Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

Ю. В. Киселев, В. Н. Троян

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ МЕТОДОМ ДИФРАКЦИОННОЙ ТОМОГРАФИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА (SV-ЗАДАЧА)

При решении прямых и обратных задач распространения волн неизбежно встает вопрос о точности или корректности используемых приближенных методов. Оценки точности для приближенных методов, как правило, являются либо слишком грубыми, либо их получение затруднительно. Одним из подходов при выяснении адекватности приближенных методов является исследование решений для таких моделей сред, для которых может быть построено точное решение или приближенное решение с гарантированной степенью точности.

Метод дифракционной томографии в совокупности с методом статистической регуляризации [1] показал свою эффективность при обнаружении локальных неоднородностей [2, 3]. При этом в указанных работах решение прямой задачи (дифракции упругих волн на локальной неоднородности) осуществлялось с использованием приближения Борна.

В данной работе для решения прямой задачи используется конечно-разностный метод, что позволяет учесть явление дифракции на не слабо-контрастных локальных неоднородностях. При этом появляется возможность оценить точность восстановления параметров таких неоднородностей в зависимости от их контрастности. В работе продемонстрирована возможность восстановления параметров локальных неоднородностей в среде, содержащей границы со скачкообразным изменением упругих свойств для случая поверхностного расположения источников и точек наблюдения. Приведен пример численной оценки точности вычисления рассеянного поля в приближении Борна с аппроксимацией волнового поля нулевым приближением лучевого метода.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда фундаментальных исследований (проект 96-05-65904).

1. Основные уравнения и алгоритм решения обратной задачи

Численное моделирование для определения параметров локальных неоднородностей с плавным изменением упругих параметров λ, μ и массовой плотности ρ проводится для двухмерной модели упругой среды, содержащей свободную поверхность и плоско-параллельные границы раздела на которых упругие параметры испытывают разрыв. При этом предполагается, что в окрестности таких границ среда является однородной.

Источник сейсмических колебаний $\vec{\hat{f}} \equiv \vec{\hat{f}}(\vec{x},t)$, расположенный в точке $(x = x_s, z = z_s)$ декартовой системы координат $(x, y, z; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ возбуждает волновое поле $\vec{\varphi} \equiv \vec{\varphi}(x, z, t) \equiv \vec{\varphi}(\vec{x}, t)$, удовлетворяющее уравнению

$$\rho\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial t^2} = \vec{\hat{f}} + (\lambda+\mu)\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi} + \mu\Delta\vec{\varphi} + \vec{\nabla}\lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi} + \vec{\nabla}\mu\times\vec{\varphi} + 2(\vec{\nabla}\mu\cdot\vec{\nabla})\vec{\varphi} \quad (1)$$

в областях с непрерывным изменением упругих параметров $\lambda = \lambda(\vec{x})$, $\mu = \mu(\vec{x})$ и $\rho = \rho(\vec{x})$ и их первых производных, и граничным условиям на свободной поверхности $(z = 0)$

$$\vec{t}_z\big|_{z=0} = 0 \quad (2)$$

(равенство нулю напряжений) и на внутренних границах $(z = z_i)$

$$\vec{\varphi}\big|_{z=z_i-0} = \vec{\varphi}\big|_{z=z_i+0}, \quad \vec{t}_z\big|_{z=z_i-0} = \vec{t}_z\big|_{z=z_i+0}. \quad (3)$$

Волновое поле $\vec{\varphi}$ возбуждается плотностями сил $\vec{\hat{f}}$, $\vec{\hat{f}}_1$, $\vec{\hat{f}}_2$

$$\begin{aligned}
\vec{\hat{f}} &\equiv \vec{\hat{f}}(x_s, z_s, t) = \delta(x-x_s)\delta(z-z_s)f(t)\vec{e}_3,\\
\vec{\hat{f}}_1 &\equiv \vec{\hat{f}}_1(x_r, z_r, t) = \delta(x-x_r)\delta(z-z_r)\delta(t)\vec{e}_1,\\
\vec{\hat{f}}_3 &\equiv \vec{\hat{f}}_3(x_r, z_r, t) = \delta(x-x_r)\delta(z-z_r)\delta(t)\vec{e}_3,
\end{aligned} \quad (4)$$

с временными зависимостями $f(t)$ и $\delta(t)$, расположенными в точке возбуждения $\vec{x} = (x_s, z_s)$ и приема $\vec{x} = (x_r, z_r)$. Скорости распространения продольной (v_p) и поперечной (v_s) волн выражаются через величины λ, μ, ρ, следующим образом

$$v_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}, \quad v_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (5)$$

Кратко, следуя [1, 4], опишем алгоритм решения обратной задачи. Волновое поле $\vec{\varphi}(\vec{x},t)$ в искомой упругой среде $(\lambda(\vec{x}),\mu(\vec{x}),\rho(\vec{x}))$ дается решением уравнения

$$L\vec{\varphi}=-\vec{\hat{f}},\quad L\vec{\varphi}=(\lambda+\mu)\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}+ \\ +\mu\Delta\vec{\varphi}+\vec{\nabla}\lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}+\vec{\nabla}\mu\times\vec{\varphi}+2(\vec{\nabla}\mu\cdot\vec{\nabla})\vec{\varphi}-\rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \quad (6)$$

с граничными условиями (2), (3), при этом полагается известной опорная среда $(\lambda_0(\vec{x}),\mu_0(\vec{x}),\rho_0(\vec{x}))$ волновое поле $\varphi_0(\vec{x},t)$ в которой удовлетворяет уравнению

$$L_0\vec{\varphi}_0=-\vec{\hat{f}},\quad L_0\vec{\varphi}_0=(\lambda_0+\mu_0)\vec{\nabla}\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}_0+ \\ +\mu_0\Delta\vec{\varphi}_0+\vec{\nabla}\lambda_0\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}_0+\vec{\nabla}\mu_0\times\vec{\varphi}_0+2(\vec{\nabla}\mu_0\cdot\vec{\nabla})\vec{\varphi}_0-\rho_0\frac{\partial^2\vec{\varphi}_0}{\partial t^2} \quad (7)$$

и граничным условиям (2), (3). Величины $\delta\lambda=\lambda-\lambda_0$, $\delta\mu=\mu-\mu_0$ и $\delta\rho=\rho-\rho_0$ отличны от нуля в ограниченных пространственных областях и равны нулю в окрестности свободной границы и внутренних границ. Полагая величины $\delta\lambda$, $\delta\mu$ и $\delta\rho$ малыми можно записать приближенное равенство (приближение Борна)

$$L_0\delta\vec{\varphi}\approx-\delta L\vec{\varphi}_0, \quad (8)$$

где $\delta\vec{\varphi}=\vec{\varphi}-\vec{\varphi}_0$ – разностное поле, а величина $\delta L\vec{\varphi}_0$

$$\delta L\vec{\varphi}_0=\vec{\nabla}\times(\delta\mu\vec{\nabla}\times\vec{\varphi}_0)+2\sum_{j=1,3}\vec{\nabla}\cdot(\delta\mu\vec{\nabla}\varphi_{0j})\vec{e}_j+\vec{\nabla}(\delta\lambda\vec{\nabla}\cdot\vec{\varphi}_0)-\delta\rho\frac{\partial^2\vec{\varphi}_0}{\partial t^2} \quad (9)$$

является источником такого поля.

Представим компоненты разностного поля $\delta\varphi_i$ из (8) в точке наблюдения $\vec{x}=\vec{x}_r$ в виде

$$\delta\varphi_i(\vec{x}_s,\vec{x}_r,t)=\int\limits_S\int\limits_0^\infty\vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x},\vec{x}_r,t-\tau)\cdot\delta L\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{x}_s,\tau)d\tau\,d\vec{x}, \quad (10)$$

где внешнее интегрирование осуществляется по некоторой области S, содержащей источник разностного поля (9), а $\vec{\varphi}(\vec{x},\vec{x}_s,t)$ и $\vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x},\vec{x}_r,t)$ удовлетворяют соответственно уравнениям (с источниками из (4))

$$L_0\vec{\varphi}=-\vec{\hat{f}} \quad (11)$$

и

$$L_0\vec{\tilde{\varphi}}_i = -\vec{\hat{f}}_i \quad (i = 1, 3), \tag{12}$$

а также граничным условиям (2), (3).

Вводя томографические функционалы

$$\begin{aligned}
p_i^{\rho}(\vec{x}, \vec{x}_r, \vec{x}_s, t) &= -\int_0^{\infty} \vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t-\tau) \cdot \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}\,\vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau)d\tau \\
p_i^{\lambda}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) &= -\int_0^{\infty} \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t-\tau)\vec{\nabla} \cdot \vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau)d\tau \\
p_i^{\mu}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) &= +\int_0^{\infty} [\vec{\nabla} \times \vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t-\tau) \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau) - \\
&\qquad - 2\sum_{j=1,3} \vec{\nabla}\tilde{\varphi}_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_r, t-\tau) \cdot \vec{\nabla}\varphi_j(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau)]d\tau
\end{aligned} \tag{13}$$

компоненты разностного поля $\delta\varphi_i$ (10) можно записать в виде

$$\delta\varphi_i(\vec{x}_s, \vec{x}_r, t) = \int_S [\delta\lambda(\vec{x})p_i^{\lambda}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) + \delta\mu(\vec{x})p_i^{\mu}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) + \\ + \delta\rho(\vec{x})p_i^{\rho}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t)]d\vec{x}. \tag{14}$$

Отметим, что величины p_i^{λ}, p_i^{ρ} и p_i^{μ} получены в [1, 4] в предположении локального характера отличий $(\delta\lambda, \delta\mu, \delta\rho)$ параметров искомой среды λ, μ, ρ от параметров опорной среды λ_0, μ_0, ρ_0.

Связь между величинами $\delta\lambda$, $\delta\mu$ и $\delta\rho$ из (14), оказывающих совместное влияние на разностное поле, будем определять эмпирической зависимостью [5]

$$\rho = av_p^{1/4}, \quad [v_p] = [\text{м/с}], \quad a = 0.31, \quad v_p = v_s/\gamma, \tag{15}$$

где v_p и v_s – скорости распространения продольных и поперечных волн (5) соответственно, γ – безразмерный коэффициент (в дальнейшем будем полагать $\gamma = 1/\sqrt{3}$). Теперь (14) можно записать в виде

$$\delta\varphi_i(\vec{x}_s, \vec{x}_r, t) \approx \int_V [p_i^{\lambda}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t)\,\frac{1-2\gamma^2}{\gamma^2} + p_i^{\mu}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) + \\ + p_i^{\rho}(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t)\psi(\mu_0)]\delta\mu(\vec{x})d\vec{x}, \tag{16}$$

где $\psi(\mu_0) = \delta\rho/d\mu$ – производная величины ρ по μ, вычисленная с учетом (15) для значений упругих параметров, отвечающих опорной среде.

После дискретизации уравнения (16) получаем систему линейных уравнений относительно вектора $\vec{\delta}_\mu$ искомых значений $\delta\mu$, которая в матричной записи принимает вид

$$P\vec{\delta}_\mu = \vec{\delta}_\varphi, \tag{17}$$

где $\vec{\delta}_\varphi$ – временные отсчеты компонент волнового поля рассеянного неоднородностью. Для решения системы линейных уравнений (17) применяется метод наименьших квадратов [6, 7]

$$[P'P + \alpha_1(B'_x B_x + B'_z B_z) + \alpha_2 C'C]\vec{\delta}_\mu = P'\vec{\delta}_\varphi. \tag{18}$$

В (18) α_1, α_2 – регуляризующие коэффициенты, B_x и B_z – конечно-разностные аналоги вторых частных производных соответственно по переменным x и z, C – “штрафная” матрица на ненулевые значения искомых величин $(\vec{\delta}_\mu)$ в граничных точках исследуемой области S.

2. Численное моделирование решения обратной задачи

Для решения прямой задачи (1), (2), (3) используется явная разностная схема на прямоугольной сетке с одинаковым шагом по пространственным переменным [8–10]. Пространственные производные, входящие в уравнение (1), аппроксимируются с погрешностью порядка $O(h^4)$, где h – размер ячейки по пространственным координатам x и z. Временная производная из (1) аппроксимируется с погрешностью порядка $O(l^2)$, где l – величина шага по времени. Граничные условия (2), (3) аппроксимируются с точностью порядка $O(h^2)$.

Зависимость воздействия точечного источника (4), (11) от времени t имеет вид импульса Риккера [5] со спектральной функцией

$$F(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right\} \exp\left\{-\frac{i2\pi\omega}{\omega_0}\right\}, \tag{19}$$

при этом кажущаяся частота f_0 полагается равной $f_0 = \omega_0/2\pi = 50$Гц.

Точность применяемой конечно-разностной схемы для кусочно-однородной модели среды оценивалась путем сравнения с методом контурных интегралов [11]. В случае величины шага по времени $l = 0.00025$ с (80 отсчетов на кажущийся период $T_0 = 1/f_0$) относительная величина расхождения не превышает 2-3%. В случае же $l = 0.0005$ с (40 отсчетов на кажущийся период T_0) величина такого расхождения может быть порядка 5-8%.

Точность решения прямой задачи в присутствие локальной неоднородности, задаваемой величиной $\delta\mu(\vec{x})$

$$\delta\mu(\vec{x}) = \begin{cases} 0.25\mu_m \left[1 + \cos\left(\pi \frac{x-\hat{x}}{\Delta_x}\right)\right] \times & |x - \hat{x}| < \Delta_x \quad \text{и} \\ \qquad \times \left[1 + \cos\left(\pi \frac{z-\hat{z}}{\Delta_z}\right)\right], & |z - \hat{z}| < \Delta_z, \\ 0, & |x - \hat{x}| > \Delta_x \quad \text{или} \\ & |z - \hat{z}| > \Delta_z \end{cases} \tag{20}$$

где $(\hat{x}, \hat{z})$ – положение максимального μ_m значения отклонения величины $\mu(\vec{x})$ от значения $\mu_0(\vec{x})$ в опорной модели, а Δ_x и Δ_z – характеризуют размер такой неоднородности в горизонтальном $(\vec{e}_1)$ и вертикальном $(\vec{e}_3)$ направлениях соответственно, оценивается по внутренней сходимости. При этом в случае $\Delta_x = \Delta_z \approx \lambda_s = v_s T_0$ и величин μ_m, используемых в дальнейшем, уменьшение шага по времени l в два раза, по отношению к величине шага используемого при моделировании, приводит к относительной ошибке в вычислении дифрагированного поля порядка 2-5%. С учетом проведенного тестирования, моделирование проводится для величин шага по времени $l = 0.0005$с (40 отсчетов на кажущейся период T_0).

Прежде, чем перейти к рассмотрению результатов численного моделирования, сделаем несколько замечаний. Для решения обратной задачи на определение параметров локальных неоднородностей используются только данные поверхностных наблюдений, см., рис. 1, 2 (источники и точки наблюдения располагаются на небольшой глубине ~ 3м под свободной поверхностью). Квадраты S на рис. 1, 2 – области восстановления параметров среды. Черным цветом отмечено расположение неоднородностей.

Система линейных уравнений (18) всегда решается при ненулевых значениях регуляризующих коэффициентов α_1 и α_2. Как показали численные эксперименты, условие гладкости восстанавливаемых параметров среды, задаваемое по вторым производным, обеспечивает существенно лучший результат, чем аналогичное применение первых производных, а дополнительная регуляризация, с использованием “штрафных функций” на ненулевые значения в граничных точках области S, является вполне естественной для областей с ограниченными размерами. Отметим, что для получения вполне приемлимых результатов, достаточно только регуляризации связанной с требованием гладкости. Дополнительная регуляризация ($\alpha_2 \neq 0$) приводит к уменьшению ошибки определения величины μ_m примерно на 10-20%. Выбор параметра регуляризации α_1 не вызывает затруднений, поскольку в большом диапозоне его изменения (2-3 порядка) после перехода от плохой обусловленности системы (18), восстанавливаемая функция оказывается очень стабильной, лишь, при увеличении α_1, с небольшой тенденцией к большой гладкости. Параметр α_2 выбирается так, чтобы значения восстанавливаемых величин на границе области S были много меньше их максимального значения.

Переходя к изложению результатов численного моделирования отметим, что поле $\vec{\tilde{\varphi}}_i$ из (12) вычисляется при временной зависимости $\varepsilon(t)$ источника $\vec{\hat{f}}_i$ ($\varepsilon(t) = 0, t < 0$; $\varepsilon(t) = 1, t > 0$), при этом томографические функционалы (13) принимают вид

$$\begin{aligned}
p_i^\rho(\vec{x}, \vec{x}_r, \vec{x}_s, t) &= -\int_0^\infty \vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t-\tau) \cdot \frac{\partial^3}{\partial \tau^3}\, \vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau) d\tau \\
p_i^\lambda(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) &= -\int_0^\infty \vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t-\tau) \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau) d\tau \\
p_i^\mu(\vec{x}, \vec{x}_s, \vec{x}_r, t) &= +\int_0^\infty \Big[\vec{\nabla} \times \vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t-\tau) \cdot \vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial \tau}\, \vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau) - \\
&\quad - 2 \sum_{j=1,3} \vec{\nabla} \tilde{\varphi}_{ij}(\vec{x}, \vec{x}_r, t-\tau) \cdot \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial \tau}\, \varphi_j(\vec{x}, \vec{x}_s, \tau) \Big] d\tau.
\end{aligned} \tag{21}$$

Схема наблюдения и расположение 1-й модели неоднородности даны на рис. 1. Неоднородность, задаваемая формулами (20), (15) расположена в упругом полупространстве (ограниченном свободной поверхностью $z = 0$) со скоростью распространения поперечных волн $v_s = 1$км/с ($\gamma = v_s/v_p = 1/\sqrt{3}$, $\rho_0 = 2$, $\mu_0 = 2$), на глубине $z = 5\lambda_s$ ($\hat{x} = 0$, $\hat{z} = 0.1$км$= 5\lambda_s$), размеры неоднородности Δ_x и Δ_z из (20) равны $\Delta_x = \Delta_z = 0.01$км$= \lambda_s/2$. Схема наблю-

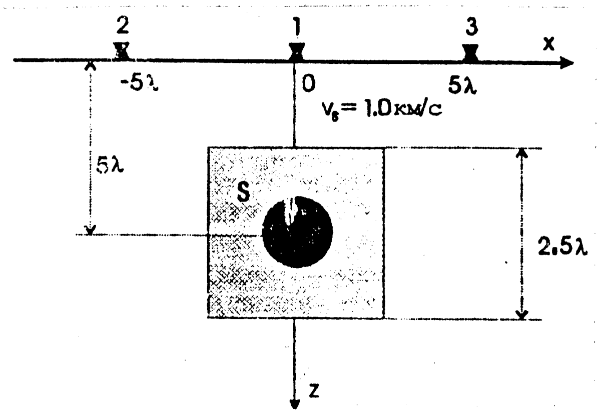

Рис. 1. Модель среды и схема наблюдения (однородное полупространство). 1, 2, 3 – точки наблюдения и возбуждения волнового поля; S – область восстановления параметров среды; $\lambda \equiv \lambda_s = 0.02$км.

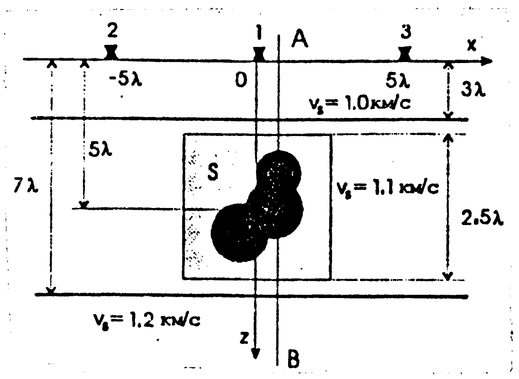

Рис. 2. Модель среды и схема наблюдений (полупространство с внутренними границами). 1, 2, 3 – точки наблюдения и возбуждения волнового поля; S – область восстановления параметров среды; $\lambda \equiv \lambda = 0.02$км.

дения, расположение 2-й модели неоднородности и слоистая модель опорной среды представлены на рис. 2. В слое, содержащем неоднородность, величина $v_s = 1.1$км/с ($\rho_0 = 2.048$, $\mu_0 = 2.48$). Неоднородность из рис. 2 – результат суперпозиции трех моделей (20) со следующими координатами экстремальных точек $\hat{x}_i$, $\hat{z}_i$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{gathered}
\hat{x}_1 = \hat{x}_0 - 0.25\lambda_s, \quad \hat{z}_1 = \hat{z}_0 + 0.6\lambda_s \quad (\Delta_x = \Delta_z = 0.5\lambda_s), \\
\hat{x}_2 = \hat{x}_0 + 0.25\lambda_s, \quad \hat{z}_2 = \hat{z}_0 + 0.1\lambda_s \quad (\Delta_x = \Delta_z = 0.5\lambda_s), \\
\hat{x}_3 = \hat{x}_0 + 0.25\lambda_s, \quad \hat{z}_3 = \hat{z}_0 - 0.5\lambda_s \quad (\Delta_x = \Delta_z = 0.45\lambda_s), \\
\hat{x}_0 = 0, \quad \hat{z}_0 = 5.0\lambda_s.
\end{gathered} \tag{22}$$

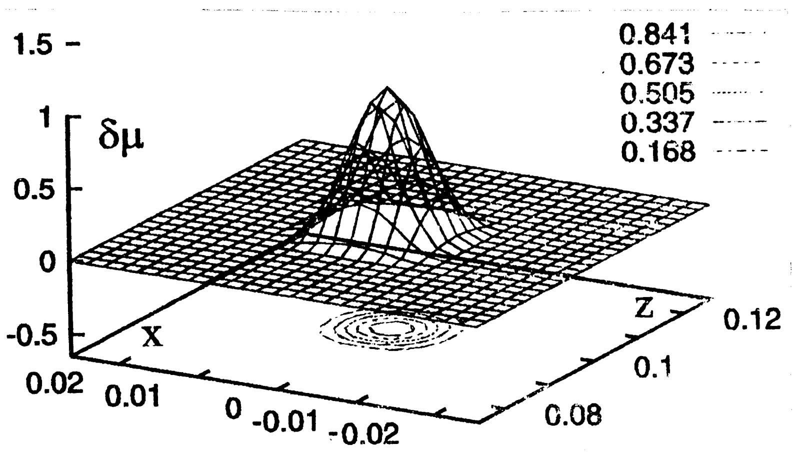

Рис. 3. Модель неоднородности ($\mu_m = 1.0$), x, z – км.

Численное моделирование проводилось для 2-х значений μ_m из (20): $\mu_m = 1.0$ ($v_{s\,\max} = 1.2$), $\mu_m = 2.3$ ($v_{s\,\max} = 1.4$) в случае однородного полупространства и для одного значения μ_m из (20) $\mu_m = 1.2$ ($v_{s\,\max} = 1.31$) в случае слоистого полупространства. Число узлов в исследуемой области S (квадрат со сторонами равными $2.5\lambda_s$, см., рис. 1, 2) равно 25×25. Приведенные ниже примеры восстановления параметров неоднородностей получены по двум (x- и z-) компонентам волнового поля "измеренного" в точках 1, 2, 3 (рис. 1, 2) и возбужденного источниками, расположенными в этих же точках (9 пар источник-приемник). Сразу отметим, что восстановление параметров неоднородностей только по z-компонентам приводит к увеличению ошибки восстановления на 10-20%. В случаях восстановления объектов с центральной симметрией удовлетворительный результат достигается использованием трех (и даже двух) пар источник-приемник.

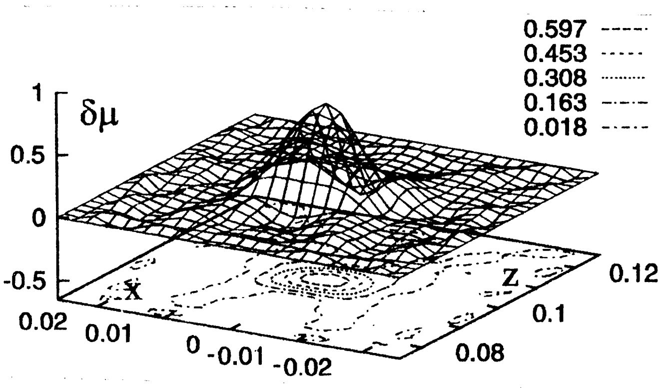

Рис. 4. Результат восстановления неоднородности $\mu_m = 1.0$, x, z – км.

На рис. 3 представлена модель неоднородности ($\mu_m = 1.0$). Результат восстановления дан на рис. 4. Модельное и восстановленное значения $\delta\mu$ на вертикальном профиле ($x = 0$) даны на рис. 5а (кривые 1 и 2 соответственно). Результат восстановления в случае $\mu_m = 2.3$ ($v_{s\,\max} = 1.4$) представлен на рис. 5b. На рис. 6 представлены аналогичные результаты, но для модели неоднородности (22) (рис. 2 профиль АВ), расположенной в однородном полупространстве.[1] Как и в ранее рассмотренном случае (рис. 5), ошибка восстановления растет с увеличением контрастности неоднородности относительно опорной среды, что связано с неадекватностью описания процесса рассеяния на высококонтрастных объектах в приближении Борна. Пример подобного отличия "точного" рассеянного (полученного конечно-разностным

[1] Пространственное изображение подобной неоднородности см. на рис.8.

методом) волнового поля и его борновского приближения дан на рис. 7. Вычисления проведены для модели неоднородности (22), расположенной в однородном полупространстве рис. 1 ($\mu_m = 2.3$, $v_{s\,\max} = 1.4$). Источник и точка наблюдения расположены в точке 1 ($x = 0$). Естественно, в случаях подобных отличий между рассеянным и борновским полями нельзя расчитывать на малую (например, 10-20%) ошибку восстановления. Параметры менее контрастных неоднородностей (рис. 5a, 6a) при введении не слишком сильных априорных данных о местоположении и размерах неоднородности можно восстанавливать с ошибкой не превышающей 10%.

Заканчивая обзор результатов восстановления параметров среды, приведем пример восстановления параметров неоднородности (22) ($\mu_m = 1.2$, $v_{s\,\max} = 1.31$), расположенной в слоистой опорной среде рис. 2. Модель неоднородности и результат восстановления представлен на рис. 8. Точность восстановления параметров неоднородности расположенной в слоистой опорной среде по крайней мере не хуже, чем в однородной опорной среде.

Отметим, что для восстановления параметров среды можно применять метод последовательных приближений, при котором

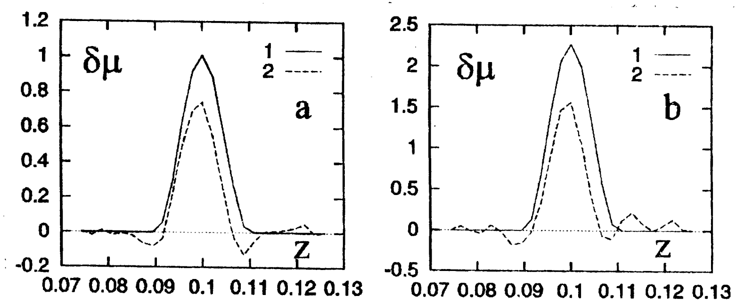

Рис. 5. Восстановления параметров неоднородностей с простой геометрией. 1 – модель; 2 – результат восстановления; a – $\mu_m = 1.0$; b – $\mu_m = 2.3$; z – км.

обратная задача решается многократно и на каждом шаге в качестве опорной среды принимается результат восстановления, полученный на предыдущем шаге. Подобные численные экспери-

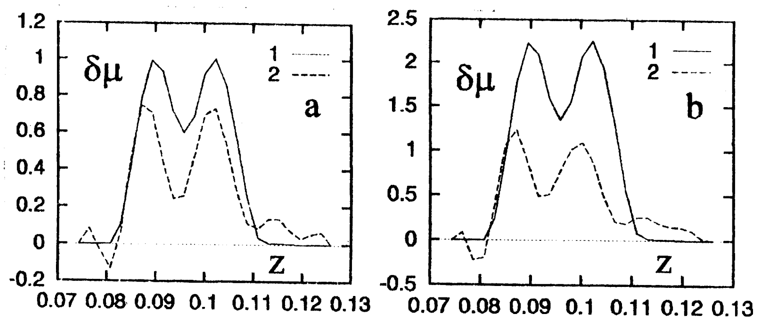

Рис. 6. Восстановления параметров неоднородностей со сложной геометрией. 1 – модель; 2 – результат восстановления; a – $\mu_m = 1.0$; b – $\mu_m = 2.3$; z – км.

менты проводились для одномерного аналога рассматриваемой здесь задачи. Как правило, 3-4-х шагов было достаточно для восстановления искомого параметра с ошибкой не превышающей 5%.

По результатам проведенного численного моделирования можно сделать вывод, что предложенная в [1] реализация метода дифракционной томографии, позволяет с удовлетворительной точностью определять упругие параметры локальных неоднородностей не слишком высокой контрастности с размерами $\sim \lambda_q$ $(q = p, s)$ при небольшом числе поверхностных пар источник-точка наблюдения, в средах, содержащих плоские границы раздела.

3. Лучевое представление для рассеянного поля

Целью рассмотренных примеров решения обратной задачи было оценить точность восстановления упругих параметров методом дифракционной томографии. При этом решение всех необходимых для численного моделирования прямых задач было выполнено конечно-разностным методом, т.е. фактически использовалось точное решение задачи на распространение волн. На практике при применении метода дифракционной томографии волновые поля $\vec{\tilde{\varphi}}_i$ и $\vec{\varphi}$ из (11), (12) будут вычисляться тем или иным приближенным методом. Поскольку нулевое приближение

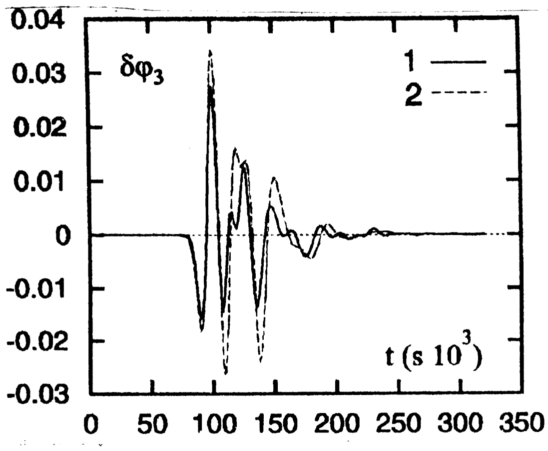

Рис. 7. Рассеянное волновое поле ($\mu_m = 2.3$). 1 – конечно-разностный метод; 2 – приближение Борна.

лучевого метода в настоящее время является основным инструментом при решении задач сейсморазведки, ниже дается численная оценка его применения для вычисления волнового поля рассеянного локальной неоднородностью.

Компоненты волнового поля $\delta\varphi_i(\vec{x}_s, \vec{x}_r, t)$ $(i = 1, 3)$ рассеянного локальной неоднородностью $(\delta\lambda, \delta\mu, \delta\rho)$ при падении на нее волны $\vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, t)$ даются выражениями (14), (13). В приближении лучевого метода волновые поля $\vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t)$, $\vec{\varphi}(\vec{x}, \vec{x}_s, t)$ (13) можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
\vec{\tilde{\varphi}}_i(\vec{x}, \vec{x}_r, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \vec{\tilde{A}}_{iqj}(\vec{x}, \vec{x}_r, t) \tilde{f}_j(t - \tilde{\tau}_q), \\
\varphi(\vec{x}, \vec{x}_s, t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \vec{A}_{qj}(\vec{x}, \vec{x}_s, t) f_j(t - \tau_q), \\
f_j(t) &= f'_{j+1}(t), \quad \tilde{f}_j(t) = \tilde{f}'_{j+1}(t),
\end{aligned}
\tag{23}
$$

где $\tilde{\tau}_q \equiv \tilde{\tau}_q(\vec{x}, \vec{x}_r)$ $(\tau_q \equiv \tau_q(\vec{x}, \vec{x}_s))$ – время распространения волны от точки $\vec{x}_r$, $(\vec{x}_s)$ до точки $\vec{x}$. Подставляя выражения для полей

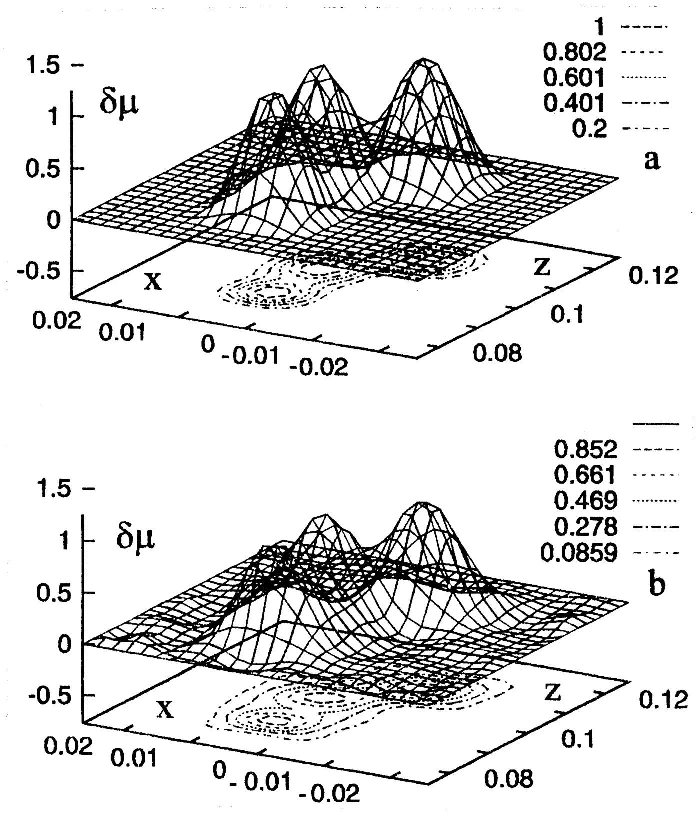

Рис. 8. Модель неоднородности в слоистой вмещающей среде (a) и результат восстановления (b) ($\mu_m = 1.2$), x, z – км.

(23) в (13) запишем величины p_i^ρ, p_i^λ, p_i^μ в виде лучевого ряда

$$p_i^\rho = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \sum_{q'=p,s} p_{iqq'j}^{\rho} \phi_j(t - \tilde{\tau}_q - \tau_{q'}),$$

$$p_i^\lambda = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \sum_{q'=p,s} p_{iqq'j}^{\lambda} \phi_j(t - \tilde{\tau}_q - \tau_{q'}),$$

$$
\begin{gathered}
p_i^\mu = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{q=p,s} \sum_{q'=p,s} p_{iqq'j}^\mu \phi_j(t - \tilde{\tau}_q - \tau_{q'}), \\
\phi_j(t) = \phi'_{j+1}(t), \quad \phi_0(t) = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^\infty \tilde{f}_0(t-\tau) f_0(\tau) d\tau,
\end{gathered} \tag{24}
$$

при этом амплитудные множители $p_{iqq'j}^\lambda$, $p_{iqq'j}^\mu$, $p_{iqq'j}^\rho$ $(j = 0, 1)$ можно записать следующим образом

$$
\begin{aligned}
p_{iqq'0}^\rho &= -(\vec{\tilde{A}}_{iq0} \cdot \vec{A}_{q'0}), \\
p_{iqq'0}^\lambda &= -(\vec{\tilde{A}}_{iq0} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\tau}_q)(\vec{A}_{q'0} \cdot \vec{\nabla} \tau_{q'}), \\
p_{iqq'0}^\mu &= [\vec{\nabla} \tilde{\tau}_q \times \vec{\tilde{A}}_{iq0}] \cdot [\vec{\nabla} \tau_{q'} \times \vec{A}_{q'0}] - 2(\vec{\tilde{A}}_{iq0} \cdot \vec{A}_{q'0})(\vec{\nabla} \tilde{\tau}_q \cdot \vec{\nabla} \tau_{q'}),
\end{aligned} \tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{iqq'1}^\rho &= -(\vec{\tilde{A}}_{iq0} \cdot \vec{A}_{q'1}) - (\vec{\tilde{A}}_{iq1} \cdot \vec{A}_{q'0}), \\
p_{iqq'1}^\lambda &= -(\vec{\tilde{A}}_{iq0} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\tau}_q)(\vec{A}_{q'1} \cdot \vec{\nabla} \tau_{q'}) - (\vec{\tilde{A}}_{iq1} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\tau}_q)(\vec{A}_{q'0} \cdot \vec{\nabla} \tau_{q'}) + \\
&\quad + (\vec{\nabla} \cdot \vec{\tilde{A}}_{iq0})(\vec{A}_{q'0} \cdot \vec{\nabla} \tau_{q'}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{q'0})(\vec{\tilde{A}}_{iq0} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\tau}_q), \\
p_{iqq'1}^\mu &= [\vec{\nabla} \tilde{\tau}_q \times \vec{\tilde{A}}_{iq0}] \cdot [\vec{\nabla} \tau_{q'} \times \vec{A}_{q'1}] + [\vec{\nabla} \tilde{\tau}_q \times \vec{\tilde{A}}_{iq1}] \cdot [\vec{\nabla} \tau_{q'} \times \vec{A}_{q'0}] - \\
&\quad - [\vec{\nabla} \times \vec{\tilde{A}}_{iq0}] \cdot [\vec{\nabla} \tau_{q'} \times \vec{A}_{q'0}] - [\vec{\nabla} \times \vec{A}_{q'0}] \cdot [\vec{\nabla} \tilde{\tau}_q \times \vec{\tilde{A}}_{iq0}] - \\
&\quad - 2[(\vec{\tilde{A}}_{iq0} \cdot \vec{A}_{q'1}) + (\vec{\tilde{A}}_{iq1} \cdot \vec{A}_{q'0})](\vec{\nabla} \tilde{\tau}_q \cdot \vec{\nabla} \tau_{q'}) + \\
&\quad + 2 \sum_{k=1,3} [A_{q'0k}(\vec{\nabla} \tilde{A}_{iq0k} \cdot \vec{\nabla} \tau_{q'}) + \tilde{A}_{iq0k}(\vec{\nabla} A_{q'0k} \cdot \vec{\nabla} \tilde{\tau}_q)].
\end{aligned} \tag{26}
$$

На рис. 9 представлены результаты моделирования рассеяния волнового поля на неоднородности (20) с размером $\sim \lambda_s$ и с максимальной контрастностью по отношению к скорости распространения p- и s-волн ~20% ($\mu_m = 1.0$, $\mu_0 = 2$, $\rho_0 = 2$) относительно опорной среды, расположенной в свободном пространстве. Схема наблюдения дана на рис. 1. Источник и точка наблюдения расположены в точках 2 и 3 соответственно. Кривая 1 получена моделированием процесса рассеяния конечно-разностным методом. Кривая 2 – результат вычисления “разностного” поля $\delta\varphi_i$ (16) по формулам (13) с использованием конечно-разностного метода для вычисления полей $\vec{\tilde{\varphi}}_i$, $\vec{\varphi}$ (13). Кривая 3 – результат

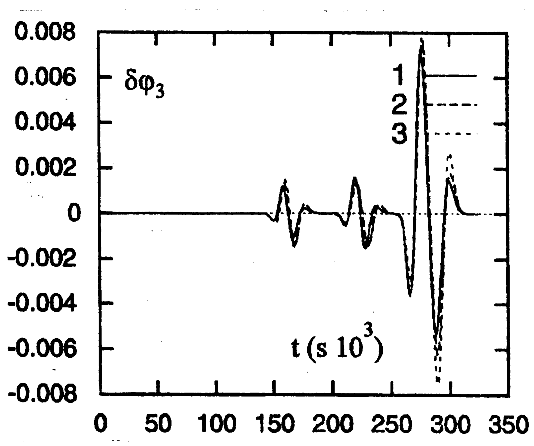

Рис. 9. Рассеянное волновое поле (z-компонента). 1 – конечно-разностный метод; 2 – приближение Борна (волновые поля получены конечно-разностным методом); 3 – приближение Борна (аппроксимация волновых полей нулевым приближением лучевого метода).

вычисления поля $\delta\varphi_i$ (16) по формулам (24) с учетом только нулевых членов лучевого ряда ($j = 0$, (25)).

Следует ожидать, что применение формул (25) для решения обратной сейсмической задачи методом дифракционной томографии (в случае слабонеоднородной опорной среды) даст удовлетворительные результаты при "не слишком малых" расстояниях от источника колебаний и точки наблюдения до исследуемой области пространства. В противном случае необходимо включать в рассмотрение следующие члены лучевого ряда. Формулы (25) можно использовать для оценки информативности схем наблюдения при определении тех или иных параметров среды.

Литература

1. Г. А. Рыжиков, В. Н. Троян, *Томография и обратные задачи дистанционного зондирования*. СПб, 1994.
2. В. Н. Троян, А. П. Крауклис, *Исследование разрешающей способности алгоритма дифракционной томографии*. — Вестн. СПбГУ, серия 4 (2) (1996), 23–30.
3. А. В. Малик, В. Н. Троян, *Численное моделирование восстановления трехмерных упругих неоднородностей методом дифракционной томогра-*

фии. — Вестн. СПбГУ, серия 4(2) (1996), 83–87.

4. В. Н. Троян, Г. А. Рыжиков, *Дифракционная томография: построение и интерпретация томографических функционалов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 176–196.
5. Р. Шерифф, Л. Гелдарт, *Сейсморазведка. Т. 1, 2.* М., 1987.
6. В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич, *Использование методов математический статистики для решения некорректных задач.* — УФН **102, вып. 3** (1970), 345–386.
7. А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 2.* М., 1981.
8. В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырский, *Вычислительные методы. Т. 2.* М., 1977.
9. Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер, *Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1.* М., 1990.
10. K. R. Kelly, R. W. Ward, S. Treitel, R. M. Alford, *Synthetic seismograms: a finite difference approach.* — Geophysics **41,** No. **1** (1976), 2–27.
11. Г. И. Петрашень, Б. М. Каштан, Ю. В. Киселев, *Количественное изучение нестационарных интерференционных волновых полей в слоисто-однородных упругих средах с плоско-параллельными границами раздела. I. Постановка задач и рациональные методы их решения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **214** (1994), 7–186.

Kiselev Yu. V., Troyan V. N. Estimation of accuracy of elastic parameters recovery by diffraction tomography method with the use of finite difference method (SV-problem).

Numerical simulation of the solution of (2-D, SV) inverse problem on recovery of elastic parameters of local ($\sim \lambda$) inhomogeneity by diffraction tomography method based upon the Born approximation is considered. The direct problem is solved by the finite difference method. The satisfactory accuracy for restoration of non-weak contrast inhomogeneities located in piecewise-homogeneous layered medium is obtained by means of nine source-receiver pairs places at free surface. An example of a numerical estimation of the accuracy of the scattering field calculation in Born approximation with approximation of the wave field by zero term of the ray method is considered.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 10 сентября 1997 г.