Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

А. С. Голубева

О КОЛЕБАНИЯХ НЕОДНОРОДНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Введение. В работе рассматриваются колебания плоской неоднородной пластины из анизотропного материала. Предполагается, что плотность материала пластины ρ и компоненты тензора упругости $E^{ijk\ell}$

1) не зависят от времени;

2) являются медленно изменяющимися функциями пространственных координат (в том смысле, что малы их изменения на промежутке длиной порядка длины волны). Отметим, что в работе [3] рассматривалась близкая задача о колебаниях неоднородной изотропной оболочки, но предлагаемая методика отличается от нашей.

Для построения решения мы применяем вещественный вариант пространственно-временного лучевого метода ([1]). Как и в случае волнового уравнения, уравнение эйконала (см. (3) ниже) стандартным образом сводится к характеристической системе, а уравнения переноса фактически являются обыкновенными дифференциальными уравнениями вдоль характеристик.

Следует отметить важный факт, касающийся скорости распространения волн. Для уравнения колебаний пластины оказывается, что как фазовая, так и групповая скорости обратно пропорциональны длине волны. Тем самым интересующие нас короткие волны являются весьма быстрыми волнами.

1. Основные уравнения. Решение уравнения эйконала.

Уравнение колебаний неоднородной анизотропной пластины в вариационной форме имеет вид

$$\delta \int_R \int \mathcal{L} d\mathbf{x}\, dt = 0,$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2),$$

где $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\rho u_t^2$ и $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}E^{ijk\ell}u_{ij}u_{k\ell}$ – поверхностные плотности кинетической и потенциальной энергии соответственно. Здесь

$\rho = \rho(x_1, x_2)$ – поверхностная плотность материала пластины, $E^{ijk\ell} = E^{jik\ell} = E^{k\ell ij}(x_1, x_2)$ – компоненты тензора упругости,

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Уравнение Эйлера–Остроградского

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial}{\partial u_t}\mathcal{L}\Big) - \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_j}\Big(\frac{\partial}{\partial u_{ij}}\mathcal{L}\Big) = 0 \tag{1}$$

позволяет записать уравнение колебаний пластины в виде

$$\rho u_{tt} + E^{ijk\ell}\, u_{ijk\ell} + 2E_i^{ijk\ell}\, u_{jk\ell} + E_{ij}^{ijk\ell}\, u_{k\ell} = 0; \tag{2}$$

здесь и ниже нижние индексы обозначают дифференцирование по соответствующим переменным, $i,\ j,\ k,\ \ell = 1, 2$.

Вид разложения для функции u (анзатц) выберем следующим образом:

$$u = e^{ip\theta(x_0, x_1, x_2)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U^{(n)}(x_0, x_1, x_2)}{(ip)^n},$$

где $x_0 = pt$, $p \gg 1$. Подставляя это разложение в (2) и приравнивая 0 коэффициенты при соответствующих степенях p, получим уравнение для фазы θ и амплитудных функции $U^{(n)}$:

$$\Phi := -\rho\theta_0^2 + E^{ijk\ell}\, \theta_i\theta_j\theta_k\theta_\ell = 0; \tag{3}$$

$$\begin{gathered} \Psi(U^{(0)} := \rho\theta_{00}U^{(0)} + 2\rho\theta_0 U_0^{(0)} - \\ -\Big[4U_i^{(0)}\, E^{ijk\ell}\, \theta_j\theta_k\theta_\ell + 2U^{(0)}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(E^{ijk\ell}\, \theta_j\theta_k\theta_\ell\Big)\Big] = 0; \end{gathered} \tag{4}$$

$$\Psi(U^{(n)} = \Theta_n. \tag{5}$$

Здесь

$$f_0 := \frac{\partial f}{\partial x_0}, \quad \Theta_n = L_1(U^{(n-1)}) + L_2(U^{(n-2)}) + L_3(U^{(n-3)}),$$

$n = 1, 2, \ldots,$ L_1, L_2, L_3 – линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими от производных от θ, $U^{(-1)} = U^{(-2)} = 0$. Аналогично случаю волнового уравнения, назовем (3) *уравнением эйконала*, а (4) и (5) – *уравнениями переноса*.

Считая $\theta_0 < 0$, запишем (3) в виде

$$\theta_0 + H(\theta_i, x_i) := \theta_0 + \left(\frac{1}{\rho} E^{ijk\ell}\,\theta_i\theta_j\theta_k\theta_\ell\right)^{1/2} = 0 \tag{6}$$

(подкоренное выражение неотрицательно в силу известного свойства тензора упругости).

Характеристическая система для (6) имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{dx_0}{ds} = 1, \quad \frac{dx_i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \theta_i}; \\ &\frac{d\theta_i}{ds} = -\frac{\partial H}{ds_i}; \quad \frac{d\theta}{ds} = \theta_0 + \theta_i \frac{\partial H}{\partial \theta_i}. \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим решения системы (7) при начальном условии

$$x_0\big|_{s=0} = 0, \quad x_i\big|_{s=0} = a_i, \quad \theta\big|_{s=0} = \theta^0(a_1, a_2), \tag{8}$$

где $\nabla\theta^0 \neq 0$.*

Мы получим

$$x_0 = s, \quad x_i = x_i(s, a_i), \quad \theta = \theta(s, a_i).$$

При $s = 0$ $\frac{D(x_0, x_1, x_2)}{D(s, a_1, a_2)} \neq 0$, поэтому при малых x_0 s, a_1, a_2 можно рассматривать как новые координаты в пространственно-временной области. Эти координаты являются аналогами координат Лагранжа в гидромеханике.

Следуя [1], будем называть кривые

$$x_0 = s, \quad x_i = x_i(s, a_i)$$

(a_1, a_2 фиксированы) пространственно-временными лучами (ПВЛ). Легко видеть, что для однородной пластины, т.е. при $\rho = \text{const}$, $E^{ijk\ell} = \text{const}$, ПВЛ являются прямыми линиями (в пространстве (x_0, x_1, x_2)).

Отметим, что для уравнения колебаний пластины, в отличие от волнового уравнения, $\frac{d\theta}{ds} \neq 0$, то есть фаза θ не является постоянной вдоль ПВЛ. В самом деле, в случае волнового уравнения

---

*__Замечание.__ В силу уравнения эйконала и свойств тензора упругости условие $\nabla\theta^0 \neq 0$ равносильно условию $\theta_0\big|_{s=0} \neq 0$. Так как $\frac{d\theta_0}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial\theta_i} \cdot \frac{d\theta_i}{ds} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{ds} = 0$, это, в свою очередь, означает, что θ_0 не обращается в ноль вдоль всего луча.

$H = c\cdot|\nabla\theta|$ является однородной функцией первой степени, поэтому $\theta_i\frac{\partial H}{\partial\theta_i} = H$ и в силу уравнения эйконала $\frac{d\theta}{ds} = \theta_0 + H = 0$. В случае же уравнения колебаний пластины H – однородная функция второй степени.

2. Групповая и фазовая скорости.

Запишем (6) в виде дисперсионного соотношения

$$\omega = p\cdot\left(\frac{1}{\rho}E^{ijk\ell}\varkappa_i\varkappa_j\varkappa_k\varkappa_\ell\right)^{1/2},$$

где $\omega = -\frac{\partial\theta}{\partial t} = -p\theta_0$, $\varkappa_i = \theta_i$. Рассмотрим фазовую скорость

$$\overline{v}_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{|\overline{\varkappa}|}\cdot\frac{\overline{\varkappa}}{|\overline{\varkappa}|},\quad \overline{\varkappa} = (\varkappa_1,\varkappa_2)$$

и групповую скорость $\overline{v}_{\text{гр}}$:

$$v^\alpha_{\text{гр}} = \frac{\partial\omega}{\partial\varkappa_\alpha} = p\cdot 2\frac{E^{\alpha jk\ell}\varkappa_j\varkappa_k\varkappa_\ell}{(\rho E^{ijk\ell}\varkappa_i\varkappa_j\varkappa_k\varkappa_\ell)^{1/2}}. \tag{9}$$

Очевидно, фазовая и групповая скорости не совпадают. Например, для изотропного случая (т.е. при $E^{ijk\ell}\varkappa_i\varkappa_j\varkappa_k\varkappa_\ell = D(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)^2$)

$$\overline{v}_{\text{фаз}} = p\cdot\sqrt{\frac{D}{\rho}}\overline{\varkappa}\ \text{ и }\ \overline{v}_{\text{гр}} = 2p\cdot\sqrt{\frac{D}{\rho}}\overline{\varkappa}.$$

В общем случае фазовая и групповая скорости отличаются и по величине и по направлению.

Важно отметить, что $|\overline{v}_{\text{фаз}}|$ и $|\overline{v}_{\text{гр}}|$ пропорциональны большому параметру p. Это свойство можно легко переформулировать в терминах длины волны. Для этого вблизи фиксированной точки $M = (x_0^0, x_1^0, x_2^0)$ заменить функцию u на плоскую волну первого приближения

$$\widetilde{u} = e^{ip\theta(M)}\cdot U^{(0)}(M)\cdot\exp\left\{ip[-\omega(t-t^0) + \varkappa_j(x_j - x_j^0)]\right\}, \tag{10}$$

где $t^0 = p^{-1}\cdot x_0^0$. Для $\widetilde{u}$, а значит, и для u, длина волны λ имеет порядок p^{-1}. Таким образом, для уравнения колебаний пластины, в отличие от волнового уравнения, величины фазовой и групповой скорости обратно пропорционально длине волны. Зависимость этих скоростей от длины волны говорит о наличии дисперсии. В интересующем нас случае коротких волн $\lambda\to 0$, следовательно, $|\overline{v}_{\text{фаз}}|$ и $|\overline{v}_{\text{гр}}|$ стремятся к бесконечности.

3. Плотность и поток энергии. Их усредненные значения.

Уравнение (1) (домноженное на $\frac{\partial u}{\partial t}$) легко преобразуется в классическое равенство:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E} + \operatorname{div}\overline{S} = 0,$$

где

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}\rho u_t^2 + \frac{1}{2}E^{ijk\ell}\,u_{ij}\,u_{k\ell} \tag{11}$$

– поверхностная плотность энергии,

$$\begin{aligned} &S = (S^1, S^2), \\ &S^i = u_t\frac{\partial}{\partial x_j}(E^{ijk\ell}\,u_{k\ell}) - \Big(\frac{\partial}{\partial x_j}u_t\Big)E^{ijk\ell}\,u_{k\ell} \end{aligned} \tag{12}$$

– поток энергии.

Построим усреднения $\mathcal{E}$ и $\overline{S}$. Вблизи данной точки M функция u в первом приближении превращается в плоскую волну $\widetilde{u}$ (см. (10)). Подставим в (11) и (12) вещественную часть $\widetilde{u}$ вместо u, при этом $U^{(0)}$ будем считать вещественной функцией. Кроме того, ρ и $E^{ijk\ell}$ заменим их значениями в точке M. Полученные функции, очевидно, периодичны по t, x_1, x_2 (с периодами $\frac{2\pi}{p\omega}$, $\frac{2\pi}{p|\varkappa_1|}$, $\frac{2\pi}{p|\varkappa_2|}$ соответственно). Их усреднения по периоду мы и будем называть усреднениями $\mathcal{E}_c$, $\mathcal{E}_p$ и $\overline{S}$ (разумеется, фактически мы ограничились их главной частью).

Имеем

$$\begin{aligned} &\langle\,\mathcal{E}_c\,\rangle = \frac{1}{4}p^2\cdot\rho\omega^2\cdot {U^{(0)}}^2, \\ &\langle\,\mathcal{E}_p\,\rangle = \frac{1}{4}p^4 E^{ijk\ell}\,\varkappa_i\varkappa_j\varkappa_k\varkappa_\ell {U^{(0)}}^2, \\ &\langle\,S^i\,\rangle = p^4\cdot\omega\cdot E^{ijk\ell}\varkappa_j\varkappa_k\lambda_\ell\cdot {U^{(0)}}^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Из (3) следует, что

$$\langle\,\mathcal{E}_c\,\rangle = \langle\,\mathcal{E}_p\,\rangle = \frac{1}{2}\langle\,\mathcal{E}\,\rangle, \tag{14}$$

то есть с точностью до главных членов имеет место хорошо известное в механике совпадение средней кинетической и средней потенциальной энергии. Отметим, что (14) можно было бы получить непосредственно из усредненного вариационного принципа

$$\delta\iint\limits_R \langle\,\mathcal{L}\,\rangle d\mathbf{x}\,dt = 0$$

(см. [2]).

Очевидно, имеет место общее соотношение

$$\langle \overline{S} \rangle = \langle \mathcal{E} \rangle \overline{v}_{\text{гр}}. \tag{15}$$

4. Интегрирование уравнений переноса.

Нетрудно видеть, что уравнения переноса (4), (5) фактически являются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка вдоль ПВЛ. В самом деле, из формул (6), (7) следует, что

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{1}{p} v^i{}_{\text{гр}} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_0} - 2\frac{E^{ijk\ell}\theta_j\theta_k\theta_l}{\rho\theta_0} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Тем самым уравнения (4), (5) можно записать в виде

$$2\rho\theta_0 \cdot \frac{d}{ds} U^{(0)} + AU^{(0)} = 0, \tag{16}$$

$$2\rho\theta_0 \cdot \frac{d}{ds} U^{(n)} + AU^{(n)} = \Theta_n, \tag{17}$$

где

$$A = \rho\theta_{00} - 2\frac{\partial}{\partial x_i}(E^{ijk\ell}\,\theta_j\theta_k\theta_\ell),$$

$n = 1, 2, \ldots.$ Заметим, что мы рассматриваем вещественные θ, поэтому A также является вещественной функцией.

Очевидно, что

$$A = \frac{\partial}{\partial x_0}(\rho\theta_0) + \operatorname{div}\Bigl(\rho\theta_0 \cdot \frac{1}{p}\overline{v}_{\text{гр}}\Bigr).$$

Действуя аналогично [1], гл. 1, §7, можно показать, что

$$A = \frac{1}{J}\frac{d}{ds}(\rho\theta_0\, J), \tag{18}$$

где

$$J = \Bigl|\frac{D(x_0, x_1, x_2)}{D(s, a_1, a_2)}\Bigr|.$$

Подставляя (18) в (16) и интегрируя, находим:

$$U^{(0)} = \psi_0(a_1, a_2) \cdot \frac{1}{\sqrt{\rho J}}, \tag{19}$$

где ψ_0 – функция, зависящая только от луча.

(При интегрировании мы учли тот факт, что θ_0 постоянна вдоль луча.)

С помощью ранее полученных энергетических формул уравнение переноса (4) можно проинтегрировать и другим способом. Для этого домножим (4) на $\frac{1}{2}p^4\,\theta_0\,U^{(0)}$ и преобразуем:

$$\frac{1}{2}p^4\theta_0 U^{(0)}\cdot\Psi(U^{(0)})=\frac{\partial}{\partial x_0}\Big(\frac{1}{2}p^4\cdot\rho\cdot\theta_0^2 {U^{(0)}}^2\Big)-$$

$$-\frac{1}{2}p^4\rho\cdot\theta_0\theta_{00}{U^{(0)}}^2-p^4\cdot\theta_0\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(E^{ijk\ell}\,\theta_j\theta_k\theta_\ell\cdot {U^{(0)}}^2\Big)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_0}\Big(\frac{1}{2}\cdot p^4\cdot\rho\cdot\theta_0^2\cdot {U^{(0)}}^2\Big)+\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(-p^4\cdot\theta_0\cdot E^{ijk\ell}\,\theta_j\theta_k\theta_\ell\cdot {U^{(0)}}^2\Big)-$$

$$-p^4\cdot {U^{(0)}}^2\cdot\Big[\frac{1}{2}\rho\theta_0\theta_{00}-\theta_{0i}\cdot E^{ijk\ell}\,\theta_j\theta_k\theta_\ell\Big]=0.$$

Так как ρ и $E^{\alpha jk\ell}$ от x_0 не зависят, выражение в квадратных скобках равно $\frac{1}{4}\,\frac{\partial\Phi}{\partial x_0}=0$ (см. (3)), и с учетом (13), (14), (15) уравнение переноса запишется в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\langle\,\mathcal{E}\,\rangle+\operatorname{div}\Big(\frac{1}{p}\langle\,\mathcal{E}\,\rangle\overline{v}_{\text{гр}}\Big)=0. \tag{20}$$

Поскольку $\frac{\partial}{\partial x_0}=\frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial t}$, формула (30) выражает закон сохранения энергии,

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\,\mathcal{E}\,\rangle+\operatorname{div}\Big(\langle\,\mathcal{E}\,\rangle\overline{v}_{\text{гр}}\Big)=0.$$

Это уравнение имеет вид классического уравнения неразрывности для энергии, текущей наподобие жидкости с групповой скоростью. Как показано в [4], уравнение неразрывности означает, что масса (в нашем случае – количество энергии) в движущемся объеме не меняется. Для бесконечно малого объема отсюда вытекает (см. [4]) уравнение неразрывности в лагранжевых координатах, которое в нашем случае имеет вид

$$\langle\,\mathcal{E}\,\rangle\cdot J=\langle\,\mathcal{E}\,\rangle\Big|_{s=0},$$

где

$$J=\Big|\frac{D(x_0,x_1,x_2)}{D(s,a_1,a_2)}\Big|.$$

Учитывая, что $\langle\, \mathcal{E}\,\rangle = \frac{1}{2}p^4\rho\theta_0^2 {U^{(0)}}^2$, мы получаем выражение для $U^{(0)}$, которое, очевидно, совпадает с формулой (19).

Уравнения переноса для высших приближений легко решаются методом вариации произвольной постоянной. Положим в (17)

$$U^{(n)} = \varphi_n \cdot U^{(0)},$$

где φ_n – новая неизвестная функция. Так как $U^{(0)}$ удовлетворяет (16), имеем

$$2\rho\theta_0 \cdot U^{(0)} \cdot \frac{d}{ds}\varphi_n = \Theta_n,$$

откуда

$$U^{(n)}(s, a_1, a_2) = \Big[\psi_n(a_1, a_2) + \int\limits_0^s \frac{\Theta_n}{2\rho\theta_0 U^{(0)}} ds\Big] \cdot U^{(0)}.$$

Здесь $\psi_n(a_1, a_2)$ – функция, зависящая только от луча.

5. Об отражении от границы. В работе [5] подробно рассматривается отражение волн от границы для изотропной пластины. По-видимому, аналогичным методом отраженные волны можно построить и для анизотропного случая. Мы приведем общую схему построения (вопрос корректности описываемой процедуры в анизотропном случае требует дополнительного рассмотрения).

Пусть граница пластины жестко закреплена:

$$u\big|_{\partial R} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial R} = 0, \tag{21}$$

где ∂R – граница пластины, n – внутренняя нормаль к ∂R.

Решение уравнения (2) с условием (21) ищем в виде

$$u = u_{\text{пад}} + u_{\text{отр}} + \widetilde{u}_{\text{отр}},$$

где $u_{\text{пад}}$, $u_{\text{отр}}$, $\widetilde{u}_{\text{отр}}$ – разложения указанного вида, удовлетворяющие (2); как обычно, $u_{\text{пад}}$ считается заданной.*

Условие (21) будет выполнено, если на границе пластины

$$\theta_{\text{пад}} = \theta_{\text{отр}} = \widetilde{\theta}_{\text{отр}} \tag{22}$$

*Замечание. Падение волны на границу означает, что ее групповая скорость направлена к границе, т.е. $(\overline{v}_{\text{гр}}, \overline{n}) < 0$.

и

$$\left\{\begin{array}{l} U^{(k)}_{\text{пад}} + U^{(k)}_{\text{пад}} + \widetilde{U}^{(k)}_{\text{отр}} = 0 \\ \dfrac{\partial\theta_{\text{пад}}}{\partial n} \cdot U^{(k)}_{\text{пад}} + \dfrac{\partial\theta_{\text{отр}}}{\partial n} \cdot U^{(k)}_{\text{отр}} + \dfrac{\partial\widetilde{\theta}_{\text{отр}}}{\partial n} \cdot U^{(k)}_{\text{отр}} = V^{(k)}, \end{array}\right. \qquad (23)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$,

$$V^{(k)} = \left[\begin{array}{l} 0 \quad \text{при} \quad k = 0 \\ -\dfrac{\partial}{\partial n}\Big(U^{(k-1)}_{\text{пад}} + U^{(k-1)}_{\text{отр}} + \widetilde{U}^{(k-1)}_{\text{отр}}\Big) \quad \text{при} \quad k \geqslant 1. \end{array}\right.$$

Из (20) следует, что на границе пластины

$$\frac{\partial\theta_{\text{отр}}}{\partial x_0} = \frac{\partial\widetilde{\theta}_{\text{отр}}}{\partial x_0} = \frac{\partial\theta_{\text{пад}}}{\partial x_0},$$

$$\frac{\partial\theta_{\text{отр}}}{\partial \sigma} = \frac{\partial\widetilde{\theta}_{\text{отр}}}{\partial \sigma} = \frac{\partial\theta_{\text{отр}}}{\partial \sigma},$$

где $\frac{\partial}{\partial\sigma}$ – производная по касательной к ∂R. Производные по нормали $\frac{\partial\theta_{\text{отр}}}{\partial n}\Big|_{\partial R}$ и $\frac{\partial\widetilde{\theta}_{\text{отр}}}{\partial n}\Big|_{\partial R}$ находятся из уравнения эйконала, причем, очевидно

$$\frac{\partial\theta_{\text{пад}}}{\partial n}\bigg|_{\partial R}, \quad \frac{\partial\theta_{\text{отр}}}{\partial n}\bigg|_{\partial R} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\widetilde{\theta}_{\text{отр}}}{\partial n}\bigg|_{\partial R}$$

должны быть различны. (Отметим, что здесь мы не требуем вещественности фазы.) Решая характеристическую систему с полученными начальными данными, находим $\theta_{\text{отр}}$ и $\widetilde{\theta}_{\text{отр}}$. Функции $U^{(k)}$ и $\widetilde{U}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ последовательно находим из линейной системы (23), которая, очевидно, невырождена, и уравнений переноса.

Литература

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод: линейные и нелинейные волны.* Изд. ЛГУ, Л., 1985, 272 с.
2. Дж. Б. Уизем, *Линейные и нелинейные волны.* Мир, М., 1977, 622 с.
3. Г. И. Михасев, *О волновых формах движения бесконечной цилиндрической оболочки с переменными параметрами.* — Изв. Акад. Наук, МТТ **No. 6** (1995), 129–137.

4. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, *Теоретическая гидромеханика, Т. 1.* Физматгиз, М., 1963, 583 с.
5. А. С. Голубева, *Решения уравнений колебаний пластины, сосредоточенные вблизи замкнутых экстремальных циклов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 41–51.

Golubeva A. S. On vibrations of inhomogeneous anisotropic plate.

The equation describing the motion of a flat inhomogeheous anisotropic plate is considered. Formal asymptotic solutions are constructed by applying the space-time ray method. The equation describing the flow of energy is obtained in the form of the equation of continuity. Bibliography: 5 titles.

Государственный университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 9 сентября 1997