Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

**В. С. Булдырев, Т. В. Молокова**

# ЛУЧЕВОЙ МЕТОД ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ КИРАЛЬНОЙ СРЕДЫ И ПРИМЕСНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Материальные уравнения, связывающие векторы электрического смещения $\overrightarrow{D}$ и магнитной индукции $\overrightarrow{B}$ с электрическим вектором $\overrightarrow{E}$ и магнитным вектором $\overrightarrow{H}$ для изотропной неоднородной киральной среды имеют вид [2]:

$$\overrightarrow{D} = \epsilon \overrightarrow{E} + i\kappa \frac{1}{c} \overrightarrow{H}, \tag{0.1}$$

$$\overrightarrow{B} = \mu \overrightarrow{H} - i\kappa \frac{1}{c} \overrightarrow{E},$$

где $\epsilon = \epsilon(\overrightarrow{r})$ и $\mu = \mu(\overrightarrow{r})$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости, $\kappa = \kappa(\overrightarrow{r})$ – безразмерный параметр киральности, $\overrightarrow{r}$ – радиус-вектор точки в пространстве и ц-скорость света в пустоте. При этом предполагается, что зависимость векторов электромагнитного поля от времени описывается множителем $\exp^{-i\omega t}$. При $\kappa = 0$ материальные уравнения киральной среды переходят в обычные материальные уравнения изотропной электромагнитной среды.

## 1. Лучевой анзатц для векторов $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{H}$ и решение уравнения эйконала

Уравнения Максвелла для киральной среды, описываемой материальными уравнениями (0.1), и гармонического электромагнитного поля записываются в виде:

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{E} = ik\eta \overrightarrow{H} + k_0 \kappa \overrightarrow{E}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{H} = -\frac{ik}{\eta} \overrightarrow{E} + k_0 \kappa \overrightarrow{H},$$

где $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ – волновое число и $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$. Введем показатель преломления среды $n = \frac{c}{v}$, где $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ – скорость электромагнитных волн в среде и $k_0 = \frac{\omega}{c}$ - волновое число вакуума. Очевидно, что $k = nk_0$.

Перейдем в системе уравнений Максвелла (1.1) к безразмерным пространственным переменным. В качестве характерного масштаба неоднородной среды выберем величину $l = \min\limits_{\overrightarrow{r}} \frac{2\pi v(\overrightarrow{r})}{|\nabla v(\overrightarrow{r})|}$, и введем безразмерные переменные $\tilde{x} = x\frac{2\pi}{l}$, $\tilde{y} = y\frac{2\pi}{l}$, $\tilde{z} = z\frac{2\pi}{l}$ и безразмерные волновые числа $\tilde{k_0} = \frac{lk_0}{2\pi}$, $\tilde{k} = \frac{lk}{2\pi}$.

Если сохранить за безразмерными величинами $\tilde{} = \tilde{x}$,$\tilde{y}$, $\tilde{z}$ и $\tilde{k^0}$,$\tilde{k}$ прежние обозначения $x, y, z$, и $k_0, k$, то форма записи уравнений Максвелла (1.1) не изменится. Будем считать, что уравнения (1.1) записаны уже в безразмерных переменных.

Основными предположениями, при которых для системы уравнений Максвелла (1.1) будет развит лучевой метод и которые мы будем считать выполненными, являются:

1. $k_0 >> 1$

2. Функции $\eta(\overrightarrow{r})$ и $\kappa(\overrightarrow{r})$ безразмерных переменных удовлетворяют условиям:

$$|\eta(\overrightarrow{r})| \simeq |\frac{\partial^{(l_1+l_2+l_3)}}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}\partial z^{l_3}}\eta(\overrightarrow{r})|,$$

$$|\kappa(\overrightarrow{r})| \simeq |\frac{\partial^{(l_1+l_2+l_3)}}{\partial x^{l_1}\partial y^{l_2}\partial z^{l_3}}\kappa(\overrightarrow{r})|,$$

$$l_1, l_2, l_3 = 0, 1, 2, ...$$

Неравенство $k_0 \gg 1$ эквивалентно неравенству $l \gg \lambda$, где $\lambda = 2\pi\frac{c}{\omega}$ – длина волны в вакууме, и вместе со вторым предположением означает, что среда мало изменяется на расстоянии порядка длины волны, т.е. является слабонеоднородной. Заметим, что для искусственных киральных сред $\lambda$ должна быть достаточно большой по сравнению с расстояниями между искусственными элементами киральности, впаенными в среду, ибо в противном случае среда не может рассматриваться как непрерывная.

Если искать решение системы уравнений Максвелла (1.1) в виде, предопределяемом лучевым методом [1],

$$\overrightarrow{E} = \sqrt{\eta}e^{ik_0\Phi(\overrightarrow{r})}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\overrightarrow{E_s}(\overrightarrow{r})}{(-ik_0)^s} \tag{1.2}$$

$$\overrightarrow{H} = -\frac{i}{\sqrt{\eta}} e^{ik_0\Phi(\overrightarrow{r})} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\overrightarrow{H_s}(\overrightarrow{r})}{(-ik_0)^s}$$

то, после подстановки разложений (1.2) в систему уравнений (1.1) и приравнивания нулю коэффициентов при различных степенях $(-ik_0)^s, s = 2, 1, 0, -1, -2, \ldots$ большого параметра $k_0$, получим рекуррентную систему уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты $\overrightarrow{E_s}$ и $\overrightarrow{H_s}$ разложений (1.2):

$$[\nabla\Phi \times \overrightarrow{E_s}] + i(n\overrightarrow{H_s} + \kappa\overrightarrow{E_s}) = [\nabla(\ln\sqrt{\eta}) \times \overrightarrow{E_{s-1}}] + \mathrm{rot}\overrightarrow{E_{s-1}}, \qquad (1.3)$$

$$[\nabla\Phi \times \overrightarrow{H_s}] + i(n\overrightarrow{E_s} + \kappa\overrightarrow{H_s}) = -[\nabla(\ln\sqrt{\eta}) \times \overrightarrow{H_{s-1}}] + \mathrm{rot}\overrightarrow{H_{s-1}},$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\overrightarrow{E_{-1}} = \overrightarrow{H_{-1}} = 0.$$

Для старших коэффициентов $\overrightarrow{E_0}$ и $\overrightarrow{H_0}$ система уравнений (1.3) является алгебраической линейной однородной системой уравнений. Для того, чтобы эта однородная система двух векторных уравнений распалась на два независимых векторных уравнения, перейдем к новым векторам $\overrightarrow{A_s}$ и $\overrightarrow{B_s}$ по формулам [3, 5]:

$$\overrightarrow{A_s} = 1/2(\overrightarrow{E_s} + \overrightarrow{H_s}), \quad \overrightarrow{B_s} = 1/2(\overrightarrow{E_s} - \overrightarrow{H_s}),$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots$$

Складывая и вычитая уравнения системы (1.3), получим два векторных уравнения относительно $\overrightarrow{A_s}$ и $\overrightarrow{B_s}$:

$$[\nabla\Phi \times \overrightarrow{A_s}] + in_+\overrightarrow{A_s} = [\nabla(\ln\sqrt{\eta}) \times \overrightarrow{B_{s-1}}] + \mathrm{rot}\overrightarrow{A_{s-1}},$$

$$[\nabla\Phi \times \overrightarrow{B_s}] - in_-\overrightarrow{B_s} = [\nabla(\ln\sqrt{\eta}) \times \overrightarrow{A_{s-1}}] + \mathrm{rot}\overrightarrow{B_{s-1}},$$

$$s = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$A_{-1} = B_{-1} = 0,$$

где $n_+ = n + \kappa$ и $n_- = n - \kappa$ – так называемые правый и левый показатели преломления среды (смысл этих названий объяснен в конце статьи).

Для $\overrightarrow{A_0}$ и $\overrightarrow{B_0}$ имеем два независимых линейных однородных уравнения:

$$[\nabla\Phi \times \overrightarrow{A_0}] + in_+\overrightarrow{A_0} = 0, \quad [\nabla\Phi \times \overrightarrow{B_0}] - in_-\overrightarrow{B_0} = 0. \qquad (1.4)$$

Умножая эти уравнения скалярно справа на $\overline{\nabla\Phi}$, приходим к выводу, что вектора $\overrightarrow{A_0}$ и $\overrightarrow{B_0}$ ортогональны вектору $\overline{\nabla\Phi}$. Если далее уравнения (1.4) умножить скалярно сами на себя и принять во внимание ортогональность векторов $\overrightarrow{A_0}$ и $\overrightarrow{B_0}$ к вектору $\overline{\nabla\Phi}$, то получим соотношения:

$$(|\nabla\Phi|^2 - n_+^2)(\overrightarrow{A_0}, \overrightarrow{A_0}) = 0, \qquad (|\nabla\Phi|^2 - n_-^2)(\overrightarrow{B_0}, \overrightarrow{B_0}) = 0,$$

из которых следует, что если

$$|\nabla\Phi|^2 = n_+^2$$

то первое уравнение (1.4) имеет отличное от нуля решение $\overrightarrow{A_0}$, ортогональное $\overline{\nabla\Phi}$, а второе – только нулевое решение $B_0 = 0$. Если же

$$|\nabla\Phi|^2 = n_-^2,$$

то первое уравнение (1.4) имеет только нулевое решение $A_0 = 0$, а второе – отличное от нуля решение $\overrightarrow{B_0}$, ортогональное $\overline{\nabla\Phi}$. Таким образом, в киральной среде могут распространяться два типа волн с различными эйконалами $\Phi^+$ и $\Phi^-$, удовлетворяющими уравнениям:

$$|\nabla\Phi^+|^2 = n_+^2, \qquad |\nabla\Phi^-|^2 = n_-^2. \qquad (1.5)$$

Волну с эйконалом $\Phi^+$ назовем правой, или медленной, волну с эйконалом $\Phi^-$ – левой, или быстрой. Векторы электромагнитного поля $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{H}$, коэффициенты $\overrightarrow{E_s}$ и $\overrightarrow{H_s}$ разложений (1.2), а также векторы $\overrightarrow{A_s}$ и $\overrightarrow{B_s}$, отвечающие правой и левой волне, будем обозначать соответственно $\overrightarrow{E^\pm}$ и $\overrightarrow{H^\pm}$, $\overrightarrow{E_s^\pm}$ и $\overrightarrow{H_s^\pm}$, $\overrightarrow{A_s^\pm}$ и $\overrightarrow{B_s^\pm}$.

Показатели преломления $n_+$ и $n_-$ порождают два семейства лучей $L^+$ и $L^-$ – экстремалей функционалов Ферма $\int_{M_0}^{M} n_\pm ds$. Решения уравнений эйконала (1.5) могут быть записаны в виде:

$$\Phi^+ = \int\limits_{M_0}^{M} n_+ ds, \qquad \Phi^- = \int\limits_{M_0}^{M} n_- ds, \qquad (1.6)$$

причем интегралы вычисляются вдоль лучей $l^+$ и $l^-$ , принадлежащих соответственно семействам $L^+$ и $L^-$ и соединяющих точку $M_0$ с произвольной точкой пространства M.

Для центрального поля лучей, отвечающего точечному источнику, точка $M_0$ фиксирована и совпадает с точкой источника. В общем случае точка $M_0$ принадлежит некоторой поверхности $S$, и тогда экстремали, вдоль которых вычисляется интеграл (1.6), должны быть в точке $M_0$ ортогональны поверхности $S$. Очевидно, лучи $l^\pm$ ортогональны поверхностям уровня эйконалов $\Phi^\pm$ или волновым фронтам соответствующих волн и имеют место равенства:

$$\nabla\Phi^+ = n_+\overrightarrow{t^+}, \qquad \nabla\Phi^- = n_-\overrightarrow{t^-}, \tag{1.7}$$

где $\overrightarrow{t^\pm}$ – единичные касательные векторы к лучам $l^\pm$.

Пусть $\overrightarrow{n^\pm}$ и $\overrightarrow{b^\pm}$ -единичные векторы нормали и бинормали к лучам $l^\pm$. Так как вектора $\overrightarrow{A_0^+} \neq 0$ и $\overrightarrow{B_0^-} \neq 0$ соответственно ортогональны $\overrightarrow{t^+}$ и $\overrightarrow{t^-}$ , их можно разложить по векторам $\overrightarrow{n^+}$, $\overrightarrow{b^+}$ и $\overrightarrow{n^-}$, $\overrightarrow{b^-}$:

$$\overrightarrow{A_0^+} = \alpha_0^+\overrightarrow{n^+} + \beta_0^+\overrightarrow{b^+}, \tag{1.8}$$
$$\overrightarrow{B_0^-} = \alpha_0^-\overrightarrow{n^-} + \beta_0^-\overrightarrow{b^-}.$$

Получим формулы для вычисления коэффициентов $\alpha_0^\pm$ и $\beta_0^\pm$. Подставляя $\nabla\Phi^+$ и $\overrightarrow{A_0^+}$, представленные формулами (1.7) и (1.8), в первое уравнение, а $\nabla\Phi^-$ и $\overrightarrow{B_0^-}$ во второе уравнение системы (1.4) и пользуясь равенствами:

$$[\overrightarrow{t^\pm} \times \overrightarrow{n^\pm}] = \overrightarrow{b^\pm}, \tag{1.9}$$
$$[\overrightarrow{b^\pm} \times \overrightarrow{t^\pm}] = \overrightarrow{n^\pm},$$

получим для $\alpha_0^+$, $\beta_0^+$ и $\alpha_0^-$ , $\beta_0^-$ однородные системы уранений с равным нулю определителем, общее решение которых записывается в виде $\beta_0^\pm = \pm\alpha_0^\pm i$, где $\alpha_0^\pm$ – произвольные величины. Таким образом:

$$\overrightarrow{A_0^+} = \alpha_0^+(\overrightarrow{n^+} + i\overrightarrow{b^+}), \tag{1.10}$$
$$\overrightarrow{B_0^-} = \alpha_0^-(\overrightarrow{n^-} - i\overrightarrow{b^-}).$$

Произвольные величины $\alpha_0^{\pm}$ будут определены из условий разрешимости системы уравнений для $\overrightarrow{A_1^+}$ и $\overrightarrow{B_1^-}$ в следующем параграфе.

## 2. Рекурентные системы уравнений для векторов $\overrightarrow{A_s^+}$, $\overrightarrow{B_s^+}$ и их решения

Выпишем рекуррентную систему уравнений для $\overrightarrow{A_s^+}$, $\overrightarrow{B_s^+}$:

$$[\nabla\Phi^+ \times \overrightarrow{A_s^+}] + in_+\overrightarrow{A_s^+} = \mathrm{rot}\overrightarrow{A_{s-1}^+} + [\nabla(\ln\sqrt{\eta}) \times \overrightarrow{B_{s-1}^+}], \tag{2.1}$$

$$[\nabla\Phi^+ \times \overrightarrow{B_s^+}] - in_-\overrightarrow{B_s^+} = \mathrm{rot}\overrightarrow{B_{s-1}^+} + [\nabla(\ln\sqrt{\eta}) \times \overrightarrow{A_{s-1}^+}]. \tag{2.2}$$

$$s = 1, 2, ...$$

Рекуррентная система уравнений для $\overrightarrow{A_s^-}$ и $\overrightarrow{B_s^-}$ аналогична системе (2.1), (2.2).

$$[\nabla\Phi^- \times \overrightarrow{A_s^-}] + in_+\overrightarrow{A_s^-} = \mathrm{rot}\overrightarrow{A_{s-1}^-} + [\nabla(\ln\sqrt{\eta}) \times \overrightarrow{B_{s-1}^-}]$$

$$[\nabla\Phi^- \times \overrightarrow{B_s^-}] - in_-\overrightarrow{B_s^-} = \mathrm{rot}\overrightarrow{B_{s-1}^-} + [\nabla(\ln\sqrt{\eta} \times \overrightarrow{A_{s-1}^-}]$$

Если в этой системе перейти к комплексно-сопряженным величинам с одновременной заменой $\overrightarrow{A_s^+}$ на $\overrightarrow{B_s^-}$ и $\overrightarrow{B_s^+}$ на $\overrightarrow{A_s^-}$, то получим систему (2.1), (2.2). При каждом $s = 1, 2, \ldots$ правые части уравнений, входящих в систему (2.1), (2.2), являются известными, поскольку $\overrightarrow{A_{s-1}^+}$ и $\overrightarrow{B_{s-1}^+}$ находятся на предыдущем шаге, и, следовательно, система (2.1), (2.2) при каждом $s = 1, 2, \ldots$ распадается на два независимых неоднородных векторных уравнения для $\overrightarrow{A_s^+}$ и $\overrightarrow{B_s^+}$ соответственно. Обратимся к уравнению (2.1) при $s = 1$. Так как $\overrightarrow{B_0^+} = 0$ ,уравнение для $\overrightarrow{A_1^+}$ имеет вид:

$$[\overrightarrow{t^+} \times \overrightarrow{A_1^+}] + i\overrightarrow{A_1^+} = \frac{1}{n_+}\mathrm{rot}\overrightarrow{A_0^+}. \tag{2.3}$$

Вектор в левой части уравнения (2.3), как нетрудно проверить, при любом векторе $\overrightarrow{A_1^+} \neq 0$ ортогонален вектору $\overrightarrow{n^+} + i\overrightarrow{b^+}$, и, следовательно, уравнение (2.3) разрешимо при условии:

$$(\mathrm{rot}\overrightarrow{A_0^+}, \overrightarrow{n^+} + i\overrightarrow{b^+}) = 0 \tag{2.4}$$

Условие разрешимости (2.4) может быть удовлетворено за счет выбора скалярного множителя $\alpha_0^+$, входящего в формулу (1.10) для $\overrightarrow{A_0^+}$. Заменим в условии (2.4) вектор $\overrightarrow{A_0^+}$ выражением (1.10) и, используя формулы (1.8), получим для $\alpha_0^+$ следующее уравнение:

$$-2i(\nabla\alpha_0^+, \overrightarrow{t^+}) + [(\overrightarrow{n^+}, \mathrm{rot}\overrightarrow{n^+}) + (\overrightarrow{b^+}, \mathrm{rot}\overrightarrow{b^+}) - i\,\mathrm{div}\overrightarrow{t^+}]\alpha_0^+ = 0. \qquad (2.5)$$

Для того, чтобы свести уравнение (2.5) к обыкновенному дифференциальному уравнению, введем лучевую систему координат $(v^+, \chi^+, s^+)$. Координаты $v^+$ и $\chi^+$ задают луч $l^+$ семейства $L^+$, проходящий через точку $M(x,y,z)$, координата $s^+$ равна длине луча $l^+$, отсчитанной от некоторого волнового фронта или точечного источника до точки $M(x,y,z)$. Вычисление $\nabla\alpha_0^+$, $\mathrm{rot}\overrightarrow{n^+}$, $\mathrm{rot}\overrightarrow{b^+}$, $\mathrm{div}\overrightarrow{t^+}$ в лучевой системе координат приводит к формулам:

$$\nabla\alpha_0^+ = \frac{d\alpha_0^+}{ds^+}\overrightarrow{t^+},$$

$$(\overrightarrow{n^+}, \mathrm{rot}\overrightarrow{n^+}) + (\overrightarrow{b^+}, \mathrm{rot}\overrightarrow{b^+}) = \frac{2}{T^+},$$

$$\mathrm{div}\overrightarrow{t^+} = \frac{1}{J^+}\frac{dJ^+}{ds^+},$$

где $T^+$ – радиус кручения луча $l^+$ и $J^+ = |\frac{D(x,y,z)}{D(v^+,\chi^+,s^+)}|$ – абсолютная величина якобиана перехода от декартовых координат к лучевым. Величина $J^+$ имеет смысл площади поперечного сечения лучевой трубки и называется геометрической расходимостью лучевого поля $L^+$. Полученные формулы позволяют переписать уравнение (2.5) в виде обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d\alpha_0^+}{ds^+} + (i\frac{1}{T^+} + \frac{1}{2}\frac{1}{J^+}\frac{dJ^+}{ds^+})\alpha_0^+ = 0,$$

которое называется однородным уравнением переноса и легко интегрируется:

$$\alpha_0^+ = \frac{\Psi_0^+(v^+,\chi^+)}{\sqrt{J^+}}\exp[i\int_{s^0}^{s^+}\frac{ds^+}{T^+}], \qquad (2.6)$$

где $\Psi_0^+(v^+, \chi^+)$ – постоянная интегрирования, произвольная функция лучевых координат $(v^+, \chi^+)$. Функция $\Psi_0^+(v^+, \chi^+)$ определяется источником волнового поля. Итак:

$$\overrightarrow{A_0^+} = \frac{\Psi_0^+(v^+, \chi^+)}{\sqrt{J^+}} \exp[-i \int\limits_0^{s^+} \frac{ds^+}{T^+}](\overrightarrow{n^+} + i\overrightarrow{b^+}). \tag{2.7}$$

Построив $\overrightarrow{A_0^+}$, находим $\overrightarrow{B_1^+}$ из уравнения (2.2) при $s = 1$:

$$n_+[\overrightarrow{t^+} \times \overrightarrow{B_1^+}] - in_- \overrightarrow{B_1^+} = [\nabla(\ln \sqrt{\eta}) \times \overrightarrow{A_0^+}]. \tag{2.8}$$

Неоднородное векторное уравнение (2.8) эквивалентно системе трех скалярных уравнений для составляющих вектора $\overrightarrow{B_1^+}$ с определителем, отличным от нуля, и поэтому оно разрешимо при любой правой части. Решение уравнения (2.8) легко построить, раскладывая вектор $\overrightarrow{B_1^+}$ по трем взаимно-ортогональным векторам $\overrightarrow{n^+} + i\overrightarrow{b^+}$, $\overrightarrow{n^+} - i\overrightarrow{b^+}$ и $\overrightarrow{t^+}$

$$\overrightarrow{B_1^+} = \frac{\alpha_0^+}{n^+ + n^-}(\nabla(\ln \sqrt{\eta}), \overrightarrow{t^+})(\overrightarrow{n^+} + i\overrightarrow{b^+}) - \frac{\alpha_0^+}{n^-}(\nabla(\ln \sqrt{\eta}), \overrightarrow{n^+} - i\overrightarrow{b^+})\overrightarrow{t^+}.$$

Вслед за вектором $\overrightarrow{B_1^+}$ наступает очередь определения вектора $\overrightarrow{A_1^+}$. Формула (2.6) для $\alpha_0^+$ гарантирует разрешимость уравнения (2.3) для $\overrightarrow{A_1^+}$. Частное решение $\overrightarrow{a_1^+}$ уравнения (2.3) ищется в виде разложения по векторам $\overrightarrow{n^+} - i\overrightarrow{b^+}$ и $\overrightarrow{t^+}$, ортогональных вектору $\overrightarrow{n^+} + i\overrightarrow{b^+}$, и оказывается, что

$$\overrightarrow{a_1^+} = \frac{i}{4n_+}(\mathrm{rot}\overrightarrow{A_0^+}, \overrightarrow{n^+} - i\overrightarrow{b^+})(\overrightarrow{n^+} - i\overrightarrow{b^+}) - \frac{i}{n_+}(\mathrm{rot}\overrightarrow{A_0^+}, \overrightarrow{t^+})\overrightarrow{t^+}.$$

Общее решение уравнения (2.3) получается добавлением общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$\overrightarrow{A_1^+} = \alpha_1^+(\overrightarrow{n^+} + i\overrightarrow{b^+}) + \overrightarrow{a_1^+}.$$

Здесь $\alpha_1^+$ – скалярный множитель, который находится из условия разрешимости неоднородного уравнения для $\overrightarrow{A_2^+}$ (уравнение (2.1) при $s = 2$):

$$(\mathrm{rot}[\alpha_1^+(\overrightarrow{n^+} + i\overrightarrow{b^+})], \overrightarrow{n^+} + i\overrightarrow{b^+}) + (\mathrm{rot}\overrightarrow{a_1^+} + [\nabla(\ln \sqrt{\eta}) \times \overrightarrow{B_1^+}], \overrightarrow{n^+} + i\overrightarrow{b^+}) = 0,$$

которое в лучевых координатах имеет вид неоднородного уравнения переноса вдоль луча $l^+$:

$$\frac{d\alpha_1^+}{ds^+} + (i\frac{1}{T^+} + \frac{1}{2}\frac{1}{J^+}\frac{dJ^+}{ds^+})\alpha_1^+ = -(\mathrm{rot}\overrightarrow{a_1^+} + [\nabla(\ln\sqrt{\eta}) \times \overrightarrow{B_1^+}], \overrightarrow{n^+} + i\overrightarrow{b^+}]).$$

Далее по аналогичной схеме находятся последовательно вектора $\overrightarrow{B_2^+}$ и $\overrightarrow{A_2^+}$, $\overrightarrow{B_3^+}$ и $\overrightarrow{A_3^+}$ и так далее. Как уже отмечалось, вектора $\overrightarrow{B_s^-}$ и $\overrightarrow{A_s^-}$, $s = 0, 1, 2, \ldots$ строятся тем же способом, что и $\overrightarrow{A_s^+}$ и $\overrightarrow{B_s^+}$. Опуская вычисления,выпишем формулы для $\overrightarrow{A_0^-}$, $\overrightarrow{B_0^-}$ и $\overrightarrow{A_1^-}$, $\overrightarrow{B_1^-}$:

$$\overrightarrow{A_0^-} = 0$$

$$\overrightarrow{B_0^-} = \alpha_0^-(\overrightarrow{n^-} - i\overrightarrow{b^-})$$

$$\alpha_0^- = \frac{\Psi_0^-(v^-, \chi^-)}{\sqrt{J^-}} \exp[i\int\limits_0^{s^-} \frac{ds^-}{T^-}],$$

$$\overrightarrow{A_1^-} = \frac{\alpha_0^-}{n_+ + n_-}(\nabla(\ln\sqrt{\eta}), \overrightarrow{t^-})(\overrightarrow{n^-} - i\overrightarrow{b^-}) - \frac{\alpha_0^-}{n_+}(\nabla(\ln\sqrt{\eta}), \overrightarrow{n^-} + i\overrightarrow{b^-})\overrightarrow{t^-},$$

$$\overrightarrow{B_1^-} = \alpha_1^-(\overrightarrow{n^-} - i\overrightarrow{b^-}) + \overrightarrow{b_1^-},$$

$$\overrightarrow{b_1^-} = \frac{i}{4n_-}(\mathrm{rot}\overrightarrow{B_0^-}, \overrightarrow{n^-} + i\overrightarrow{b^-})(\overrightarrow{n^-} + i\overrightarrow{b^-}) + \frac{i}{n^-}(\mathrm{rot}\overrightarrow{B_0^-}, \overrightarrow{t^-})\overrightarrow{t^-}.$$

В этих формулах $(v^-, \chi^-, s^-)$ – лучевые координаты, задаваемые семейством лучей $L^-$, $J^- = |\frac{D(x,y,z,)}{D(v^-,\chi^-,s^-)}|$ – геометрическая расходимость лучевого поля $L^-$, $\Psi_0^-(v^-, \chi^-)$ – функция лучевых координат $v^-$ и $\chi^-$, определяемая источником поля и $\alpha_1^-$ – скалярная функция, посредством выбора которой обеспечивается разрешимость неоднородного линейного уравнения для $\overrightarrow{B_2^-}$ (уравнение (2.2) при $s = 2$).

Полученные формулы для $\overrightarrow{A_s^\pm}$ и $\overrightarrow{B_s^\pm}$, $s = 0, 1$ позволяют выписать векторы электромагнитного поля для правой волны $\overrightarrow{E^+}$, $\overrightarrow{H^+}$ и левой волны $\overrightarrow{E^-}$, $\overrightarrow{H^-}$ в главном (нулевом) и первом приближениях:

$$\overrightarrow{E^\pm} = \sqrt{\eta}e^{ik_0\Phi^\pm}[\frac{\Psi_0^\pm(v^\pm, \chi^\pm)}{\sqrt{J^\pm}}e^{\mp i\int_0^{s^\pm}\frac{ds}{T^\pm}}(\overrightarrow{n^\pm} \pm i\overrightarrow{b^\pm}) + \qquad (2.9)$$

$$+\frac{1}{-ik}[\alpha_1^{\pm}+\frac{\alpha_0^{\pm}}{2n_{\pm}}(\nabla(\ln\sqrt{\eta}),\overrightarrow{t^{\pm}})+O(\frac{1}{-ik})](\overrightarrow{n^{\pm}}\pm i\overrightarrow{b^{\pm}})+$$

$$+\frac{1}{-ik}[\frac{\mp i}{4n_{\pm}}(\mathrm{rot}\alpha_0^{\pm}(\overrightarrow{n^{\pm}}\pm i\overrightarrow{b^{\pm}}),\overrightarrow{n^{\pm}}\mp i\overrightarrow{b^{\pm}})+O(\frac{1}{-ik})](\overrightarrow{n^{\pm}}\mp i\overrightarrow{b^{\pm}})+$$

$$+\frac{1}{-ik}[\frac{\mp i}{n_{\pm}}(\mathrm{rot}\alpha_0^{\pm}(\overrightarrow{n^{\pm}}\pm i\overrightarrow{b^{\pm}}),\overrightarrow{t^{\pm}})-\frac{\alpha_0^{\pm}}{n_{\pm}}(\nabla(\ln\sqrt{\eta}),\overrightarrow{n^{\pm}}\mp i\overrightarrow{b^{\pm}})+O(\frac{1}{-ik})]\overrightarrow{t^{\pm}}]$$

$$\overrightarrow{H^{\pm}}=\pm\frac{1}{i\sqrt{\eta}}e^{ik_0\Phi^{\pm}}[\frac{\Psi_0^{\pm}(v^{\pm},\chi^{\pm})}{\sqrt{J^{\pm}}}e^{\mp i\int_0^{s^{\pm}}\frac{ds}{T^{\pm}}}(\overrightarrow{n^{\pm}}\pm i\overrightarrow{b^{\pm}})+ \tag{2.10}$$

$$+\frac{1}{-ik}[\alpha_1^{\pm}-\frac{\alpha_0^{\pm}}{2n_{\pm}}(\nabla(\ln\sqrt{\eta}),\overrightarrow{t^{\pm}})+O(\frac{1}{-ik})](\overrightarrow{n^{\pm}}\pm i\overrightarrow{b^{\pm}})+$$

$$+\frac{1}{-ik}[-\frac{i}{4n_{\pm}}(\mathrm{rot}\alpha_0^{\pm}(\overrightarrow{n^{\pm}}\pm i\overrightarrow{b^{\pm}}),\overrightarrow{n^{\pm}}\mp i\overrightarrow{b^{\pm}})+O(\frac{1}{-ik})](\overrightarrow{n^{\pm}}\mp i\overrightarrow{b^{\pm}})+$$

$$+\frac{1}{-ik}[-\frac{i}{n_{\pm}}(\mathrm{rot}\alpha_0^{\pm}(\overrightarrow{n^{\pm}}\pm i\overrightarrow{b^{\pm}}),\overrightarrow{t^{\pm}})\pm\frac{\alpha^{\pm}}{n_{\mp}}(\nabla(\ln\sqrt{\eta}),\overrightarrow{n^{\pm}}\mp i\overrightarrow{b^{\pm}})+O(\frac{1}{-ik})]\overrightarrow{t^{\pm}}]$$

Из этих формул видно, что векторы (см.,напр., [4]) $\overrightarrow{E_0^{\pm}}$ и $\overrightarrow{H_0^{\pm}}$ обладают круговой поляризацией. Составив матрицу когерентности, можно убедиться, что электрический вектор $\overrightarrow{E_0^{+}}$ и магнитный вектор $\overrightarrow{H_0^{+}}$ имеют правую поляризацию, а электрический вектор $\overrightarrow{E_0^{-}}$ и магнитный вектор $\overrightarrow{H_0^{-}}$ – правую.

При $\kappa=0$ правый и левый показатели преломления совпадают с показателями преломления изотропной среды $n_+=n_-=n$, и семейства лучей $L_+$ и $L_-$ сливаются в семейство лучей $L$ изотропной среды. Складывая $\overrightarrow{E^{+}}$ и $\overrightarrow{E^{-}}$, $\overrightarrow{H^{+}}$ и $\overrightarrow{H^{-}}$, получаем электромагнитное поле $\overrightarrow{E}$ $\overrightarrow{H}$, распространяющееся в изотропной среде. Так как $\overrightarrow{E^{+}}=\overline{\overrightarrow{E^{-}}}$ и $\overrightarrow{H^{+}}=\overline{\overrightarrow{H^{-}}}$, то:

$$\overrightarrow{E_0}=\sqrt{\eta}\Psi_0(v;\chi)\sqrt{\frac{1}{J}}Re[e^{-i\int_0^s\frac{ds}{T}}(\overrightarrow{n}+i\overrightarrow{b})]=$$

$$=\sqrt{c\eta}\tilde{\Psi}_0(v;\chi)\sqrt{\frac{1}{J}}(\cos\theta\overrightarrow{n}+\sin\theta\overrightarrow{b})$$

$$\overrightarrow{H_0}=\frac{1}{\sqrt{\eta}}\Psi_0(v;\chi)\sqrt{\frac{1}{j}}Im[e^{-i\int_0^s\frac{ds}{T}}(\overrightarrow{n}+i\overrightarrow{b})]=$$

$$= \sqrt{\frac{c}{\eta}}\tilde{\Psi}_0(v;\chi)\frac{1}{J}(-\sin\theta\overrightarrow{n} + \cos\theta\overrightarrow{b})$$

Мы видим, что данные формулы совпадают с формулами для обычной изотропной электромагнитной среды, полученными с помощью обычного лучевого метода.

## Литература


1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* М., 1972.
2. I. A. Kong, *Theorems of bianisatropik media.* Proc. IEEE **60**, No. 9 (1972), 1036–1046.
3. A. Lakhtakia, *Beltrami fields in chiral media.* World Scientific Singapore, 1994.
4. I. V. Lindell, A. H. Sihvola, A. I. Viitanen, and S. A. Tretyakov, *Geometrical optics in inhomogeneous chiral media with application to polarisation correction in inhomogeneous lens antenna.* Helsinki, University of Technology, Report 48, June 1989.
5. L. Silberstein, *Elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung.* Ann. Phys. **22**, No. 3 (1907), 579–587.



Buldyrev V. S., Molokova T. V. The ray method for a inhomogeneous chiral medium and extrinsic components of the electromagnetic field.

In this paper full asymptotical decomposition of a high-frequency electromagnetic field in chiral media is built. Recurrent formulas for coefficients of decomposition are found. Polarization of electromagnetic waves are found and explained in zero approximation.



Санкт-Петербургский государственный университет



Поступило 20 октября 1997 г.