Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

В. Ю. Готлиб

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА, СОСРЕДОТОЧЕННЫХ ВБЛИЗИ ПЛОСКОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЫ

Рассматривается уравнение Гельмгольца с граничным условием Дирихле или Неймана в области Ω, представленной на рис. 1а–1в. Не нарушая общности, период границы принят равным 2π при двух резонаторах на периоде. Ищется решение (1), удовлетворяющее условиям периодичности $u(x+2\pi) = u(x)$, принадлежащее классу $\mathbf{L}_2$ в полосе периодов. В частности если граница освещается семейством параллельных прямых по некоторому направлению $\mathbf{l}$ (рис. 1б) и на ней задано условие Дирихле, то отсутствие таких решений получается применением формулы Грина к функциям u и $\frac{\partial u}{\partial l}$. Этот факт следует также из теоремы Реллиха для квазиконической области (см. [1]). В этом случае непрерывный спектр периодической задачи не несет на себе собственных значений. В случае же задачи Неймана, для нечетных функций $u(x+\pi) = -u(x)$ с помощью элементарных вариационных оценок можно показать наличие убывающих решений на границах того же вида при достаточной глубине впадин с периодичностью π. Все это указывает на то, что задачи Дирихле и Неймана в отношении наличия собственных значений на непрерывной части спектра должны вести себя по разному, что и определяет различный вид границ на рис. 1а и 1в, где реализуются собственные значения на непрерывном спектре для задач Дирихле и Неймана. Близкая по духу задача рассеяния волны на резонаторе, слабо взаимодействующем с окружающей средой через узкую щель, хорошо известна и возникает при решении ряда проблем распространения волн на мелкой воде и радиоволн. Процедура ее асимптотического решения методом сшиваемых асимптотических разложений содержится в частности в работе [2]. Способ сведения задачи к интегральному уравнению с хорошими оценками разрешимости описан в статье [3].

Работа была поддержана грантом ИНТАС-RFBR-95-0012.

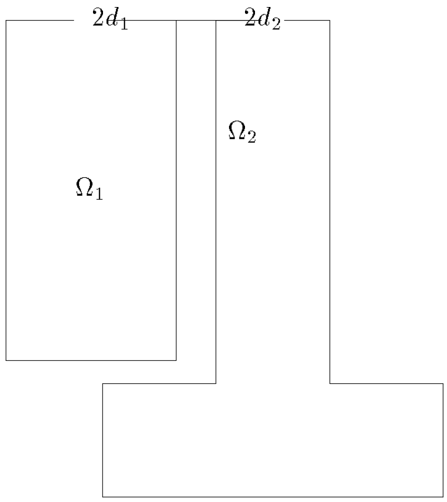

Рис. 1а. Граница где существуют собственные моды при условиях Дирихле.

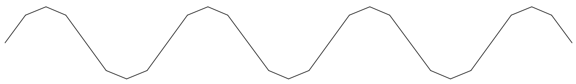

Рис. 1б. Моды Дирихле отсутствуют.

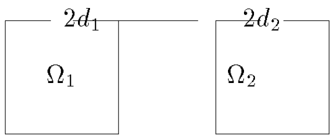

Рис. 1в. Простейшая реализация мод Неймана.

Как будет показано ниже, эта техника позволяет строго доказать также и возможность существования собственных функций с явной асимптотикой по малому параметру d (полуширине щелей) собственных значений на непрерывном спектре периодической по x возмущенной полуплоскости (эквиваленте цилиндра с криволинейной нижней границей), если щели, соединяющие верхнюю полуплоскость с системой резонаторов, достаточно узки. Существование собственных колебаний у резонатора, связанного с бесконечностью волноводом, доказано в работе [4], однако эти колебания отделены от непрерывного спектра (их частота оказывается ниже критической частоты волновода).

Перейдем к подробному описанию тех интегральных уравнений, которым удовлетворяет на щелях само решение (в случае условий Дирихле) или его нормальная производная (в случае условий Неймана). Оказывается, что при достаточно узких щелях главная часть соответствующих ядер определяется локальными свойствами граничных функций Грина краевых задач для частичных областей вблизи источника на связывающих щелях.

При значениях k^2 равных собственным числам внутренних задач для областей Ω_I эти ядра имеют полюса вида $(k^2 - k_{0i}^2)^{-1}$, причем, как легко убедиться, ранг сингулярных по k частей соответствующих интегральных операторов равен кратности спектра в точках k_{0i}^2. За вычетом этих добавок построенные интегральные уравнения оказываются однозначно разрешимыми в подходящем классе функций при достаточно малых d, где d – полуширина щели, а соответствущая однородная задача либо имеет лишь тривиальное решение либо сводится к задаче для матриц конечного ранга при k близких к k_{0i}. Действительно, рассмотрим сначала периодические решения уравнения Гельмгольца (1), удовлетворяющие условиям Дирихле (2) и убывающие при удалении от границы.

$$(\Delta + k^2)u = 0 \tag{1}$$

$$u\mid_s = 0. \tag{2}$$

Элементарное разложение Фурье вида

$$a_0 e^{iky} + b_0 e^{-iky} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) e^{-\sqrt{n^2-k^2}y} \tag{3}$$

в верхней полуплоскости показывает, что при $k \leq 1$ существование убывающих решений внешней задачи Дирихле обеспечивается условием $\int\limits_0^{2\pi} u(x)dx$ при $y = 0$, т.е. равенства нулю среднего по щелям. Для получения интегральных уравнений для $u(s_1)$

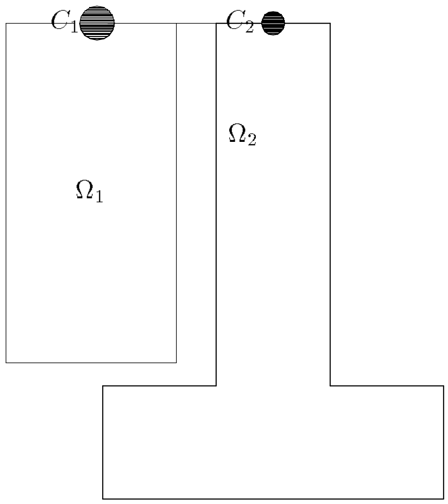

Рис. 2. Вспомогательные окружности C_1 и C_2 для условий Дирихле.

и $u(s_2)$ проведем вспомогательные окружности C_1 и C_2 радиуса d с центрами в серединах щелей проходящие через их концы (см. рис. 2).

Величины $u(s_1)$ и $u(s_2)$ на щелях выражаются через значения u на C_1 и C_2 по формулам

$$u(s_{1,2}) = \int\limits_{C_{1,2}} G_{1,2}(x(s_{1,2}), y(s_{1,2}), t_{1,2}) u(t_{1,2}) dt_{1,2} \tag{4}$$

$$(\Delta + k^2) G_{1,2}(x, y, t_{1,2}) = 0 \tag{5}$$

$$G_{1,2} \mid_{C_{1,2}} = \delta(t - t_{1,2}), \tag{6}$$

где $G_{1,2}$ – функции Грина граничной задачи Дирихле для кругов C_1 и C_2 с угловыми координатами на окружностях $t_{1,2}$. (Здесь и далее зависимость от k в формулах опускается.) В свою очередь значения u на C_1 и C_2 представляются в виде решений неоднородных граничных задач для внешней и внутренних областей по формулам (соответственно).

$$u(t_{1,2}) = \sum_{i=1,2} \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n_s} G^{\text{ext}}_{1,2}(x(t_{1,2}, y(t_{1,2}), s_i) u(s_i) ds_i, \ (x,y) \notin \Omega_{1,2} \quad (7)$$

$$u(t_{1,2}) = \int_{S_{1,2}} \frac{\partial}{\partial n_s} G^{\text{in}}(x(t_{1,2}, y(t_{1,2}), s_i) u(s_i) ds_{1,2}, \ (x,y) \in \Omega_{1,2}. \quad (8)$$

Здесь G^{ext}, $G^{\text{in}}_{1,2}$ – граничные функции Грина уравнения Гельмгольца для внешней и внутренних областей, выражающиеся стандартным образом через нормальную производную функции Грина задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в соответствующих областях. Подставляя (7–8) в (4–5) получим систему интегральных уравнений (9), (10) для значений u на S_1 и S_2.

$$u(s_1) = \int_{S_1} K_{11}(s_1, s_1') u(s_1') ds_1' + \int_{S_2} K_{12}(s_1, s_2') u(s_2') ds_2' \quad (9)$$

$$u(s_2) = \int_{S_2} K_{22}(s_2, s_2') u(s_2') ds_2' + \int_{S_1} K_{21}(s_2, s_1') u(s_1') ds_1', \quad (10)$$

где ядра имеют вид сверток внешней и внутренних граничных функций Грина с ядрами внутренней задачи Дирихле для малых окружностей C_1 и C_2, близкими к классическим ядрам Пуассона. Для существования собственных функций задачи (1) необходимо и достаточно, чтобы при некотором k_1 (9–10) имела однородное решение, для которого выполнялись бы условие (3). В этом случае собственная функция $u(x, y, k_1)$ восстанавливается по формулам (11), (12) внутри и вне Ω_i, соответственно

$$u(x,y) = \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n_s} G^{\text{in}}_i(x, y, s_i) u(s_i) ds_i, \ \mathbf{x} = (x,y) \in \Omega_{1,2} \quad (11)$$

$$u(x,y) = \sum_{i=1,2} \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n_s} G^{\text{ext}}(x, y, s_i) u(s_i) ds_i, \ \mathbf{x} \notin \Omega_{1,2}. \quad (12)$$

Выполнение уравнения (1) с краевыми условиями (2) вне щели непосредственно вытекает из (11–12), а гладкость в окрестности щели следует из (4) и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в круге, если величина kd достаточно мала. Последняя вытекает из классических оценок решений уравнения Лапласа и тождества Гильберта. Исследуем теперь разрешимость системы (9), (10).

Теорема 1. *При произвольном фиксированном k не являющемся точкой спектра внутренней задачи для Ω интегральные операторы отвечающие ядрам K_{11} и K_{22} являются операторами сжатия в $C(S_1)$ и $C(S_2)$.*

Доказательство. При $k = i\chi$ это получается на основании оценок соответствующей X-гармонической меры через X-угловую и принципа максимума. На произвольные конечные k результат распространяется при малых kd при помощи тождества Гильберта с использованием второго основного неравенства для эллиптических уравнений и ограниченности вложения W_2^2 в $\mathrm{Lip}\,(\alpha)$ при $\alpha \leq \frac{1}{2}$ в случае размерности 2. •

Замечание. x-гармонической мерой части границы называется значение в точке x гармонической функции равной единице на этой части границы и нулю вне ее. В частном случае круга она совпадает с угловой.

Следует отметить что способ доказательства идейно близок к классическому доказательству сходимости "альтернирующего процесса" Шварца с использованием сходства локального поведени функций Грина уравнений Лапласа и Гельмгольца вблизи источника. Такой способ минимально использует конкретный вид ядер K_{11} и K_{22} и допускает распространение на криволинейные границы, а также на случай, когда вместо системы щелей существует система узких каналов соединяющих периодическое семейство резонаторов с верхней полуплоскостью.

Теорема 2. *При тех же ограничениях на k нормы операторов соответствующих K_{12} и K_{21} удовлетворяют оценкам $\|\mathbf{K}_{12}\| = o(d)$, $\|\mathbf{K}_{21}\| = o(d)$.*

Доказательство. Получается непосредственной оценкой интегралов (4), (7–8) с использованием гладкости функции Грина вне окрестности источника и малости длины щели. •

Замечание. Из теорем 1 и 2 непосредственно следует, что вне окрестности собственных значений внутренних задач Дирихле для оператора $-\Delta$ в Ω_i не может существовать убывающих при удалении от границы периодических мод, если d достаточно мало поскольку система (9–10) в этом случае имеет лишь тривиальное решение, и периодические моды, если таковые существуют должны отвечать этим собственным значениям.

Теорема 3. *В окрестности изолированного собственного значения k_0 внутренней задачи Дирихле для области Ω_i ядро K_{ii} имеет вид*

$$\widetilde{K}_{ii} + (k_0^2 - k^2)^{-1}\langle \cdot, \frac{\partial \varphi_{0i}}{\partial n}\rangle \psi_i,$$

где скалярное произведение определяется как интеграл по i-й щели, а функция ψ имеет вид

$$\int\limits_{C_i \cap \Omega_i} \varphi_0(x(t_i), y(t_i)) G_i(x(s_i), y(s_i), t_i) dt_i.$$

При этом $\widetilde{K}_{ii}$ удовлетворяет оценкам теоремы 1. (Для простоты рассматривается случай равных, а не близких собственных значений обоих резонаторов.)

Доказательство. Получается подстановкой представления функции Грина через собственные функции внутренней задачи (см. [5]) в формулы (4), (7–8). •

Введем пространство непрерывных функций $C(S_1) \oplus C(S_2)$ с элементами $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ и скалярным произведением

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \stackrel{def}{=} \langle u_1, v_1 \rangle + \langle u_2, v_2 \rangle$$

и обозначим ограниченный обратный к $\mathbf{E} - \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{K}}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \widetilde{\mathbf{K}}_{22} \end{pmatrix}$ за $\mathbf{Q}$. Тогда (7–8) примет вид

$$(k_0^2 - k^2)\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{Q}(\psi_1, 0) + \langle \mathbf{u}, \mathbf{q_2} \rangle \mathbf{Q}(0, \psi_2), \tag{13}$$

где $\mathbf{q_1} = (\partial \varphi_{01}/\partial n, 0)$, $\mathbf{q_2} = (0, \partial \varphi_{02}/\partial n)$. Тогда условие существования периодических мод перепишется в виде задачи на собственные значения (14) с дополнительным условием на собственные векторы (15)

$$(k_0^2 - k^2)\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{Q}(\psi_1, 0), \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{Q}(0, \psi_2), \mathbf{q}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{Q}(\psi_1, 0), \mathbf{q}_2 \rangle & \langle \mathbf{Q}(0, \psi_2), \mathbf{q}_2 \rangle \end{pmatrix} \mathbf{X}, \tag{14}$$

$$\mathbf{X} \in \mathbf{R^2}, \mathbf{u} = x_1 \mathbf{Q}(\psi_1, 0) + x_2 \mathbf{Q}(0, \psi_2),$$

$$\langle \mathbf{Q}(\psi_1, 0), (1,1) \rangle x_1 + \langle \mathbf{Q}(0, \psi_2), (1,1) \rangle x_2 = 0, \tag{15}$$

с учетом не выписанной явно зависимости от k. Покажем теперь, что надлежащим выбором параметров резонаторов и щелей действительно можно добиться выполнения условий (14–15). Для этого рассмотрим асимптотику элементов матрицы при малых d заменив с ошибкой порядка $O(d \ln d)$ функции Грина в (11) и (12) на их главные сингулярности не зависящие от k что соответствует случаю уравнения Лапласа. Полученную в результате свертку ядер Пуассона можно вычислить прямо, но удобнее воспользоваться инвариантностью в этом приближении диагональных частей (9) и (10) относительно конформных преобразований. Действительно, конформное отображение вида

$$Z(z) = Z(x + iy) = \ln \frac{1 + z/d}{1 - z/d}$$

с началом координат в центре одной из щелей переводит дуги окружностей, проходящих через края щели в прямые параллельные вещественной оси. В новых переменных $t_i = Re(Z_i)$ для $u_i(t_i)$ получим систему интегральных уравнений (16–17) с ядрами K_{ii}, зависящими лишь от разности $t_i - t'_i$. Характер ядер связан с инвариантностью получившейся системы параллельных прямых относительно вещественных сдвигов.

$$u(t_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{11}(t_1, t'_1) u(t'_1) dt'_1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{12}(t_1, t'_2) u(t'_2) dt'_2 \tag{16}$$

$$u(t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{21}(t_2, t'_1) u(t'_1) dt'_1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{22}(t_2, t'_2) u(t'_2) dt'_2. \tag{17}$$

Ядра интегральных операторов при фиксированном $k \neq k_0$ представимы в виде

$$K_{ii}(t_i, t'_i) = \pi^{-2}(t - t') sh^{-1}(t - t') + \\ + O(d^2 \ln d (1 + | t' |)(1 + | t |)/(ch(t) ch(t'))), \tag{18}$$

т.е. остаточный член не только мал, но и удовлетворяет хорошим оценкам убывания при $t, t' \to \infty$. Сингулярные компоненты имеют вид

$$d^2 \frac{\partial}{\partial n_i}(k_0^2 - k^2)^{-1}(1 + O(d))(2\pi^3)^{-1} t \sinh^{-1}(t) \cosh^{-2}(t'/2). \qquad (19)$$

Аналогичную структуру имеют главные по d составляющие недиагональной части ядра

$$d^2 \left(\partial^2 G/\partial n_i \, \partial n_j (1 + O(d))(2\pi^3)^{-1} \, t \sinh^{-1}(t) \cosh^{-2}(t'/2)\right). \qquad (20)$$

Здесь нормальные производные функций Грина и собственных функций берутся в центрах щелей с использованием гладкости первых в случае, когда источник не близок к точке наблюдения. Из оценок (18–20) и вида ядер K_{ij} вытекает также, что решение, если оно существует убывает при больших по модулю t как $\exp(-|t/2|)$, т.е. вблизи краев щелей решение стремится к нулю как $\mathrm{dist}(\mathbf{x},\partial S)^{1/2}$ и удовлетворяет условию конечности энергии. Главная часть решения имеет вид Const $\times \cosh(t/2)$ на каждой из щелей или $\sim \sqrt{1 - x^2/d^2}$ в исходных переменных, что на полуфизическом уровне строгости следует также из результатов полученных методом локальных разложений. Заметим, что в формулах отсутствует вклад от радиуса кривизны, поскольку он имеет порядок $O(d^3)$ и меньше остаточного члена. Из вышесказанного следует, в частности, что в нерезонансном случае амплитуда рассеяния плоской волны имеет порядок $O(d)$ на щели, и $O(d^2)$ вдали от нее, причем последняя прямо пропорциональна нормальной производной решения невозмущенной задачи и отвечает замене щели точечным источником соответствующей амплитуды расположенным в ее центре. При этом характеристики внутренней задачи, зависящие от свойств области не входят в главный член. Те же формулы могут быть получены методом локальных разложений (см. [2, 6]), однако излагаемая техника не только позволяет их строго оправдать и получать независимо, но и получить ряд новых результатов. Асимптотика матрицы задачи (14) на собственные значения примет вид

$$\begin{pmatrix} < \mathbf{Q}(\psi_1, 0), \mathbf{q}_1 > & < \mathbf{Q}(0, \psi_2), \mathbf{q}_1 > \\ < \mathbf{Q}(\psi_1, 0), \mathbf{q}_2 > & < \mathbf{Q}(0, \psi_2), \mathbf{q}_2 > \end{pmatrix} \approx \qquad (21)$$

$$\approx \begin{pmatrix} d_1^2(\varphi_{1n})^2 & d_1^2 d_2^2(\partial^2 G^{\mathrm{ext}}/\partial n_1 \partial n_2)\varphi_{1n}\varphi_{2n} \\ d_1^2 d_2^2(\partial^2 G^{\mathrm{ext}}/\partial n_1 \partial n_2)\varphi_{1n}\varphi_{2n} & d_2^2(\varphi_{2n})^2 \end{pmatrix}.$$

Условие на собственный вектор (15), обеспечивающее экспоненциальное убывание решения, перепишется как $x_1 d_1^2 + x_2 d_2^2 \approx 0$. Остаточные члены имеют следующий порядок малости по d, а длины щелей соединяющих оба резонатора с верхней полуплоскостью имеют порядок $O(d)$ и предполагаются различными. Если собственные частоты находящихся на периоде резонаторов не близки друг к другу на величину порядка $O(d^2)$, то легко показать отсутствие при достаточно малых d нетривиальных решений (14–15), что влечет за собой отсутствие собственных значений в окрестности k_0^2 на непрерывном спектре оператора $-\Delta$. Пусть теперь k_0 – равные друг другу собственные частоты находящихся на периоде резонаторов. Тогда условие существования нетривиальных решений (14–15), отвечающих собственным функциям периодической задачи, перепишется в форме уравнения на k со следующей асимптотикой по d

$$(\lambda - d_1^2\varphi_{1n}^2)(\lambda - d_2^2\varphi_{2n}^2) = d_1^4 d_2^4 \varphi_{1n}^2 \varphi_{2n}^2 (\partial^2 G^{\text{ext}}/\partial n_1 \partial n_2)^2,$$
$$\lambda = \frac{2}{\pi}(k_0^2 - k^2), \tag{22}$$

где аналитический характер зависимости правой части от k следует из аналитичности по k внутреннней и внешней функций Грина уравнения (4) и оценок разрешимости системы (16–17). Отсюда немедленно вытекает существование при достаточно малых d решений $\lambda(d)$ вида

$$\lambda_{1,2} \approx d_{1,2}^2 \varphi_{1,2n}^2. \tag{23}$$

При этом (15), обеспечивающее допустимость замены входящих в (16–17) ядер их вещественными частями и экспоненциальное убывание решения при удалении от границы, примет форму условия (24) связывающего значения нормальных производных собственных функций резонаторов в серединах щелей:

$$d_1\varphi_{1n} \approx d_2\varphi_{2n}. \tag{24}$$

Теорема 4. *Если* (24) *выполнено, то при при достаточно малых d достаточно малым изменением размеров одной из щелей можно добиться выполнения условий* (14–15) *при некотором значении k с асимптотикой* (23).

Доказательство. (14–15) сводится к следующей задаче для матриц $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$:

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}, <\mathbf{x}, \mathbf{g}>=0 \tag{25}$$

что эквивалентно системе (26)

$$< \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{g}}, \mathbf{g} >=0, \lambda = \frac{< \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{g}}, \mathbf{g} >}{< \widetilde{\mathbf{g}}, \mathbf{g} >} \text{ где } \widetilde{\mathbf{g}} \perp \mathbf{g} \tag{26}$$

и может быть выбрано, например, из условия $g_1 = 1$. В этом случае $g_2 \approx -\frac{d_1^2\varphi_{1n}}{d_2^2\varphi_{2n}}$, и в невырожденном случае неравных нулю нормальных производных верно асимптотическое равенство $< \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{g}}, \mathbf{g} >\approx d_1^2\varphi_{1n}^2 - d_2^2\varphi_{2n}^2$. После замены функций Грина, входящих в (12), их вещественными частями разрешимость первого из уравнений (26) при фиксированном k следует из асимптотики $< \mathbf{A}\widetilde{\mathbf{g}}, \mathbf{g} >$ и непрерывности по параметру α, где $d_2 = \alpha d$, $d_1 = d$ правой части (26). Применение принципа сжатых отображений с использованием аналитичности по k разрешающего оператора $\mathbf{Q}$ и его асимптотики на функциях вида $(0, \psi_2)$ или $(\psi_1, 0)$ позволяет сделать вывод о существовании при достаточно малых d решений $k(d)$, $\alpha(d)$ системы (26) эквивалентной (14–15). •

Из теоремы (4) следует существование собственного значения периодической задачи (4–5) при достаточно малых d в области, полученной достаточно малым изменением длины одной из щелей из системы резонаторов, удовлетворяющих условию, $d_1\varphi_{1n} = d_2\varphi_{2n}$ при $k_0 \leq 1$. Легко убедиться, что в случае неконгруэнтных резонаторов это собственное значение принадлежит непрерывному спектру оператора $-\Delta$ на цилиндре с возмущенной нижней границей (неконгруэнтность резонаторов не позволяет расщепить задачу на две для четных и нечетных функций), т.е. пример собственного значения на непрерывном спектре является нетривиальным. Остается показать, что это условие действительно может быть реализовано для системы резонаторов показанной на рис. 1в. Поскольку речь идет о стандартной спектральной задаче для ограниченной области, то удобно воспользоваться анзацем для области соединенной с каналом ширина которого много меньше размеров области. Этот анзац имеет вид

$$\varphi_0(x, y) = \varphi_{00}(x_0, y_0) C_0 \exp(-(y - y_0)/d) \sin(\pi(x - x_0)/D) \tag{27}$$

для точек внутри канала. Эта асимптотика может быть оправдана подстановкой части соответствующего асимптотического ряда в уравнение (4) с дальнейшим применением стандартных оценок для эллиптических уравнений или применением вышеописанной техники интегральных уравнений к случаю канала. Возможно также применение вариационных оценок. Из (27) следует, что выбором величин $d \ll D_1$, $D_2 \ll 1$, а также L_1, L_2 можно добиться выполнения условия (24). Сложность конструкции, приведенной на рис. 1в, определяется тем обстоятельством, что для задачи Дирихле условие $K_0 \prec 1$ не может быть реализовано для области типа 1а.

Таким образом, для задачи Дирихле построен пример убывающих решений, реализующий возможность появления собственных значений на непрерывном спектре оператора Лапласа при введенных выше ограничениях на k. Можно показать, что эти ограничения можно смягчить ценой введения более сложной системы резонаторов (3 и более штук на периоде). Перейдем теперь к случаю мягкого краевого условия (задачи Неймана). В этом случае, как было указано выше, отсутствуют ограничения, связывающие наименьшее собственное число невозмущенного резонатора с его размерами. Поэтому изменением размеров щелей можно добиться появления собственных частот у практически любой системы резонаторов, связанных с верней полуплоскостью. Однако введение интегральных уравнений типа (9–10) сталкивается с рядом трудностей, связанных с наличием индекса дефекта у оператора Лапласа в $\mathbf{W_2^2}$ в области с остриями. Необходимость введения дополнительных функций, не принадлежащих основному классу, усложняет процедуру и приводит к изменению характера асимптотики решений при малых d. В отличие от задачи Дирихле, где отсутствие плоского участка на невозмущенной границе не приводит к осложнениям, криволинейная граница в задаче Неймана требует дополнительного рассмотрения, поэтому ограничимся случаем рис. 1б. Вводя вместо искомой функции u ее производную u_y, совпадающую на части границы параллельной оси с соответствующей нормальной производной, получим для величины $q(s) = u_y(s)$ на щелях систему интегральных уравнений с ядрами, у которых сингулярность и главный член асимптотики при малых d совпадают с ядрами интегральных уравнений (9–10), что влечет за собой те же оценки разрешимости в C или в $\mathbf{L_2}(-\infty, \infty)$ (в переменных t). Следует однако отметить, что решение $u(x, y)$, восстановленное по формулам, аналогичным (11–12), может иметь разрыв $[u]$ на S_1 и S_2. С учетом непрерывности величины u_y и всех ее производных при переходе через S_1, S_2, этот разрыв удовлетворяет на $S_{1,2}$

обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка

$$[u]_{xx} + k^2\,[u] = 0. \tag{28}$$

Тогда для непрерывности $u(x, y)$ необходимо и достаточно обращения $[u]$ в нуль на концах щелей

$$[u]\,(x_{0i} \pm d) = 0. \tag{29}$$

Появление дополнительных условий (29) с учетом однозначной разрешимости неоднородной системы (9–10) в $C(S_1) \oplus C(S_2)$ приводит к необходимости расширить класс функций, в котором ищется решение, добавив к нему двумерное линейное пространство неограниченных решений (9–10). Описанная конструкция выражает тот факт, что оператор $-\Delta$ в классе $\mathbf{W_2^2}$ в области с n остриями имеет индекс дефекта (n, n) и для получения самосопряженного расширения его область определения необходимо дополнить n функциями с особенностями $\mathrm{dist}(\mathbf{x}, \partial S_n)^{1/2}$. Такими функциями в терминах переменной (t) являются для главных частей (16), (17) функции $\exp(\pm t/2)$, растущие медленнее, чем убывает ядро в (16, 17). Существование у возмущенной задачи нетривиальных решений вида $\exp(\pm t/2)(1 + O(d))$ прямо следует из оценок (18), (20) ядер (16–17). Прямые вычисления показывают, что именно эти функции, а также условия (29) и дают основной вклад в асимптотику решения. В частности легко показать наличие собственных функций соответствующих нулевой моде $k^2 = 0$ резонаторов при соотношениях длин щелей

$$S_1\Big(-\frac{\pi}{2}\ln d_1 + G_1\Big) = S_2\Big(-\frac{\pi}{2}\ln d_2 + G_2\Big), \tag{30}$$

где постоянные G_i зависят от формы резонаторов Ω_i. При этом собственная частота неизлучающей моды имеет асимптотику

$$k_0 \approx \frac{1}{\sqrt{S_i(-\frac{\pi \ln d_i}{2} + G_i)}}. \tag{31}$$

Значение i с учетом (30) несущественно. На возможность существования такого рода мод в схеме с точечным взаимодействием указано в работе [7] на основании теории расширений.

Автор благодарит В. М. Бабича и Б. С. Павлова за плодотворные дискуссии по данному вопросу.

Литература

1. И. М. Глазман, *Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов.* М. (1963).
2. Р. Р. Гадыльшин, *Об амплитуде колебаний для резонатора Гельмгольца.* — ДАН СССР **310, No. 5** (1990), 1094–1097.
3. В. Ю. Готлиб, *Рассеяние на круглом резонаторе с узкой щелью как задача теории возмущений.* — ДАН СССР **287, вып. 5** (1986), 1109–1113.
4. А. Н. Попов, *О существовании собственных колебаний резонатора открытого в волновод.* — ЖТФ **56, вып. 10** (1986), 1916–1922.
5. Б. С. Павлов, М. Д. Фаддеев, *О рассеянии на полом резонаторе с малым отверстием.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **126** (1983), 160–176.
6. В. Ю. Готлиб., *О рэлеевской асимптотике диффракционных задач.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **62** (1976), 52–59.
7. Б. С. Павлов, И. Ю. Попов, *Акустическая модель щелей нулевой ширины и гидродинамическая устойчивость пограничного слоя.* — ТМФ **86, No. 3** (1991), 391–401.

Gotlib V. Yu. Helmgoltz equation solutions concentrated near periodical boundary.

Existence of solutions of Helmholtz equation exponentially decaying away from a periodical boundary in the upper half-plane is proved. These solutions can exist for special form of the boundary under Dirichlet or Neumann boundary conditions. In both cases the boundary has a form of the resonator chain connected by narrow splits with the upper half-plane.

С.-Петербургский филиал
Института Океанологии
им. П. П. Ширшова РАН

Поступило 19 сентября 1997