Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

**М. И. Белишев, А. К. Гласман**

# ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ВОЛН В ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ МАКСВЕЛЛА (BC-МЕТОД)

## 0. Введение

Одним из основных инструментов BC-метода является амплитудная формула (АФ), вывод которой основан на соотношениях геометрической оптики и свойстве управляемости динамической системы, описываемой волновым уравнением (см. [2]). АФ выражает изображения волн (волны в полугеодезических координатах) через данные обратной задачи. Грубо говоря, она позволяет сделать волны, распространяющиеся *внутри* области видимыми для внешнего наблюдателя, выполняющего измерения *на границе* области.

В нашей работе получен аналог АФ для системы Максвелла; намечены способы ее использования в обратной задаче электродинамики.

Авторы благодарны В. М. Бабичу за многочисленные и безотказные консультации по уравнениям Максвелла и лучевому методу.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований (грант No. 96-01-00666).

## 1. Геометрия

**1.1. $\rho$-метрика.** Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ есть ограниченная область с гладкой*) границей $\Gamma$; $\varepsilon$ и $\mu$ суть гладкие функции (проницаемости), положительные в $\overline{\Omega}$; обозначим $\rho := \varepsilon\mu$.

Функция $\rho$ определяет метрику

$$ds^2 = \rho\,|dx|^2,$$

превращающую $\Omega$ в риманово многообразие с расстоянием $\mathrm{dist}_\rho$.

Функция в $\overline{\Omega}$

$$\tau(x) := \mathrm{dist}_\rho\,(x, \Gamma)$$

*) всюду в работе "гладкий" означает $C^\infty$ – гладкий.

называется *эйконалом*. Подобласти

$$\Omega^\xi := \{x \in \Omega \mid \tau(x) < \xi\} \quad (\xi > 0)$$

расширяются с ростом $\xi$, исчерпывая $\Omega$:

$$T_* := \inf\left\{\xi > 0 \mid \Omega^\xi = \Omega\right\} < \infty.$$

Они ограничены поверхностями

$$\Gamma^\xi := \{x \in \Omega \mid \tau(x) = \xi\} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T_*)$$

($\Gamma^0 = \Gamma$), эквидистантными границе.

**1.2. Выкройка.** Пусть $\omega \subset \Omega$ есть *множество раздела* области $\Omega$ относительно границы $\Gamma$ (в смысле $\rho$-метрики: см. [2]); как известно,

$$\omega = \overline{\omega}; \quad \operatorname{vol}\omega = 0; \quad \operatorname{dist}_\rho(\omega, \Gamma) =: T_\omega > 0. \tag{1.1}$$

Для каждой точки $x \in \Omega \setminus \omega$ существует единственная точка границы $\gamma(x) \in \Gamma$, ближайшая к $x$ : $\operatorname{dist}_\rho(x, \gamma(x)) = \operatorname{dist}_\rho(x, \Gamma) = \tau(x)$. Пара $(\gamma(x), \tau(x)) \in \Gamma \times [0, T_*]$ называется полугеодезическими координатами (п.-г. к.) точки $x$; через $x(\gamma, \tau)$ мы обозначаем точку с заданными п.-г. к. $(\gamma, \tau)$. Пусть $\gamma^1$, $\gamma^2$ суть локальные координаты в окрестности точки $\gamma(x)$ (на $\Gamma$); тогда $\gamma^1$, $\gamma^2$, $\tau$ есть регулярная координатная система в окрестности точки $x$ (в $\Omega$). В этих координатах евклидовы элементы длины и объема имеют известный вид:

$$|dx|^2 = g_{\alpha\beta}\, d\gamma^\alpha\, d\gamma^\beta + \rho^{-1}\, d\tau^2; \qquad dx = \rho^{-1/2}\, J\, d\gamma^1\, d\gamma^2\, d\tau,$$

где $J = J(\gamma, \tau) := [\det \|g_{\alpha\beta}(\gamma, \tau)\|]^{1/2}$ (см. [1]).

Множество

$$\Theta := \{(\gamma(x), \tau(x)) \mid x \in \Omega \setminus \omega\} \subset \Sigma := \Gamma \times [0, T_*]$$

называется *выкройкой* области $\Omega$. Граница $\Theta$ в $\Sigma$ (*берег выкройки*) имеет нулевую меру:

$$\operatorname{mes}_{d\Gamma d\tau} \overline{\Theta} \cap [\Sigma \setminus \Theta] = 0. \tag{1.2}$$

Для фиксированного $T \in (0, T_*]$ множество

$$\Theta^T := \left\{(\gamma(x), \tau(x)) \mid x \in \Omega^T \setminus \omega\right\} \subset \Sigma^T := \Gamma \times [0, T]$$

называется выкройкой подобласти $\Omega^T$.

**1.3. Изображения.** Пусть $y$ есть векторное поле на $\Omega^T$; сопоставим ему поле на $\Sigma^T = \Gamma \times [0,T]$ по следующему правилу:

(i) фиксируем $x \in \Omega^T \backslash \omega$; пусть $[y(x)]^\wedge$ есть вектор в точке $\gamma(x) \in \Gamma$, полученный параллельным переносом (в $\rho$-метрике !) вектора $y(x)$ из $x$ в $\gamma(x)$ вдоль кратчайшей геодезической, соединяющей $x$ с $\Gamma$;

(ii) обозначим

$$\beta(\gamma,\tau) := \frac{J(\gamma,\tau)}{J(\gamma,0)} \cdot \left(\frac{\varepsilon(x(\gamma,\tau))}{\varepsilon(x(\gamma,0))}\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{\mu(x(\gamma,\tau))}{\mu(x(\gamma,0))}\right)^{-1/2};$$

каждой точке $(\gamma,\tau) \in \Sigma^T$ сопоставим вектор

$$\widetilde{y}(\gamma,\tau) := \begin{cases} \beta^{1/2}(\gamma,\tau)[y(x(\gamma,\tau))]^\wedge & (\gamma,\tau) \in \Theta^T; \\ 0 & (\gamma,\tau) \in \Sigma^T \setminus \Theta^T. \end{cases}$$

Определенное почти всюду на $\Sigma^T$ (см. (1.2)) поле $\widetilde{y}$ назовем *изображением* поля $y$, а отображение $I^T : y \to \widetilde{y}$ – оператором изображения.

**1.4. Разложение полей.** В точках $\overline{\Omega}^T \setminus \omega$ (т.е. п. в. в $\overline{\Omega}^T$ – см. (1.1)) определено поле *нормалей* $\nu = \nu(x) := |\nabla\tau(x)|^{-1}\nabla\tau(x)$. Отметим, что $\nu\big|_\Gamma$ суть внутренние нормали к $\Gamma$.

Заданное в $\Omega^T$ поле $y$ можно представить в виде разложения

$$y = y_\nu + y_\theta \quad \text{п. в. в} \quad \Omega^T,$$

где

$$y_\nu := (y \cdot \nu)\,\nu, \quad y_\theta := y - y_\nu = \nu \times y \times \nu$$

суть *продольная* и *поперечная* составляющие $y$.

Если поле $y$ является поперечным (т.е. $y = y_\theta$), то его изображение $\widetilde{y}$, очевидно, будет *тангенциальным* к $\Gamma$:

$$\widetilde{y} \cdot \nu\big|_\Gamma = 0 \quad \text{п.в. на} \quad \Sigma^T,$$

**1.5. Условие потенциальности.** При $\xi < T_\omega$ поверхность $\Gamma^\xi$ диффеоморфна $\Gamma$; при $\xi \geqslant T_\omega$ поверхность $\Gamma$, вообще говоря, несвязна, причем гладкость ее компонент может нарушаться лишь в точках $\Gamma^\xi \cap \omega$.

Один из основных результатов работы (Теорема 2) будет установлен при дополнительных предположениях о $\rho$-метрике.

Скажем, что область $\Omega^\xi$ удовлетворяет *условию потенциальности*, если

($\alpha$) $\Gamma^\xi$ есть объединение конечного числа связных компонент, каждая из которых является кусочно- гладкой поверхностью;

($\beta$) каждый простой контур (цикл) в $\overline{\Omega}^{\,\xi}$ допускает непрерывную деформацию в контур, лежащий на $\Gamma$.

**Предложение 1.** *Пусть $\Omega^\xi$ удовлетворяет условиям ($\alpha$), ($\beta$) и пусть $y$ есть поле, такое, что*

(i) $\operatorname{rot} y = 0$ *в* $\Omega^\xi$*;*

(ii) $\operatorname{div} \varepsilon y = 0$ *в* $\Omega^\xi$*;*

(iii) $\nu \times y = 0$ *на* $\Gamma$*;*

(iv) $\nu \cdot y = 0$ *на* $\Gamma^\xi$*.*

*Тогда $y = 0$ в $\Omega^\xi$.*

В самом деле, вместе с (i), (iii) условие ($\beta$) обеспечивает существование потенциала $p : y = \nabla p$; остальные условия приводят к граничной задаче

$$\operatorname{div} \varepsilon \nabla p = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\xi;$$

$$p\big|_\Gamma = 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \nu}\bigg|_{\Gamma^\xi} = 0,$$

имеющей единственное решение $p = 0$, откуда следует $y = 0$.

Отметим, что при $\xi < T_\omega$ условие потенциальности $\Omega^\xi$ очевидным образом выполняется.

## 2. Динамика

**2.1. Система Максвелла.** Рассмотрим динамическую систему

$$\varepsilon u_t = \operatorname{rot} w, \quad \mu w_t = -\operatorname{rot} u \quad \text{в} \quad Q^T; \tag{2.1}$$

$$u\big|_{t=0} = w\big|_{t=0} = 0; \tag{2.2}$$

$$u_\theta\big|_{\Sigma^T} = f, \tag{2.3}$$

в которой: $T > 0$; $Q^T := \Omega \times (0,T)$; $\Sigma^T = \Gamma \times [0,T]$; $f = f(\gamma, t)$ – (электрическое) граничное управление; пусть $\{u, w\}$: $u = u^f(x,t)$, $w = w^f(x,t)$ есть решение системы.

В случае $f \in \mathcal{F}^T := \{f \in L_2(\Sigma^T; \mathbb{R}^3) \mid f \cdot \nu\big|_\Gamma = 0\}$ обобщенное решение определено в [4]; при всех $t \in [0,T]$ оно соленоидально:

$$\operatorname{div} \varepsilon u^f(\,\cdot\,, t) = \operatorname{div} \mu w^f(\,\cdot\,, t) = 0. \tag{2.4}$$

Если

$$f \in \mathcal{M}^T := \Big\{ f \in \mathcal{F}^T \cap C^\infty(\Sigma^T;\mathbb{R}^3) \Big| \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^k f\Big|_{t=0} = 0, \quad k = 0,1,\ldots \Big\},$$

то решение является классическим: $u^f$, $w^f \in C^\infty(\overline{Q}^{\,T};\mathbb{R}^3)$.

**2.2. Электрическая подсистема.** Электрическая компонента $u^f$ удовлетворяет системе

$$u_{tt} - Lu = 0 \quad \text{в} \quad Q^T; \tag{2.5}$$

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0; \tag{2.6}$$

$$u_\theta\big|_{\Sigma^T} = f, \tag{2.7}$$

с оператором $L := -\varepsilon^{-1}\mathrm{rot}\,\mu^{-1}\,\mathrm{rot}$. На соленоидальных полях имеем

$$\begin{aligned} Lu &= -(\varepsilon\mu)^{-1}\mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ u + \ldots \\ &= (\varepsilon\mu)^{-1}\left[\Delta u - \nabla\,\mathrm{div}\ u\right] + \ldots \\ &= (\varepsilon\mu)^{-1}\left[\Delta u - \varepsilon^{-1}\nabla\,\mathrm{div}\ \varepsilon u + \ldots\right] + \ldots \\ &= (\text{см.}(2.4)) = (\varepsilon\mu)^{-1}\Delta u + \ldots \end{aligned} \tag{2.8}$$

(опущены младшие члены), в силу чего уравнение (2.5) оказывается гиперболическим.

**2.3. Пространства и операторы.** Пространство управлений $\mathcal{F}^T := \{f \in L_2(\Sigma^T;\mathbb{R}^3) \big| f\cdot\nu\big|_\Gamma = 0\}$ называется *внешним пространством* системы (2.5)–(2.7). В нем выделено семейство подпространств $\mathcal{F}^{T,\xi} := \{f \in \mathcal{F}^T \mid f(\,\cdot\,,t) = 0,\ 0 \leqslant t \leqslant T-\xi\}$ $(0 \leqslant \xi \leqslant T)$, образованных запаздывающими управлениями.

Пространство $\mathcal{H} := \{y \in L_2(\Omega;\mathbb{R}^3) \mid \mathrm{div}\,\varepsilon y = 0\}$ со скалярным произведением

$$(u,y)_{\mathcal{H}} = \int\limits_\Omega dx \varepsilon(x)\,u(x)\,y(x)$$

называется *внешним*. В нем содержится семейство подпространств $\mathcal{H}^\xi := \{y \in \mathcal{H} \mid \mathrm{supp}\,y \subset \overline{\Omega}^{\,\xi}\}$ $(0 \leqslant \xi \leqslant T)$.

Соответствие "вход$\to$состояние" в электрической подсистеме описывает *оператор управления* $W^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{H}$, $W^T f := u^f(\,\cdot\,,T)$. По отмеченной в п. 2.2 гиперболичности имеем

$$W^T\mathcal{F}^{T,\xi} \subset \mathcal{H}^\xi, \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T). \tag{2.9}$$

Соответствие “вход→состояние” реализуется *оператором реакции* $R^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, $\operatorname{Dom} R^T = \mathcal{M}^T$, $R^T f := (\nu \times \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\ u^f)\big|_{\Sigma^T}$.

Оператор $C^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, $C^T := (W^T)^* W^T$ называется *связывающим*. Согласно определению имеем

$$\big(u^f(\,\cdot\,,T),\, u^g(\,\cdot\,,T)\big)_{\mathcal{H}} = (C^T f, g)_{\mathcal{F}^T},$$

т.е. $C^T$ связывает метрики внутреннего и внешнего пространств.

Стандартная техника BC-метода, использующая соотношения А. С. Благовещенского позволяет выразить связывающий оператор через оператор реакции. Пусть $R^{2T}$ есть оператор реакции, отвечающий системе (2.5)–(2.7) с удвоенным финальным моментом; отметим, что по гиперболичности оператор $R^{2T}$ определяется значениями проницаемостей $\varepsilon$, $\mu$ в $\Omega^T$ и не зависит от их поведения в $\Omega \setminus \Omega^T$.

**Теорема 1.** *Для $f \in \mathcal{F}^T \cap C_0^\infty(\Sigma^T;\mathbb{R}^3)$ справедливо представление*

$$C^T f = \frac{1}{2}\,(S^T)^*\, R^{2T}\, J^{2T}\, S^T f, \tag{2.10}$$

*в котором $S^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^{2T}$ есть оператор нечетного продолжения*

$$(S^T f)(\,\cdot\,,t) = \begin{cases} f(\,\cdot\,,t), & 0 \leqslant t < T; \\ -f(\,\cdot\,,2T-t), & T \leqslant t \leqslant 2T, \end{cases}$$

*а $J^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \to \mathcal{F}^{2T}$ – оператор интегрирования*

$$(J^{2T} f)(\,\cdot\,,t) = \int_0^t ds\, f(\,\cdot\,,s), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2T.$$

Доказательство проводится по схеме [2; Теорема 3.1] с использованием формулы Грина

$$(Lu,y)_{\mathcal{H}} - (u,Ly)_{\mathcal{H}} = \int_\Gamma d\Gamma \left[(\nu \times \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\ u)\cdot y_\theta - u_\theta \cdot (\nu \times \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\ y)\right].$$

**2.4. Двойственная система.** Система

$$v_{tt} - Lv = 0 \quad \text{в} \quad Q^T; \tag{2.11}$$

$$v\big|_{t=T}, \quad v_t\big|_{t=T} = y \in \mathcal{H}; \tag{2.12}$$

$$v_\theta\big|_{\Sigma^T} = 0, \tag{2.13}$$

называется *двойственной* системе (2.5)–(2.7). Ее решение $v = v^y(x,t)$ соленоидально:

$$\operatorname{div} \varepsilon v(\,\cdot\,,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

в силу чего эволюция системы описывается гиперболическим уравнением

$$v_{tt} - (\varepsilon\mu)^{-1}\,\Delta v + \ldots = 0 \tag{2.14}$$

(см. (2.8)).

Системе (2.11)–(2.13) сопоставим *оператор наблюдения* $O^T : \mathcal{H} \to \mathcal{F}^T$, $O^T\,y := (\nu \times \frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\, v^y)\big|_{\Sigma^T}$.

**Предложение 2.** *При любом $T > 0$ справедливо соотношение*

$$O^T = (W^T)^*. \tag{2.15}$$

Это равенство устанавливается интегрированием по частям.

**2.5. Управляемость.** По стационарности системы (2.5)–(2.7) (независимости $\varepsilon$ и $\mu$ от времени) имеем

$$W^T\,\mathcal{F}^{T,\xi} = \left\{u^f(\,\cdot\,,\xi) \mid f \in \mathcal{F}^T\right\} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T).$$

Множество состояний $\mathcal{U}^\xi := W^T\,\mathcal{F}^{T,\xi}$, лежащее в $\mathcal{H}^\xi$ (см. (2.9)) называется *достижимым* (к моменту $t = \xi$).

**Теорема 2.** *Если подобласть $\Omega^\xi$ удовлетворяет условию потенциальности, то справедливо соотношение*

$$\operatorname{clos}_{\mathcal{H}} \mathcal{U}^\xi = \mathcal{H}^\xi. \tag{2.16}$$

Этот результат устанавливается по схеме Д. Расселла (см. [2; Теорема 4.1]. Опуская доказательство, поясним лишь роль условия потенциальности.

Полагая $y \in \mathcal{H}^\xi \ominus \operatorname{clos}\mathcal{U}^\xi$ и используя векторное обобщение теоремы единственности Хольмгрена–Йона–Татару для уравнения (2.14) (см. [5]) можно показать, что поле $y$ удовлетворяет условиям (i)–(iv) из Предложения 1. Это влечет $y = 0$ и приводит к равенству (2.16).

В терминах теории управления свойство (2.16) означает, что электрическая подсистема (2.5)–(2.7) *приближенно управляема* в подобласти $\Omega^\xi$, заполняемой волнами к моменту $t = \xi$.

**2.6. Пример В. Г. Осмоловского.** Условие потенциальности *достаточно* для установления свойства (2.16). Если, к примеру, $\Omega^\xi$ гомеоморфна шару, из которого удален тор, то условие ($\beta$) нарушается. Существуют ли в этом случае нетривиальные поля $y$, удовлетворяющие условиям (i)–(iv) Предложения 1? Как показывает следующий пример (В. Г. Осмоловский), такую возможность не следует исключать.

Пусть $K$, $K_1$ и $K_2$ суть открытые круги на плоскости $\{x^1, x^2\}$, такие, что $\overline{K}_{1,2} \subset K$, $\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2 = \{\varnothing\}$; обозначим $D^\xi := K \setminus [\,\overline{K}_1 \cup \overline{K}_2\,]$. Пусть $\Phi = \Phi(x^1, x^2)$ есть решение задачи

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{в} \quad D^\xi;$$

$$\Phi\big|_{\partial K_1} = c_1; \quad \Phi\big|_{\partial K_2} = c_2; \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right|_{\partial K} = 0,$$

с константами $c_1$, $c_2 : c_1 c_2 \neq 0$, $c_1 \neq c_2$. По функции $\Phi$ построим в цилиндрической области $\Omega^\xi := D^\xi \times \mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^3$ поле

$$y = y(x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial\Phi(x^1, x^2)}{\partial x^2} e_1 - \frac{\partial\Phi(x^1, x^2)}{\partial x^1} e_2 + 0 \cdot e_3$$

($e_i$ – координатные орты). Можно показать, что $y$ удовлетворяет всем условиям Предложения 1 (с $\varepsilon \equiv 1$).

Возможно ли подобное в ограниченных $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, авторам неизвестно. Положительный ответ означал бы существование физического эффекта – потерю управляемости системы (2.5)–(2.7) (в момент $t = \xi$) по "топологическим" причинам.

## 3. Визуализация

**3.1. Проекторы Вейля.** Во внутреннем пространстве системы (2.5)–(2.7) рассмотрим (ортогональные) *проекторы Вейля* $G^\xi$, проектирующие в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{H}^\xi$; обозначим $G^\xi_\perp := \mathbb{I}_\mathcal{H} - G^\xi$ ($\xi \geqslant 0$). Следующий результат описывает их действие.

**Предложение 3.** *Для гладких $y \in \mathcal{H}$ справедливо представление*

$$(G^\xi y)(x) = \begin{cases} y(x) - \nabla p^\xi(x), & x \in \Omega^\xi; \\ 0, & x \in \Omega \setminus \Omega^\xi, \end{cases}$$

*в котором* $p = p^\xi$ *есть решение задачи*

$$\operatorname{div} \varepsilon \nabla p = 0 \quad \textit{в} \quad \Omega^\xi; \tag{3.1}$$

$$p\big|_\Gamma = 0; \tag{3.2}$$

$$\nu \cdot \nabla p\big|_{\Gamma^\xi} = \nu \cdot y, \tag{3.3}$$

*и представление*

$$(G_\perp^\xi\, y)(x) = \begin{cases} \nabla p^\xi(x), & x \in \Omega^\xi; \\ y(x), & x \in \Omega \setminus \Omega^\xi. \end{cases}$$

Отметим, что проектирование приводит к появлению разрыва на $\Gamma^\xi$: в точках $x(\gamma, \xi) \in \Gamma^\xi \setminus \omega$ имеем

$$\begin{aligned}(G_\perp^\xi\, y)(x(\gamma, \xi + 0)) - (G_\perp^\xi\, y)(x(\gamma, \xi - 0)) &= (G^\xi\, y)(x(\gamma, \xi - 0)) \\ = y(x(\gamma, \xi)) - \nabla p^\xi(x(\gamma, \xi - 0)) &= (\text{см.}(3.3)) \\ = y_\theta(x(\gamma, \xi)) - (\nabla p^\xi)_\theta(x(\gamma, \xi - 0)), \end{aligned} \tag{3.4}$$

т.е. разрыв есть *тангенциальное* поле на $\Gamma^\xi$.

**3.2. Оператор $M^T$.** Пусть $\mathcal{L}_\theta := \{y \in L_2(\Omega; \mathbb{R}^3) \mid y = y_\theta\}$ есть пространство *поперечных* полей; обозначим $\mathcal{L}_\theta^T := \{y \in \mathcal{L}_\theta \mid \operatorname{supp} y \subset \overline{\Omega}^T\}$

На гладких $y$ определим оператор $M^T : \mathcal{H}^T \to \mathcal{L}_\theta^T$ по правилу: если $x \in \Omega^T \setminus \omega$, $x = x(\gamma, \xi)$, то

$$(M^T\, y)(x) = (G^\xi\, y)(x(\gamma, \tau))\Bigg|_{\tau = \xi - 0}^{\tau = \xi + 0}$$

$$= (\text{см.}(3.4)) = y_\theta(x(\gamma, \xi)) - (\nabla p^\xi)_\theta(x(\gamma, \xi - 0)).$$

Можно установить следующие его свойства.

**Предложение 4.** *Оператор* $M^T$ *непрерывен; справедливо соотношение*

$$M^T\, G^\tau = X^\tau\, M^T \quad (0 \leqslant \tau \leqslant T),$$

*в котором* $X^\tau$ *есть срезающий проектор в* $\mathcal{L}_\theta^T$*:*

$$(X^\tau\, y)(x) = \chi(\tau - \tau(x))\, y(x), \quad x \in \Omega$$

*(*$\chi(\dots)$ *– функция Хевисайда).*

**3.3. Волновые проекторы.** Во внутреннем пространстве системы (2.5)–(2.7) определим семейство *волновых проекторов* $P^\xi$, проектирующих $\operatorname{clos}\mathcal{U}^T$ на $\operatorname{clos}\mathcal{U}^\xi$; обозначим $P^\xi_\perp := P^T - P^\xi$ $(0 \leqslant \xi \leqslant T$.

Во внешнем пространстве введем семейство операторов $\Pi^{T,\xi}$ : $\mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$,

$$\Pi^{T,\xi} := (W^T)^* \, P^\xi_\perp \, W^T \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T). \tag{3.5}$$

Операторы $\Pi^{T,\xi}$ определяются связывающим оператором. Пусть $(C^T)^{1/2}$ есть положительный квадратный корень из $C^T$; рассмотрим проекторы $P^\xi_{\frac{1}{2}}$ в $\mathcal{F}^T$ на подпространство $\operatorname{clos}(C^T)^{1/2}\,\mathcal{F}^{T,\xi}$; обозначим $P^\xi_{\frac{1}{2}\perp} := \mathbb{1}_{\mathcal{F}^T} - P^\xi_{\frac{1}{2}}$.

**Предложение 5.** *При любых $T > 0$ и $\xi \in [0,T]$ справедливо представление*

$$\Pi^{T,\xi} = (C^T)^{1/2} \, P^\xi_{\frac{1}{2}\perp} (C^T)^{1/2}. \tag{3.6}$$

Доказательство вполне аналогично, приведенному в [2; разд. 5.6 и 5.7].

Пусть известно, что при всех $\xi \in (0,T]$ подобласти $\Omega^\xi$ удовлетворяют условию потенциальности. В этом случае справедливо соотношение (2.16), равносильное равенству

$$P^\xi = G^\xi \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T). \tag{3.7}$$

Таким образом, управляемость системы (2.5)–(2.7) позволяет эффективно описать действие волновых проекторов (см. Предложение 3).

Следствием последнего соотношения является представление

$$O^T \, G^\xi_\perp \, W^T = (\text{см.}(3.5),(3.7)) = \Pi^{T,\xi} \quad (0 \leqslant \xi \leqslant T), \tag{3.8}$$

используемое ниже.

**3.4. Оператор визуализации.** С системой (2.5)–(2.7) связан *оператор визуализации* $V^T : \mathcal{F}^T \to \mathcal{F}^T$, $V^T := I^T\, M^T\, W^T$. Поскольку $I^T\,\mathcal{L}^T_\theta \subset \mathcal{F}^T$ (см. п. 1.5), оператор $V^T$ корректно определен, $\operatorname{Ran} V^T \subset \mathcal{F}^T_\Theta := \{f \in \mathcal{F}^T \mid \operatorname{supp} f \subset \Theta^T\}$.

Центральный результат, доказательству которого посвящена оставшаяся часть работы, состоит в следующем.

**Теорема 3.** *Пусть известно, что при всех* $\xi \in (0,T]$ *подобласти* $\Omega^\xi$ *удовлетворяют условию потенциальности и пусть заданы* $\varepsilon$ *и* $\mu$ *на* $\Gamma$; *тогда оператор* $V^T$ *определяется оператором реакции* $R^{2T}$.

**3.5. Распространение разрывов.** В двойственной системе(2.11) –(2.13) положим в (2.12) $v_t\big|_{t=T} = G^\xi_\perp\, y$ (с гладким $y \in \mathcal{H}$); пусть $v^y_\xi$ есть соответствующее решение. Новые данные разрывны на $\Gamma^\xi$ (см. (3.4)), что приводит к разрыву решения $v^y_\xi$, распространяющемуся (в обратном времени) вдоль бихарактеристик и взаимодействующему с границей в момент $t = T - \xi$. Эволюция разрыва $v^y_\xi$ описывается известными формулами геометрической оптики (законом Рытова); амплитуда его взаимодействия с границей рассчитывается лучевым методом (см. [1; гл. 1, §5]):

$$\lim_{t\to T-\xi-0}\left(\nu\times\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\ v^y_\xi\right)\bigg|_{\Sigma^T}(\gamma,t) =$$

$$\begin{cases} \eta(\gamma)\beta^{1/2}(\gamma,\tau)\left[(G^\xi_\perp\, y)(x(\gamma,\tau))\Big|_{\tau=\xi-0}^{\tau=\xi+0}\right]^\wedge(\gamma,\xi), & (\gamma,\xi)\in\Theta^T;\\ 0, & (\gamma,\xi)\in\Sigma^T\setminus\overline{\Theta}^T; \end{cases} \tag{3.9}$$

где $\eta := (\varepsilon/\mu)^{1/2}\big|_\Gamma$.

**3.6. Амплитудная формула.** Вспоминая определения операторов $O^T$, $I^T$ и $M^T$ и учитывая (1.2) можно записать соотношение (3.9) в виде

$$(O^T\, G^\xi_\perp\, y)(\gamma, T-\xi-0)$$
$$= \eta(\gamma)(I^T\, M^T\, y)(\gamma,\xi) \quad \text{для п.в.} \quad (\gamma,\xi)\in\Sigma^T. \tag{3.10}$$

Выберем управление $f \in \mathcal{M}^T$ и положим в (3.10) $y = u^f(\,\cdot\,,T) = W^T f$; при этом $I^T\, M^T\, y = I^T\, M^T\, W^T\, f = V^T\, f$. Используя (2.15), в условиях потенциальности $\Omega^\xi$ имеем:

$$O^T\, G^\xi_\perp\, u^f(\,\cdot\,,T) = (W^T)^*\, G^\xi_\perp\, W^T\, f = (\text{см.}(3.8)) = \Pi^{T,\xi}\, f. \tag{3.11}$$

С учетом (3.10), (3.11) соотношение геометрической оптики (3.9) преобразуется к окончательному виду:

$$(V^T\, f)(\gamma,\xi) = \eta^{-1}(\gamma)\left(\Pi^{T,\xi} f\right)(\gamma, T-\xi-0) \quad \text{для п.в.} \quad (\gamma,\xi)\in\Sigma^T.$$

Это представление $V^T$ называется *амплитудной формулой*.

**3.7. Доказательство Теоремы 3.** По заданному $R^{2T}$ найдем оператор $C^T$ (см. (2.10)); по $C^T$ определим семейство операторов $\Pi^{T,\xi}$ (см. (3.6)); по $\Pi^{T,\xi}$, используя амплитудную формулу, восстановим действие оператора $V^T$. Теорема доказана.

Поскольку при $T < T_\omega$ условие потенциальности всегда выполнено, при этих временах проблем с восстановлением $V^T$ по $R^{2T}$ не возникает.

## 4. Заключение

**4.1.** Сравнивая результаты [2] с полученными выше, отметим интересную особенность, отличающую систему, описываемую волновым уравнением от системы Максвелла. В первой возможна визуализация изображений *самих* волн: $V^T f = I^T u^f(\,\cdot\,, T)$; во второй визуализируются волны, преобразованные оператором $M^T: V^T f = I^T M^T u^f(\,\cdot\,, T)$.

**4.2.** Восстановление визуализирующего оператора по оператору реакции – первый шаг к решению обратной задачи, состоящей в восстановлении проницаемостей $\varepsilon$, $\mu$ в $\Omega^T$ по $R^{2T}$. По схеме BC-метода [2], за ним должно последовать нахождение оператора $\widetilde{L}$, определяемого сплетением

$$V^T \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \widetilde{L}\, V^T$$

и последующее извлечение из $\widetilde{L}$ информации о $\rho$-метрике.

**4.3.** Другой возможный путь состоит в использовании гауссовых пучков (“квазифотонов”) по схеме работы [3]. Есть основания полагать, что действие оператора $M^T$ на пучок не меняет характера локализации последнего. Если это предположение справедливо, то визуализация пучков на выкройке позволила бы оснастить $\Theta^T$ метрикой, превращающей ее в изометрическую копию подобласти $\Omega^T$ (с $\rho$-метрикой) (см. [2, 3]).

**4.4.** Как обычно в BC-методе, результаты, получаемые для динамических задач переносятся на спектральные постановки: при выполнении условия потенциальности адекватно определенные спектральные данные оператора $L$ определяют визуализирующий оператор.

## Литература

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* Наука, М. (1972).

2. M. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* — Inverse Problems **13, No. 5** (1997), 1–45.
3. М. И. Белишев, А. П. Качалов, *Граничное управление и квазифотоны в задаче реконструкции риманова многообразия по динамическим данным.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **203** (1992), 21–51.
4. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике.* Наука, М. (1980).
5. M. Eller, V. Isakov, G. Nakamura, D. Tataru, *Uniqueness and stability in the Cauchy Problem for Maxwell and elasticity systems.* (in preparation).

Belishev M. I., Glasman A. K. Visualization of waves in the Maxwell dynamical system (the BC-method).

The paper develops an approach to the Inverse Problems using their relations to the Boundary Control Theory (the BC-method). One of main tools of the approach is the so-called Amplitude Formula (AF) based upon the Geometrical Optics and properties of controllability of dynamical systems. The AF makes the waves propagating into a domain be visible for an external observer performing measurements at a boundary. In the paper a natural analog of the AF is obtained for a system governed by the Maxwell equations. As an auxilliary result, an approximate controllability of electric component of the system is established under some assumptions of geometrical character.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 20 ноября 1997 г.