s = T$, получим:

$$w^{fg}(T,T) = -\frac{1}{2} \int\limits_0^T d\eta \int\limits_{\eta}^{2T-\eta} \big[\, \langle f_-(\xi), (R^T_{\#} g)(\eta)\rangle -$$

$$-\langle (R^{2T} f_-)(\xi), g(\eta)\rangle \,\big]\, d\xi.$$

Поскольку $\int_\eta^{2T-\eta} f_-(\xi) d\xi = 0$, то

$$w^{fg}(T,T) = \frac{1}{2} \int\limits_0^T d\eta \int\limits_{\eta}^{2T-\eta} \langle (R^{2T} f_-)(\xi), g(\eta)\rangle d\xi. \tag{27}$$

С другой стороны,

$$\int_{\eta}^{2T-\eta} (R^{2T}f_-)(\xi)d\xi = (J^{2T}R^{2T}f_-)(2T-\eta) - (J^{2T}R^{2T}f_-)(\eta) =$$

$$= -2(Q^{2T}J^{2T}R^{2T}f_-)(\eta),$$

и равенство (27), с учетом (21) принимает вид

$$w^{fg}(T,T) = -\int_0^T \langle (N^T Q^{2T} J^{2T} R^{2T} STf)(\eta), g(\eta)\rangle d\eta$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\left(S^T\right)^* J^{2T} R^{2T} S^T f, g\Big)_{\mathcal{F}^T}. \tag{28}$$

Вспоминая определение w^{fg}, получаем

$$w^{fg}(T,T) = \left(C^T f, g\right)_{\mathcal{F}^T}. \tag{29}$$

Сравнивая правые части (28) и (29) и используя произвольность $f,\ g \in C_0^\infty([0,T];\mathbf{R}^N)$, получаем представление (23). Формула (24) получается из (23) с учетом представления (18). Теорема доказана.

3.Обратная задача

3.1. Уравнение Гельфанда-Левитана

Рассмотрим задачу граничного управления (см. п. 1.2) со специальной правой частью. А именно, в качестве a возьмем функцию y^T, которая является сужением на Ω^T решения задачи Коши:

$$-y''(x) + V(x)y(x) = 0,\ x > 0, \tag{30}$$

$$y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta, \tag{31}$$

где α и β произвольные векторы из $\mathbf{R}^N$. Через z^T обозначим решение задачи: $z^T := \left(W^T\right)^{-1} y^T$. Мы докажем, что функция $z^T(\cdot)$ удовлетворяет линейному уравнению, обе части которого выражаются через данные обратной задачи.

Положим $\kappa^T(t) := T - t,\ 0 \leqslant t \leqslant T$ и рассмотрим элементы пространства управлений вида $\kappa^T\alpha,\ \kappa^T\beta$.

Теорема 3.1. *Функция $z^T \in \mathcal{F}^T$ является единственным решением уравнения*

$$C^T z^T = \kappa^T \beta - (R^T_\#)^* \kappa^T \alpha. \qquad (32)$$

Доказательство. Для любого $g \in C_0^\infty([0,T];\mathbf{R}^N)$ имеем

$$\left(C^T z^T, g\right)_{\mathcal{F}^T} = \left(W^T z^T, W^T_\# g\right)_{\mathcal{H}^T} = \int\limits_{\Omega^T} \langle y(x), u^g_\#(x,T)\rangle dx =$$

$$= \int\limits_0^T (T-t)dt \int\limits_{\Omega^T} \langle y(x), (u^g_\#)_{tt}(x,t)\rangle dx =$$

$$\int\limits_0^T (T-t)dt \int\limits_{\Omega^T} \langle y(x), (u^g_\#)_{xx}(x,t) - V^\#(x) u^g_\#(x,t)\rangle dx =$$

$$= \int\limits_0^T (T-t)\langle y(x), [(u^g_\#(x,t)\rangle - \langle y'(x), u^g_\#(x,t)\rangle]^{x=T}_{x=0} dt =$$

$$= -\int\limits_0^T (T-t)[\langle \alpha, (R_\# g)(t)\rangle - \langle \beta, g(t)\rangle] dt =$$

$$= \int\limits_0^T [\langle \kappa^T(t)\beta, g(t)\rangle - \langle \kappa^T(t)\alpha (R_\# g)(t)\rangle] dt =$$

$$= \left(\kappa^T\beta - [R^T_\#]^* \kappa^T \alpha, g\right)_{\mathcal{F}^T}.$$

Сравнивая начало и конец этой цепочки равенств, получаем (32). Воспользовавшись леммой 1.1, завершаем доказательство теоремы.

Принимая во внимание предложение 2.2, нетрудно проверить равенство

$$\left([R^T_\#]^* g\right)(t) = g'(t) + \int\limits_t^T r(s-t) g(s) ds,$$

откуда

$$\left([R^T_\#]^*\kappa^T\alpha\right)(t) = -\alpha + \int\limits_t^T r(s-t)(T-s)\alpha ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

В дополнение к (34) установим соотношение, используемое при решении обратной задачи. Полагая в (14) $f = z^T$, имеем:

$$\left(W^T z^T\right)(x) = z^T(T-x) + \int\limits_x^T w(x,s) z^T(T-s)ds = y(x), \;\; x \in \Omega.$$

Устремляя $x \to T-0$, получаем:

$$z^T(+0) = y(T). \tag{33}$$

3.2. Решение обратной задачи

Постановка обратной задачи такова: пусть известна функция $r(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2T$ (или, что равносильно, задан оператор реакции R^{2T} – см. (18)); по ней требуется восстановить потенциал $V(x)$, $x \in \Omega^T$.

Опишем процедуру решения обратной задачи:

а) по матрице-функции $r(t)$, заданной при $0 < t \leq 2T$, находим с помощью (18)–(20) и (23) операторы R^τ, $R^\tau_\#$, $0 < \tau \leq 2T$ и C^τ, $0 < \tau \leq T$;

б) получив эти операторы, составляем семейство уравнений

$$C^\tau z^\tau = \kappa^\tau \beta - (R^\tau_\#)^* \kappa^\tau \alpha. \tag{34}$$

где α, $\beta \in \mathbf{R}^N$, а индекс τ играет роль параметра, $\tau \in (0,T]$. Каждое из уравнений (34) единственным образом разрешимо в соответствующем пространстве $\mathcal{F}^\tau$ и его решение z^τ связано соотношением $z^\tau = (W^\tau)^{-1} y^\tau$ с решением y задачи Коши (30), (31) с данными α и β. Фиксируем τ и рассмотрим N уравнений вида (34), где α_j и β_j выбраны так, что векторы-столбцы

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

линейно независимы в $\mathbf{R}^{2N}$. Найдем решения этих уравнений $z^\tau_j(t)$, $t \in [0,\tau]$.

в) по $z^\tau_j(t)$ $(0 \leq t \leq \tau \leq T)$ восстановим с помощью (33) решение $y_j(x)$ $(x \in \Omega^T)$ задачи Коши (30), (31) с данными α_j и β_j:

$$y_j(x) = z^x_j(+0), \;\; 0 \leq x \leq T, \;\; j = 1, \ldots, N. \tag{35}$$

Найдя решение $y_j(x)$ для всех $x \in \Omega^T$, вычислим вторые производные

$$y_j''(x) = \frac{d^2}{dx^2} z_j^x, \ 0 \le x \le T, \ j = 1, \dots, N. \tag{36}$$

г) фиксируем $x \in \Omega^T$ и составим матрицы $Y(x)$ и $Y''(x)$ из векторов (35) и (36) как из столбцов. Если $Y(x)$ неособенная, восстановим потенциал $V(x)$ по формуле $V(x) = Y''(x)Y^{-1}(x)$. В конечном числе точек вырождения $Y(x)$ определим $V(x)$ по непрерывности. Обратная задача решена.

4. Численный эксперимент

4.1. Алгоритм

В основе численного алгоритма решения обратной задачи лежит уравнение Гельфанда–Левитана (32) и соотношение (33):

а) для заданного $T > 0$ зададим разбиение интервала времени $[0, T]$ системой точек $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_M = T$. Рассмотрим семейство уравнений, получаемых из (32) при $\alpha = \mathrm{col}\,\{0, \dots, 0\}$; $\beta = \mathrm{col}\,\{1, \dots, 1\}$

$$C^\xi Z = \kappa^\xi E \tag{37}$$

($\xi = \xi_1, \dots, \xi_M$; E – единичная матрица, $\kappa^\xi = \xi - t$), которая получается из (34) при $\alpha = 0$, $\beta = 1$. Их приближенные решения $\widetilde{Z}$ ищутся в виде матричных полиномов

$$\widetilde{Z}(t) = \sum_{k=0}^{q} (\xi - t)^k \cdot A_k^\xi, \quad (\xi = \xi_1, \dots, \xi_M) \tag{38}$$

с неизвестными A_k^ξ.

б) коэффициенты A_k^ξ определяются с помощью оптимизационной процедуры

$$\min_{A_0^\xi, \dots, A_q^\xi} \Phi^\xi(A_0^\xi, \dots, A_q^\xi) = \min \|C^\xi \widetilde{Z} - \kappa^\xi E\|^2.$$

Стандартным путем приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial \Phi^\xi}{\partial A_k^\xi} = 0, \quad (k = 0, \dots, q);$$

в) с помощью численного дифференцирования приближенно находятся апроксимирующие значения потенциала:

$$\widetilde{V}(\xi) = \left(\frac{d^2}{d\xi^2}\widetilde{Z}^\xi\right)\Big|_{\xi=+0} \cdot \left(\widetilde{Z}^\xi(+0)\right)^{-1} \quad (\xi = \xi_1, \dots, \xi_M).$$

Алгоритм имеет следующие входные параметры:
N – размерность матричной задачи;
T – конечный момент;
M – количество точек $\xi \in [0, T]$;
h – шаг разбиения, $h = \xi_i - \xi_{i-1} = T/M$;
q – размерность апроксимирующего полинома;
$r(t)$ – $N \times N$ – матрица-функция, заданная для $t \in [0, 2T]$.

4.2. Тестовые задачи

В качестве тестовых примеров рассматриваются задачи, в которых уравнения Гельфанда–Левитана решаются в явном виде.

1. $N = 2$; $T = 0,5$; $M = 20$; $h = 0,025$; $q = 3$;

$$r(t) = \begin{pmatrix} 2t, & 0 \\ 0, & 2t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$$

(диагональный случай)

2. $N = 2$; $T = 0,5$; $M = 20$; $h = 0,025$; $q = 3$;

$$r(t) = \begin{pmatrix} 3t, & t \\ t, & 3t \end{pmatrix} \quad t \in [0, 1]$$

(недиагональный симметричный случай)

3. $N = 2$; $T = 0,5$; $M = 20$; $h = 0,025$; $q = 4$;

$$r(t) = \begin{pmatrix} \frac{A_1}{\Delta}\varphi_b(t) - \frac{A_2}{\Delta}\varphi_a(t), & \frac{1}{\Delta}\varphi_a(t) - \frac{1}{\Delta}\varphi_b(t) \\ \frac{a_{21}}{a_{11}\Delta}[\varphi_b(t) - \varphi_a(t)], & \frac{A_1}{\Delta}\varphi_a(t) - \frac{A_2}{\Delta}\varphi_b(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

где

$$a_{11} = 6; \quad a_{12} = 3; \quad a_{21} = 5; \quad a_{22} = 8;$$

$$A_1 = \frac{a}{a_{12}}; \quad A_2 = \frac{b}{a_{12}}; \quad \Delta = A_2 - A_1;$$

$$a = \frac{a_{11} + a_{12}}{2} + \sqrt{a_{12} \cdot a_{21} - \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2}\right)^2}$$

$$b = \frac{a_{11} + a_{12}}{2} - \sqrt{a_{12} \cdot a_{21} - \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2}\right)^2}$$

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{t} J_1(\alpha t); & \alpha = \sqrt{a}; \quad a > 0; \\ -\dfrac{\alpha}{t} I_1(\alpha t); & \alpha = \sqrt{|a|}; \quad a < 0; \end{cases}$$

$$\varphi_b(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{t} J_1(\beta t); & \beta = \sqrt{b}; \quad b > 0; \\ -\dfrac{\beta}{t} I_1(\beta t); & \beta = \sqrt{|b|}; \quad b < 0; \end{cases}$$

(недиагональный несимметричный случай)

(Здесь $J_1(\cdot)$, $I_1(\cdot)$ – функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно.)

4.3. Результаты

Результаты численного решения тестовых обратных задач показаны на рис. 1–3. Точные значения $V(x)$ изображены пунктирной линией; восстановленные значения $\widetilde{V}(x)$ изображены сплошной линией.

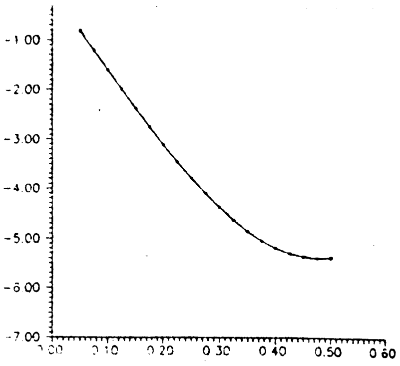

Рис. 1

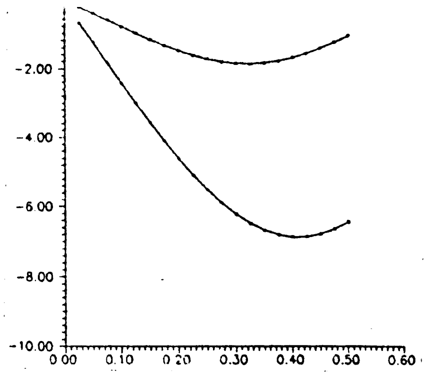

Рис. 2.

В процессе восстановления потенциала самостоятельный интерес представляет определение матрицы-функции $Y(x) = \{ y_1(x), \ldots, y_N(x) \}$ (см. (30), (31)). Как упоминалось выше это связано с

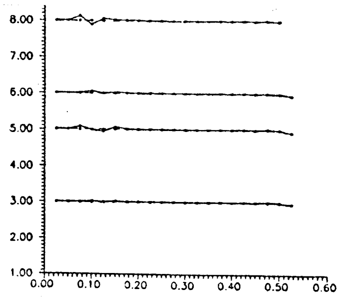

Рис. 3.

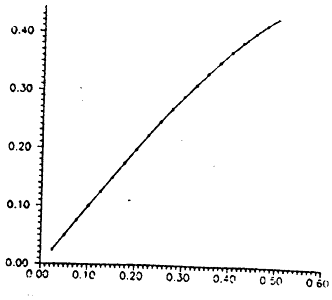

Рис. 4

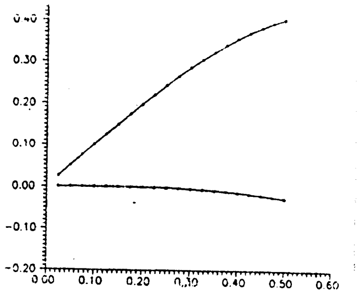

Рис. 5.

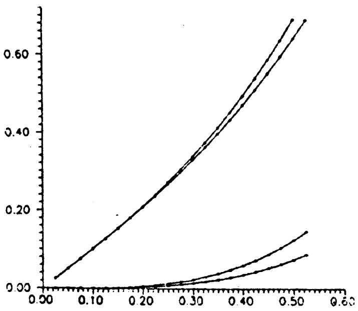

Рис. 6.

решением соответствующей задачи граничного управления (8). Найденные $Y(\cdot)$ представлены на рисунках 4–6.

Эти результаты позволяют утверждать что алгоритм успешно работает в случае достаточно гладких матриц-функций $r(t)$. Заметим, что точность восстановления $V(x)$ зависит от размерности q апроксимирующего полинома (38).

Литература

1. М. И. Белишев, *Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения.* — Докл. АН СССР **297** (1987), 524–527.
2. С. А. Авдонин, М. И. Белишев, С. А. Иванов, *Граничное управление и матричная обратная задача для уравнения* $u_{tt} - u_{xx} + V(x)u = 0$. — Мат. Сб. **182** (1991), 303–331.
3. А. С. Благовещенский, *О несамосопряженной обратной краевой задаче в матричной форме для гиперболического дифференциального уравнения.* — В кн.: Проблемы Мат. Физ., вып. 5, из-во Ленингр. Гос. Унив. (1971), сс. 38–61.
4. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве.* Наука, М. (1967).
5. S. Avdonin, M. Belishev, *Boundary control and dynamical inverse problem for nonselfadjoint Sturm-Liouville operator.* — Control and Cybernetics **25, No. 3** (1996), 429–440.
6. М. И. Белишев, *К единственности восстановления младших членов волнового уравнения по динамическим граничным данным.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **249** (1997), 55–76.

Avdonin S. A., Belishev M. I., Rozhkov Yu. S. Dynamical inverse problem for nonselfadjoint Sturm–Liouville operator.

The paper deals with an approach to the Inverse Problem based upon their relations to the Boundary Control Theory (so-called the BC-method). A procedure of recovering a nonsymmetric matrix-function (potential) given on a semiaxis via the dynamical response operator is described. The results of numerical testing are demonstrated.

НИИ вычислительной
математики и процессов
управления при СПбГУ

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургская государственная
инженерно-экономическая академия

Поступило 16 октября 1997 г.