Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

В. В. Лукьянов

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ВДОЛЬ СЛАБО ИЗОГНУТОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Введение

Процесс распространения волн вдоль пьезоэлектрического стержня исследуется пространственно-лучевым методом. Предполагается, что на расстояниях порядка длины волны свойства среды меняются вдоль стержня слабо.

Как и в [1] энергетические соотношения позволяют получить формулу для амплитуды волны. Получено выражение для фазы волны. Показано, что при распространении волн вдоль пьезоэлектрического стержня возникает аналог фазы Берри.

Методы, используемые в работе, похожи на методы, развитые в [1–9], но специально приспособлены к задаче о распространении волн в пьезоэлектрической среде.

Автор выражает глубокую признательность В. М. Бабичу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

1. Постановка задачи

Рассмотрим волновод, имеющий вид пьезоэлектрического стержня. Все дальнейшие построения будем вести в криволинейной системе координат, естественно связанной со стержнем. Опишем эту систему координат. Пусть внутри стержня есть некоторая выделенная кривая Υ. Первая координата q^1 отсчитывается от фиксированной точки на кривой Υ. Вторая и третья координаты q^2, q^3 отсчитываются соответственно по нормали и бинормали к кривой Υ. Радиус-вектор произвольной точки имеет вид

$$\mathbf{R}\,(q^1, q^2, q^3) = \mathbf{r}(q^1) + q^2\mathbf{n}(q^1) + q^3\mathbf{b}(q^1), \tag{1.1}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r}(q^1)$ при $q^2 = q^3 = 0$ есть уравнение кривой Υ, $\mathbf{n}(q^1)$, $\mathbf{b}(q^1)$ – соответственно нормаль и бинормаль к кривой Υ в точке q^1.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Сороса ISSEP No. s97-1828.

Предположим, что стержень слабо изогнут. Это выражается в том, что уравнение кривой Υ имеет вид

$$\mathbf{r}(q^1) = \frac{\mathbf{r}_0(q^{1'})}{\varepsilon}, \quad q^{1'} = \varepsilon q^1, \tag{1.2}$$

нормаль и бинормаль к кривой Υ слабо меняются вдоль Υ, то есть

$$\mathbf{n}(q^1) = \mathbf{n}_0(q^{1'}), \quad \mathbf{b}(q^1) = \mathbf{b}_0(q^{1'}), \tag{1.3}$$

а пересечение плоскости, перпендикулярной к кривой Υ в точке $(q^{1'}, 0, 0)$, с границей стержня Σ задается уравнением

$$\Phi(q^{1'}, q^2, q^3) = 0. \tag{1.4}$$

Здесь ε малый параметр, а $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{b}_0$ дифференцируемые векторфункции. Границы раздела Σ_r, $r = 1, \ldots, N$ в координатах q^1, q^2, q^3 имеют уравнения

$$\Phi_r(q^{1'}, q^2, q^3) = 0, \quad r = 1, \ldots, N. \tag{1.5}$$

N есть число границ раздела. Мы также будем предполагать, что свойства среды меняются слабо вдоль стержня, то есть компоненты тензора модулей упругости, диэлектрического тензора, пьезоэлектрического тензора и плотности имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} &\lambda^{ijkl} = \lambda^{ijkl}(q^{1'}, q^2, q^3), \quad \varepsilon^{jl} = \varepsilon jl(q^{1'}, q^2, q^3), \\ &e^{jkl} = e^{jkl}(q^{1'}, q^2, q^3), \qquad \rho = \rho(q^{1'}, q^2, q^3). \end{aligned} \tag{1.6}$$

На границах раздела функции ρ, λ^{ijkl}, ε^{jl}, e^{jkl} могут иметь скачки.

Пусть G_{ij} – компоненты метрического тензора в координатах q^1, q^2, q^3. Из (1.2), (1.3) следует, что

$$G_{ij} = \delta_{ij} + f_{ij}(q^{1'})\,\varepsilon + O(\varepsilon^2), \tag{1.7}$$

где $\delta_{ii} = 1$, $i = 1,2,3$; $\delta_{ij} = 0$ $i \neq j$; $f_{11} = -\frac{2q^2}{R}$; $f_{12} = f_{21} = \frac{q^3}{T}$; $f_{13} = f_{31} = -\frac{q^2}{T}$; $f_{ij} = 0$ в остальных случаях. Здесь R, T соответственно радиус кривизны и кручение кривой Υ.

Пусть u^1, u^2, u^3, φ описывают волновое поле, где u^1, u^2, u^3 есть компоненты вектора смещений, а φ – потенциал электрического поля. Уравнения движения пьезоэлектрической среды [10] допускают запись в вариационной форме

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{q} L \, d\Omega \, dt = 0, \tag{1.8}$$

где $L = E_c - E_p$ – лагранжева плотность, $d\Omega = \sqrt{G} \, dq^1 \, dq^2 \, dq^3$ – элемент объема, $G = \det(G_{ij})$,

$$E_c = \frac{\rho}{2} G_{mn} \frac{\partial u^m}{\partial t} \frac{\partial u^n}{\partial t}, \quad E_p = \frac{1}{2} \sigma^{ij} u_{ij} + \frac{1}{8\pi} D^j \frac{\partial \varphi}{\partial q^j}. \tag{1.9}$$

Здесь E_c – кинетическая энергия упругой среды,

$$\sigma^{ij} = \lambda^{ijkl} u_{kl} - e^{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial q^k} \tag{1.10}$$

– тензор деформаций,

$$\mathbf{D} = (D^1, D^2, D^3), \quad D^j = -\varepsilon^{jl} \frac{\partial \varphi}{\partial q^l} - 4\pi e^{jkl} u_{kl} \tag{1.11}$$

– вектор электромагнитной индукции. В [10] выражения для L, σ^{ij}, D^j даны в декартовой системе координат, но здесь они переписаны в координатах q^1, q^2, q^3.

Известно [1, 3], что ковариантные координаты u_{kl} тензора деформаций в криволинейной системе координат q^1, q^2, q^3 имеют вид

$$u_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial G_{kl}}{\partial q^n} u^n + G_{nk} \frac{\partial u^n}{\partial q^l} + G_{nl} \frac{\partial u^n}{\partial q^k} \right). \tag{1.12}$$

Учитывая соотношения (1.8)–(1.11) и вводя обозначение $u^4 = \varphi$, имеем

$$\begin{aligned} \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{q} L \, d\Omega \, dt = \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{q} \Big(\frac{1}{2} A^{00}_{mn} \frac{\partial u^m}{\partial t} \frac{\partial u^n}{\partial t} + \frac{1}{2} A^{jl}_{mn} \frac{\partial u^m}{\partial q^j} \frac{\partial u^n}{\partial q^l} + \\ + A^j_{mn} \frac{\partial u^m}{\partial q^j} u^n + \frac{1}{2} A_{mn} u^m u^n \Big) \, dq \, dt, \end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$\begin{aligned} &A^{00}_{mn} = \rho G_{mn}\sqrt{G}, \quad A^{jl}_{mn} = -\lambda^{ijkl}\, G_{mi}\, G_{nk}\, \sqrt{G}, \\ &A^{jl}_{4n} = A^{lj}_{n4} = e^{jkl}\, G_{nk}\, \sqrt{G}, \quad A^{jl}_{44} = \frac{1}{4\pi}\, \varepsilon^{jl}\, \sqrt{G}, \\ &A^{j}_{mn} = -\frac{1}{2}\lambda^{ijkl}\, G_{mi}\, \frac{\partial G_{kl}}{\partial q^n}\sqrt{G}, \quad A^{j}_{4n} = \frac{1}{2}e^{jkl}\frac{\partial G_{kl}}{\partial q^n}\sqrt{G}, \\ &A_{mn} = -\frac{1}{4}\lambda^{ijkl}\, \frac{\partial G_{ij}}{\partial q^m}\, \frac{\partial G_{kl}}{\partial q^n}\sqrt{G}, \quad m,n,j,l = 1,2,3 \end{aligned} \tag{1.14}$$

и $A^{jl}_{mn} = 0$, $A^{j}_{mn} = 0$, $A_{mn} = 0$ для других значений индексов $(m,n = 1,2,3,4,\ j,l = 1,2,3)$. Уравнения движения пьезоэлектрической среды есть уравнения Эйлера для функционала (1.13)

$$A^{00}_{mn}\frac{\partial^2 u^n}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial q^j}\left(A^{jl}_{mn}\,\frac{\partial u^n}{\partial q^l} + A^{j}_{mn}\, u^n\right) - A^{j}_{nm}\,\frac{\partial u^n}{\partial q^j} - A_{mn}\, u^n = 0. \tag{1.15}$$

На поверхности стержня выполняется условие свободной границы, которое является естественным граничным условием для функционала (1.13)

$$\left(A^{jl}_{mn}\,\frac{\partial u^n}{\partial q^l} + A^{j}_{mn}\, u^n\right)\frac{\partial \Phi}{\partial q^j} = 0, \quad m = 1,2,3. \tag{1.16}$$

Предполагается также, что потенциал электрического поля равен нулю на поверхности стержня

$$u^4 = 0. \tag{1.17}$$

На границах раздела выполняется условие жесткого контакта, которое означает, что координаты вектора смещений и потенциал электрического поля непрерывны на границах раздела

$$[\,u^n\,] = 0, \quad n = 1,2,3,4, \tag{1.18}$$

и скачки координат вектора поверхностных сил равны нулю. Если выполняются равенства (1.18), то последнее условие есть естественное граничное условие для функционала (1.13)

$$\left[\,A^{jl}_{mn}\,\frac{\partial u^n}{\partial q^l} + A^{j}_{mn}\, u^n\,\right]\frac{\partial \Phi_r}{\partial q^j} = 0. \tag{1.19}$$

2. Уравнение эйконала и переноса

Решение уравнений (1.15) с граничными условиями (1.16)–(1.19) будем искать в виде

$$u^n = e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta(t',q^{1'})} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} U_p^n\,(t', q^{1'}, q^2, q^3)(i\varepsilon)^p, \quad n = 1,2,3,4, \tag{2.1}$$

где $t' = \varepsilon t$, $q^{1'} = \varepsilon q^1$. Разлагая выражение (2.1) в ряд по степеням ε в окрестности точки $(t'_0, q_0^{1'})$, получим в первом приближении плоскую волну

$$u^n = U_0^n\,(t'_0, q_0^{1'}, q^2, q^3) \cdot e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta(t'_0,q_0^{1'})} \cdot e^{-i\omega(t-t_0)+ik_q(q^1-q_0^1)}, \tag{2.2}$$

где $\omega = -\frac{\partial\theta}{\partial t'}$, $k_1 = -\frac{\partial\theta}{\partial q^{1'}}$, при $t' = t'_0$, $q^{1'} = q_0^{1'}$.

Разлагая коэффициенты A_{mn}^{00}, A_{mn}^{jl}, A_{mn}^{j}, A_{mn} по степеням ε, получим

$$\begin{aligned} &A_{mn}^{00} = a_{mn}^{00} + \varepsilon\, b_{mn}^{00} + O(\varepsilon^2), \quad && A_{mn}^{jl} = a_{mn}^{jl} + \varepsilon\, b_{mn}^{jl} + O(\varepsilon^2),\\ &A_{mn}^{j} = \varepsilon\, b_{mn}^{j} + O(\varepsilon^2), && A_{mn} = O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$\begin{aligned} &a_{mn}^{00} = \rho\delta_{mn}, \quad b_{mn}^{00} = \rho\big(\delta_{mn} f + f_{mn}\big), \quad f = -\frac{q^2}{R},\\ &a_{mn}^{jl} = -\lambda^{ijkl}\,\delta_{mi}\delta_{nk}, \quad b_{mn}^{jl} = -\lambda^{ijkl}\left(\delta_{mi}\,\delta_{nk}\,f + \delta_{mi}\,f_{nk} + f_{mi}\delta_{nk}\right),\\ &a_{4n}^{jl} = a_{n4}^{lj} = e^{jkl}\,\delta_{nk}, \quad b_{4n}^{jl} = b_{n4}^{lj} = e^{jkl}\big(\delta_{nk}\,f + f_{nk}\big),\\ &a_{44}^{jl} = \frac{1}{4\pi}\,\varepsilon^{jl}, \quad b_{44}^{jl} = \frac{1}{4\pi}\,\varepsilon^{jl}\,f,\\ &b_{m1}^{j} = 0, \quad b_{m2}^{j} = \lambda^{ij11}\,\delta_{mi}\,\frac{1}{R} + \lambda^{ij13}\frac{1}{T}, \quad b_{m3}^{j} = \lambda^{ij12}\,\delta_{mi}\,\frac{1}{T},\\ &b_{41}^{j} = 0, \quad b_{42}^{j} = -\frac{e^{j11}}{R} - \frac{e^{j13}}{T}, \quad b_{43}^{j} = -\frac{e^{j12}}{T}, \quad m,n,j,l = 1,2,3. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Подставляя выражение (2.1) в (1.16) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим рекуррентную систему уравнений

$$\begin{gathered} W_0\mathbf{U}_p + W_1\mathbf{U}_{p-1} + W_2\mathbf{U}_{p-2} = 0,\\ \mathbf{U}_p = \big(U_p^1, U_p^2, U_p^3, U_p^4\big), \quad p = 0,1,2,\ldots, \quad \mathbf{U}_{-1} = \mathbf{U}_{-2} = 0, \end{gathered} \tag{2.5}$$

где W_0, W_1, W_2 – дифференциальные операторы по переменным t', $q^{1'}$, q^2, q^3

$$(W_0\mathbf{U})_m = -a^{00}_{mn}\,\theta_0^2\,U^n - d_j\big(a^{jl}_{mn}\,d_l\,U^n\big), \quad m=1,2,3,$$

$$(W_1\mathbf{U})_m = a^{00}_{mn}\,\theta_0\,\frac{\partial U^n}{\partial t'} + a^{00}_{mn}\,\frac{\partial}{\partial t'}(\theta_0\,U^n) + \frac{\partial}{\partial q^{1'}}\big(a^{1l}_{mn}\,d_l\,U^n\big) +$$

$$+ d_j\left(a^{j1}_{mn}\,\frac{\partial U^n}{\partial q^{1'}}\right) + ib^{00}_{mn}\,\theta_0^2\,U^n + id_j\,\big(b^{jl}_{mn}\,d_l\,U^n\big) + d_j\,\big(b^{j}_{mn}\,U^n\big) - b^{j}_{nm}\,d_j\,U^n,$$

$$m=1,2,3, \quad (W_0\mathbf{U})_4 = (W_1\mathbf{U})_4 = 0,$$

где $\mathbf{U} = (U^1, U^2, U^3, U^4)$, $\theta_0 = \frac{\partial\theta}{\partial t'}$, $\theta_1 = \frac{\partial U^n}{\partial q^{1'}}$ (выражение для оператора W_2 не выписывается, так как оно не используется в дальнейшем).

$$d_j = \begin{cases} \theta_1, & j=1, \\ \dfrac{1}{i}\,\dfrac{d}{dq^j}, & j=2,3. \end{cases} \tag{2.6}$$

Подставляя выражение (2.1) в (1.6), (1.19) и приравнивая коэффициенты при одинаковых ε, получим

$$w_0\mathbf{U}_p + w_1\,\mathbf{U}_{p-1} + w_2\,\mathbf{U}_{p-2} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\big[\,w_0\,\mathbf{U}_p + w_1\,\mathbf{U}_{p-1} + w_2\,\mathbf{U}_{p-2}\big] = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma_r, \\ r=1,\dots,N, \quad p=0,1,2,\dots,\end{gathered} \tag{2.8}$$

где

$$(w_0\mathbf{U})_m = a^{\alpha l}_{mn}\,id_l\,U^m\,\frac{\partial\Phi_r}{\partial q^\alpha},$$

$$(w_1\mathbf{U})_m = -ia^{\alpha 1}_{mn}\,\frac{\partial U^n}{\partial q^{1'}}\,\frac{\partial\Phi_r}{\partial q^\alpha} + b^{\alpha l}_{mn}\,d_l\,U^n\,\frac{\partial\Phi_r}{\partial q^\alpha} -$$

$$-ib^{\alpha}_{mn}\,U^n\,\frac{\partial\Phi_r}{\partial q^\alpha} + a^{1l}_{mn}\,d_l\,U^n\,\frac{\partial\Phi_r}{\partial q^{1'}},$$

$m=1,2,3,4$ (выражение для оператора w_2 не выписывается, так как оно не используется в дальнейшем).

3. Сведение уравнения эйконала к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Полагая $p = 0$ в (2.5), (2.7), (2.8), получим

$$\begin{cases} W_0\mathbf{U}_0 = 0, \\ (w_0\mathbf{U}_0)_m = 0, \quad U_0^4 = 0 \quad \text{на } \Sigma, \\ [w_0\mathbf{U}_0] = 0, \quad [\mathbf{U}_0] = 0 \quad \text{на } \Sigma_r, \quad r = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{3.1}$$

Задача (3.1) есть двумерная краевая задача, зависящая от $q^{1'}$ как от параметра, так как операторы W_0, w_0 содержат производные только по переменным q^2, q^3. При фиксированных θ_1, $q^{1'}$ получим задачу (3.1) на отыскание собственной вектор-функции $\mathbf{U}_0$. θ_0^2 играет роль собственного числа. Нетрудно доказать, что задача (3.1) является самосопряженной, а оператор положительно определенным. Следовательно $\theta_0^2 > 0$. Предположим, что собственное число θ_0 однократно и гладко зависит от $q^{1'}$, θ_1. В дальнейшем будем считать, что $\theta_0 < 0$. Таким образом мы можем написать

$$\theta_0 = -H(\theta_1, q^{1'}), \tag{3.2}$$

где H есть дифференцируемая положительная функция. Равенство (3.2) есть уравнение в частных производных относительно эйконала θ. По форме оно является классическим уравнением Гамильтона–Якоби. Известно, что его можно решить, если задано начальное значение

$$\theta\big|_{t'=0} = \theta^0(q^{1'}). \tag{3.3}$$

Начальное условие (3.3) определяет $\theta\big|_{t'=0}$. Для того чтобы найти решение уравнения (3.2) с начальным условием (3.3), необходимо проинтегрировать характеристическую систему

$$\begin{gathered} \frac{dt'}{ds} = 1, \quad \frac{dq^{1'}}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \theta_1}, \quad \frac{d\theta_0}{ds} = 0, \\ \frac{d\theta_1}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q^{1'}}, \quad \frac{d\theta}{ds} = -H + \frac{\partial H}{\partial \theta_1} \end{gathered} \tag{3.4}$$

с начальными данными

$$t'\big|_{s=0} = 0, \quad q^{1'}\big|_{s=0} = \gamma^1, \quad \theta\big|_{s=0} = \theta^0(\gamma^1), \quad \theta_1\big|_{s=0} = \theta_1^0(\gamma^1). \tag{3.5}$$

Задача Коши (3.4), (3.5) определяет кривую в пространстве-времени t', $q^{1'}$

$$t' = s, \quad q^{1'} = q^{1'}(s, \gamma^1) \tag{3.6}$$

(γ^1 фиксировано). Эту кривую мы будем называть пространственно-временным лучом. Вектор $\mathbf{V}$ с контравариантной компонентой

$$V^1 = \frac{\partial H}{\partial \theta_1} \tag{3.7}$$

называется групповой скоростью. В пространстве $q^{1'}$, q^2, q^3 вектор групповой скорости имеет компоненты $(V^1, 0, 0)$. Равенство (3.6) определяет криволинейную систему координат s, γ^1. Пространственно-временной луч характеризуется параметром γ^1, а точка на луче характеризуется параметром s. Предположим, что криволинейная система координат s, γ^1 регулярна. Эта система координат есть аналог лагранжевых координат в гидродинамике и будет использована при решении уравнений переноса.

4. Первое гидродинамическое равенство

Далее нам потребуется несколько равенств, связанных с усреднением. Первое равенство, которое будет использовано в дальнейшем, имеет вид

$$\iint\limits_{\Pi} \langle L \rangle \, dq^2 \, dq^3 = 0, \tag{4.1}$$

где Π поперечное сечение стержня, а $\langle \ldots \rangle$ означает усреднение соответствующей величины. Про усреднение см. [1]. Справедливость равенства (4.1) устанавливается теми же методами, что и в [4, 6].

Для того чтобы получить следующее равенство, умножим (1.15) на $\frac{\partial u^m}{\partial t}$ и просуммируем по m ($m = 1, 2, 3, 4$). После преобразований получим

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = 0, \tag{4.2}$$

где

$$E = E_c + E_p \tag{4.3}$$

– плотность энергии, а

$$\mathbf{S} = (S^1, S^2, S^3), \quad S^i = -\sigma^{ij}\,\frac{\partial u^n}{\partial t}\,G_{jn} - \frac{1}{4\pi}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}\,D^j \tag{4.4}$$

– вектор потока энергии.

Подставив вещественную часть плоской волны (2.2) в (4.3), (4.4), оставим только главные по ε члены. Будем иметь

$$\iint\limits_{\Pi} \langle\, E\,\rangle\, dq^2\, dq^3 = \frac{\theta_0^2}{2} \iint\limits_{\Pi} a_{mn}^{00}\, U_0^n\, \overline{U_0^m}\, dq^2\, dq^3, \tag{4.5}$$

$$\iint\limits_{\Pi} \langle\, S^i\,\rangle dq^2\, dq^3 = \frac{\theta_0}{2}\,\mathrm{Re} \iint\limits_{\Pi} a_{mn}^{il}\, d_l U_0^n \overline{U_0^m} dq^2 dq^3. \tag{4.6}$$

Дифференцируя (4.1) по θ_1, получим

$$\iint\limits_{\Pi} \langle\, \mathbf{S}\,\rangle\, dq^2\, dq^3 = \mathbf{V} \iint\limits_{\Pi} \langle\, E\,\rangle\, dq^2\, dq^3, \tag{4.7}$$

где $\mathbf{V} = (V^1, 0, 0)$ есть групповая скорость. Это равенство назовем первым гидродинамическим равенством. Оно будет использовано при интегрировании уравнений переноса.

5. Решение уравнений переноса

Полагая $p = 1$ в (2.5), (2.7), (2.8), получим неоднородную краевую задачу для нахождения $\mathbf{U}_1$

$$\begin{cases} W_0\mathbf{U}_1 = -W_1\,\mathbf{U}_0, & \\ (w_1\mathbf{U}_1)_m = -(w_0\,\mathbf{U}_0)_m, \quad U_1^4 = 0 & \text{на } \ \Sigma, \\ [w_1\mathbf{U}_1] = -[w_0\,\mathbf{U}_0], \qquad [\mathbf{U}_1] = 0 & \text{на } \ \Sigma_r, \quad r = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{5.1}$$

Соответствующая однородная задача (3.1) имеет нетривиальное решение $\mathbf{U}_0$. Хорошо известно, что решение неоднородной задачм существует тогда и только тогда, когда выполняются некоторые соотношения ортогональности. Они налагают ограничения на $\mathbf{U}_0$ и дают связь между фазой θ и амплитудой $\mathbf{U}_0$. Опишем как получить это соотношение. Умножим первое равенство в (5.1) на $\overline{U_0^m}$ и проинтегрируем по поперечному сечению стержня Π (напомним, что положение поперечного сечения стержня определяет значение $q^{1'}$, т.е. $\Pi = \Pi(q^{1'})$)

$$\iint\limits_{\Pi} (W_0\,\mathbf{U}_0)_m\, \overline{U_0^m}\, dq^2\, dq^3 = -\iint\limits_{\Pi} (W_1\,\mathbf{U}_0)_m\, \overline{U_0^m}\, dq^2\, dq^3. \tag{5.2}$$

Интегрируя по частям и учитывая граничные условия из (3.1), (5.1), получим (здесь опущены довольно громоздкие выкладки)

$$\frac{\partial}{\partial t'}\iint\limits_{\Pi} a^{00}_{mn}\,\theta_0\,U^n_0\,\overline{U^m_0}\,dq^2\,dq^3+\frac{\partial}{\partial q^{1'}}\iint\limits_{\Pi} a^{1l}_{mn}\,d_l\,U^n_0\,\overline{U^m_0}\,dq^2\,dq^3+$$
$$+i\iint\limits_{\Pi}\Bigg(\mathrm{Im}\left(2a^{00}_{mn}\,\theta_0\frac{\partial U^n_0}{\partial t'}\overline{U^m_0}\right)+\mathrm{Im}\left(2a^{j1}_{mn}\,\frac{\partial U^n_0}{\partial q^{1'}}\overline{d_j\,U^m_0}\right)+$$
$$+b^{00}_{mn}\,\theta^2_0\,U^n_0\,\overline{U^m_0}+b^{jl}_{mn}\,d_l\,U^n_0\,\overline{d_j\,U^m_0}+$$
$$+\mathrm{Im}\left(2b^j_{mn}\,U^n_0\,\overline{d_j\,U^m_0}\right)\Bigg)\,dq^2\,dq^3=0. \tag{5.3}$$

Формула (5.3) и есть условие разрешимости неоднородной краевой задачи (5.1). Это означает, что если равенство (5.3) выполнено, то задача (5.1) разрешима.

Пусть $\mathbf{U}_{00}$ – фиксированное решение однородной краевой задачи (3.1). Тогда общее решение этой задачи имеет вид

$$\mathbf{U}_0\left(t',q^{1'},q^2,q^3\right)=\psi_0\left(t',q^{1'}\right)\mathbf{U}_{00}\left(t',q^{1'},q^2,q^3\right). \tag{5.4}$$

Найдем такое ψ_0, чтобы $\mathbf{U}_0$ удовлетворяло равенству (5.3). При этом неоднородная задача (5.1) будет разрешима.

Выделяя вещественную часть (5.3) и учитывая (4.5)–(4.6), получим

$$\frac{\partial}{\partial t'}\Bigg(\iint\limits_{\Pi}\langle\,E\,\rangle\,dq^2\,dq^3\Bigg)+\frac{\partial}{\partial q^{1'}}\Bigg(\iint\limits_{\Pi}\langle\,S^1\,\rangle\,dq^2\,dq^3\Bigg)=0. \tag{5.5}$$

Равенство (5.5) будем называть вторым гидродинамическим тождеством. Оно имеет вид гидродинамического уравнения неразрывности. С учетом равенства (4.7) запишем его в лагранжевых координатах s, γ_1, которые определены равенством (3.6)

$$\Bigg(\iint\limits_{\Pi}\langle\,E\,\rangle\,dq^2\,dq^3\Bigg)_{X_0}=\Bigg(\iint\limits_{\Pi}\langle\,E\,\rangle\,dq^2\,dq^3\,\frac{dq^{1'}}{d\gamma^1}\Bigg)_X. \tag{5.6}$$

Здесь точки X_0, X принадлежат одному и тому же пространственно-временному лучу. Подстановка (5.4) в (5.6) дает

$$|\,\psi_0(t',q^{1'})\,|=\frac{\chi_0(\gamma^1)}{\sqrt{\iint\limits_{\Pi}\langle\,E_{00}\,\rangle\,dq^2\,dq^3\,\sqrt{J}}},\quad J=\frac{dq^{1'}}{d\gamma^1}, \tag{5.7}$$

где функция $\chi_0(\gamma^1)$ зависит только от пространственно-временного луча, E_{00} – плотность энергии, соответствующая решению $\mathbf{U}_{00}$.

Подставляя $\psi_0 = |\psi_0| e^{i\tau}$ в (5.3), сокращая на $e^{i\tau}$ и выделяя мнимую часть, получим

$$\tau = \tau_0 - \frac{\theta_0}{4} \int\limits_0^s \frac{\operatorname{Im} Q}{\iint\limits_{\Pi} \langle\, E_{00}\, \rangle \, dq^2\, dq^3}\, ds, \tag{5.8}$$

где

$$Q = \frac{\partial}{\partial t'} \iint\limits_{\Pi} a^{00}_{mn}\, \theta_0\, U^n_{00}\, \overline{U^m_{00}}\, dq^2\, dq^3 + \frac{\partial}{\partial q^{1'}} \iint\limits_{\Pi} a^{1l}_{mn}\, d_l\, U^n_{00}\, \overline{U^m_{00}}\, dq^2\, dq^3 +$$
$$+ i \iint\limits_{\Pi} \Bigg(\operatorname{Im}\left(2a^{00}_{mn}\, \theta_0 \frac{\partial U^n_{00}}{\partial t'} \overline{U^m_{00}} \right) + \operatorname{Im}\left(2a^{j1}_{mn}\, \frac{\partial U^n_{00}}{\partial q^{1'}} \overline{d_j\, U^m_{00}} \right) +$$
$$+ b^{00}_{mn}\, \theta_0^2\, U^n_{00}\, \overline{U^m_{00}} + b^{jl}_{mn}\, d_l\, U^n_{00}\, \overline{d_j\, U^m_{00}} +$$
$$+ \operatorname{Im}\left(2b^j_{mn}\, U^n_{00}\, \overline{d_j\, U^m_{00}} \right) \Bigg)\, dq^2\, dq^3. \tag{5.9}$$

В соответствии с работой [8] интеграл, входящий в (5.8), можно назвать фазой Берри.

Таким образом, получаем окончательный результат

$$\mathbf{u} = e^{\frac{i}{\varepsilon}\theta} \mid \psi_0 \mid e^{i\tau}\, \mathbf{U}_{00} + O(\varepsilon), \tag{5.10}$$

где эйконал θ определяется задачей Коши (3.6)–(3.7), $\mid \psi_0 \mid$ и τ – равенствами (5.7), (5.8).

Литература

1. В. М. Бабич, *О распространении волн вдоль слабо неоднородного в горизонтальном направлении и слабо изогнутого анизотропного упругого слоя.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 12–32.
2. В. М. Бабич, Б. А. Чихачев, *Распространение волн Лява и Релея в слабонеоднородной слоистой среде.* — Вестн. ЛГУ **No. 1** (1975), 2–7.
3. В. М. Бабич, Б. А. Чихачев, Т. Б. Яновская, *Поверхностные волны в вертикально-неоднородном упругом полупространстве со слабой горизонтальной неоднородностью.* — Изв. АН СССР, Физика Земли **4** (1976), 24–31.

4. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны.* Изд. ЛГУ, Л., 1985, 270 с.
5. В. М. Бабич, Н. С. Григорьева, *Пространственно-временной лучевой метод в слабо неоднородной слоистой среде.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **99** (1980), 5–18.
6. F. P. Bretherton, *Propagation in slowly varying waveguides.* — Proc. Roy. Soc. **A. 302** (1968), 555–576.
7. J. Tromp, F. A. Dahlen, *Surface wave propagation in slowly varying anisotropic waveguide.* — Geophys. J. Int. **113** (1993), 239–249.
8. J. Tromp, F. A. Dahlen, *The Berry phase of a slowly varying waveguide.* — Proc. R. Soc. Lond. **A. 437** (1992), 329–342.
9. J. H. Woodhouse, *Surface waves in laterally varying layered structures.* — Geophys. J. R. Astr. Soc. **37** (1974), 461–490.
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред.* М., 1982, 620 с.

Lukynov V. V. Propagation of waves along a slowly bent piezoelectric rod.

The waveguide modes of a curved piezoelectric rod are considered. The propagation of the waves along the rod is studied by the ray method. The transport equations, which describe change of the intensity along the rays, are solved.

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 16 октября 1997 г.