Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

В. В. Лукьянов, А. И. Назаров

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВЕНТЦЕЛЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА И ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ПОМОЩЬЮ ПОВТОРНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Граничное условие Вентцеля для эллиптических уравнений второго порядка впервые было поставлено в работе [1] при исследовании задач диффузии. Это условие представляет собой задание на границе области эллиптического оператора по касательным переменным в комбинации с нормальной производной. Рассмотрим простейшую механическую задачу, в которой возникает это условие.

Пусть упругая изотропная мембрана совершает малые вертикальные колебания, причем край ее прошит кордом (струной), которая, в свою очередь, может колебаться в вертикальном направлении. Пользуясь принципом Гамильтона–Остроградского, легко вывести, что стандартное уравнение колебаний

$$\rho(x)u_{tt} - \operatorname{div}(T(x)\nabla u) = f(x,t) \tag{0.1}$$

будет сопровождаться таким граничным условием:

$$\rho_1(x)u_{tt} - \frac{\partial}{\partial\tau}\left(T_1(x)\frac{\partial u}{\partial\tau}\right) + T(x)\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}} = f_1(x,t). \tag{0.2}$$

Здесь ρ и ρ_1 – соответственно, поверхностная плотность мембраны и линейная плотность струны; T и T_1 – их коэффициенты натяжения; f и f_1 – плотности распределения приложенных к ним внешних сил; τ и $\mathbf{n}$ – соответственно, касательное и нормальное направление на границе области.

В случае однородных мембраны и струны рассмотрение статической задачи (0.1)–(0.2) приводит к задаче Вентцеля для уравнения Лапласа, а рассмотрение стационарной задачи – к соответствующей задаче для уравнения Гельмгольца.

Работа поддержана федеральной целевой программой “Интеграция” 326.53.

В настоящее время исследованию задачи Вентцеля для линейных и нелинейных уравнений посвящено уже немало работ (частичный исторический обзор см. [2, 3]). В этих работах используется общая техника решения эллиптических задач в пространствах Гельдера и Соболева. Желание получить решение задачи при непрерывных граничных данных приводит к идее использования интегральных уравнений теории потенциала.

Статья разделена на четыре параграфа. В §1 дается постановка внутренней и внешней задачи Вентцеля и доказываются теоремы единственности для них, а также необходимые условия разрешимости. В §2 изучаются свойства повторных потенциалов простого и двойного слоя. В §3 задачи $(\mathcal{W}_i)$ и $(\mathcal{W}_e)$ сводятся к интегральным уравнениям, после чего доказывается их разрешимость. §4 посвящен применению повторных потенциалов к решению других краевых задач с граничными условиями высокого порядка.

Обозначения.

S – замкнутая гладкая поверхность в $\mathbf{R}^m$ (в §§2 и 3 мы считаем, что $S \in C^2$); $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S; Ω_i – область, ограниченная поверхностью S; $\Omega_e = \mathbf{R}^m \setminus \overline{\Omega_i}$; S_δ – параллельная поверхность к S; Ω_δ – область, ограниченная поверхностью S_δ; $\chi_m = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2})}$ – площадь единичной сферы в $\mathbf{R}^m$; $B_R(x)$ – шар радиуса R с центром в точке x; $B_R = B_R(0)$.

$G_k(x)$ – фундаментальное решение оператора $-(\Delta + k^2)$, $k \geqslant 0$:

$$-(\Delta + k^2)G_k = \delta(x), \qquad G_k = G_k(|x|),$$

удовлетворяющее условию излучения на бесконечности. Мы используем следующие обозначения для потенциалов простого и двойного слоя:

$$V_k^\mu(x) = \int\limits_S \mu(y) G_k(x-y) dS_y, \qquad W_k^\mu(x) = \int\limits_S \mu(y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} G_k(x-y) dS_y.$$

Повторными потенциалами простого и двойного слоя будем называть соответственно функции

$$V_{k_1,k_2}^\mu(x) = V_{k_1}^{V_{k_2}^\mu}(x), \qquad W_{k_1,k_2}^\mu(x) = W_{k_1}^{V_{k_2}^\mu}(x).$$

В случае, когда нам безразличны значения k_1 и k_2, мы будем обозначать повторные потенциалы просто $V^{\mu}_{(2)}$, $W^{\mu}_{(2)}$.

$\tilde{\Delta}$ – оператор Бельтрами на поверхности S:

$$\tilde{\Delta}u = \Delta u\big|_S - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}\left(\sqrt{g}\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right),$$

где g – определитель метрического тензора поверхности S. Поскольку далее будут рассматриваться функции, недостаточно гладкие в $\overline{\Omega}$ ($\Omega = \Omega_i$ или $\Omega = \Omega_e$), введем понятие правильного оператора Бельтрами на S (аналогичное понятию правильной нормальной производной). Пусть $u \in C^2(\Omega_i) \cap C^1(\overline{\Omega}_i)$. Если существует равномерный предел

$$\lim_{\delta\to 0} \tilde{\Delta}u(x - \delta\mathbf{n}_x), \quad x \in S,$$

(здесь под знаком предела стоит оператор Бельтрами на поверхности S_δ), то этот предел мы будем называть значением внутреннего правильного оператора Бельтрами от функции u на S и обозначать $\tilde{\Delta}_i u$. Аналогично вводится внешний правильный оператор Бельтрами, который обозначим $\tilde{\Delta}_e u$.

§1. Постановка задачи

Требуется найти функцию $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ($\Omega = \Omega_i$ или $\Omega = \Omega_e$), удовлетворяющую уравнению Гельмгольца (при $k = 0$ – уравнению Лапласа)

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{1.1}$$

имеющую на S правильный оператор Бельтрами и удовлетворяющую граничному условию: для $\Omega = \Omega_i$

$$\tilde{\Delta}_i u - \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_i + \beta k^2 u = f \text{ на } S,\ \alpha,\beta \in \mathbf{R}_+,\ f \in C(S), \tag{1.2}$$

для $\Omega = \Omega_e$

$$\tilde{\Delta}_e u + \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_i + \beta k^2 u = f \text{ на } S,\ \alpha,\beta \in \mathbf{R}_+,\ f \in C(S). \tag{1.3}$$

В случае $\Omega = \Omega_e$ налагаются дополнительные условия на бесконечности (условия излучения): при $|x| \to \infty$

$$u(x) = O\left(|x|^{\frac{1-m}{2}}\right),\ \ \frac{\partial u(x)}{\partial |x|} + iku(x) = o\left(|x|^{\frac{1-m}{2}}\right),\ \ k > 0;$$

$$u(x) = O\left(|x|^{2-m}\right), \quad k = 0. \tag{1.4}$$

Задачу для $\Omega = \Omega_i$, $\Omega = \Omega_e$ будем называть соответственно внутренней и внешней задачей Вентцеля и обозначать $(\mathcal{W}_i)$, $(\mathcal{W}_e)$.

Лемма 1.1. *Однородная задача $(\mathcal{W}_e)$ имеет только нулевое решение. Исключением является случай $m = 2$, $k = 0$. В этом случае $u = \mathrm{const}$ – решение однородной задачи $(\mathcal{W}_e)$, а необходимым условием разрешимости задачи* (1.1), (1.3), (1.4) *будет условие*

$$\int\limits_S f\, dS = 0. \tag{1.5}$$

Доказательство аналогично теореме единственности для задач Дирихле и Неймана ([4], п. 131).

Лемма 1.2. *Однородная задача $(\mathcal{W}_i)$ имеет только тривиальное решение при всех $k^2 \in \overline{\mathbf{R}_+} \setminus \sigma$, где $\sigma = \{k_0^2 = 0 < k_1^2 < k_2^2 < \dots\}$ – счетное множество с единственной предельной точкой $+\infty$. Множество σ назовем спектром задачи $(\mathcal{W}_i)$.*

При $k^2 \in \sigma$ однородная задача $(\mathcal{W}_i)$ имеет конечное число линейно независимых решений $\{v_p\}$, $p = 1, \dots, l$ (в частности, при $k = 0$ – одно решение $u = \mathrm{const}$). В этом случае необходимое условие разрешимости задачи (1.1), (1.2)*:*

$$\int\limits_S f\, v_p\, dS = 0, \quad p = 1, \dots, l. \tag{1.6}$$

Доказательство. Введем в пространстве $\mathbf{H} = L_2(\Omega_i) \times L_2(S)$ скалярное произведение

$$((u_1, u_2), (v_1, v_2)) = \int\limits_{\Omega_i} u_1 \overline{v_1} \partial\Omega + \frac{\beta}{\alpha} \int\limits_S u_2 \overline{v_2}\, dS.$$

Пусть оператор $\mathcal{A}$ с областью определения

$$D(\mathcal{A}) = \{w = (u_1, u_2) : \ u_1 \in C^2(\overline{\Omega_i}), \ u_2 = u_1\big|_S\}$$

действует по следующему правилу:

$$\mathcal{A}w = \left(-\Delta u_1, -\frac{1}{\beta}\tilde{\Delta} u_2 + \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}}\right)\Big|_S\right).$$

Тогда σ совпадает с точечным спектром оператора $\mathcal{A}$.

Интегрируя по частям, получаем, что оператор $\mathcal{A}$ неотрицательно определен, причем $\mathcal{A}w = 0 \iff w = \mathrm{const}$. Далее, пространство $\mathbf{H}_\mathcal{A}$ совпадает с пространством

$$\{(u_1, u_2) \in W_2^1(\Omega_i) \times W_2^1(S),\ u_1\big|_S = u_2\}$$

(нормы эквивалентны). Поскольку $\mathbf{H}_\mathcal{A}$ компактно вложено в $\mathbf{H}$, то из ([5], гл. 5) следует дискретность спектра оператора $\mathcal{A}$.

Пример. Рассмотрим задачу $(\mathcal{W}_i)$ в случае, когда S – сфера радиуса R. Тогда собственные числа и собственные функции имеют вид

$$k_{nl}^2 = \frac{\xi_{nl}^2}{R^2}, \quad v_{pnl} = r^{-\frac{m-2}{2}} J_{n+\frac{m-2}{2}}\left(\xi_{nl}\frac{r}{R}\right) Y_{n,m}^p(\Theta),$$

где $Y_{n,m}^p(\Theta)$ – сферические функции порядка n, J_ν – функция Бесселя первого рода порядка ν, а ξ_{nl} – корни трансцендентного уравнения

$$\alpha\xi R J'_{n+\frac{m-2}{2}}(\xi) + \left(n(n+m-2) - \alpha\frac{(m-2)}{2}R - \beta\xi^2\right) J_{n+\frac{m-2}{2}}(\xi) = 0.$$

§2. Свойства повторных потенциалов

Лемма 2.1. *Если $\mu \in C(S)$, то повторный потенциал $W_{(2)}^\mu$ имеет правильную внутреннюю и внешнюю нормальную производную, причем*

$$\left(\frac{\partial W_{(2)}^\mu}{\partial \mathbf{n}_x}\right)_{i.e}(x) = -\frac{1}{4}\mu(x) + (P_{i,e}\mu)(x), \quad x \in S,$$

где $P_{i,e}$ – операторы со слабой особенностью на S.

Замечание. Поскольку функция $G_k(x)$ имеет одинаковые особенности в нуле при всех k, то эту лемму, так же как и следующую, достаточно доказать при $k_1 = k_2 = 0$.

Доказательство. Пусть $x' \in \Omega_i$. Обозначим $\rho(y) = V_0^\mu(y)$. Тогда по формуле Грина

$$\int\limits_{S_\delta} \rho(y)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} G_0(x'-y)dS_y = -\rho(x') + \int\limits_{S_\delta} G_0(x'-y)\frac{\partial\rho(y)}{\partial \mathbf{n}_y}\, dS_y.$$

Устремляя δ к нулю, получаем

$$W_0^\rho(x') = -\rho(x') + \int\limits_S G_0(x'-y)\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{n}_y}\right)_i (y)\, dS_y. \qquad (2.1)$$

Учитывая соотношение

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mathbf{n}_y}\right)_i (y) = \frac{1}{2}\,\mu(y) + \frac{\partial V_0^\mu(y)}{\partial\mathbf{n}_y}, \quad y \in S$$

(последнее слагаемое понимается в смысле прямого значения), равенство (2.1) можно переписать в виде

$$W_{0,0}^\mu(x') = -\frac{1}{2}\,V_0^\mu(x') + V_0^{\frac{\partial V_0^\mu}{\partial\mathbf{n}}}(x'). \qquad (2.2)$$

Так как все слагаемые в правой части равенства (2.2) имеют правильную внутреннюю нормальную производную, то существует и правильная внутренняя нормальная производная повтороного потенциала $W_{0,0}^\mu$, причем

$$\left(\frac{\partial W_{0,0}^\mu}{\partial\mathbf{n}_x}\right)_i (x) = -\frac{1}{4}\,\mu(x) + \frac{\partial V_0^{\frac{\partial V_0^\mu}{\partial\mathbf{n}}}(x)}{\partial\mathbf{n}_x}, \quad x \in S,$$

где последнее слагаемое представляет собой оператор со слабой особенностью.

Вычисления для внешней области проводятся аналогично.

Заметим, что при $k_1 = 0$ наличие внешней правильной нормальной производной у $W_{(2)}^\mu$ следует и из теорем Ляпунова [6].

Следствие. *Потенциал двойного слоя W_0^μ с плотностью μ имеет правильную внутреннюю (или внешнюю) нормальную производную тогда и только тогда, когда существует функция $\nu \in C(S)$ такая, что $\mu = V_0^\nu\big|_S$.*

Доказательство. Первая часть утверждения доказана в теореме 2.1. Докажем вторую. Пусть W_0^μ имеет правильную внутреннюю нормальную производную (по теореме Ляпунова это равносильно тому, что W_0^μ имеет правильную внешнюю нормальную производную). Тогда W_0^μ является решением следующей задачи Неймана:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в } \Omega_i, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)_i = \left(\frac{\partial W_0^\mu}{\partial\mathbf{n}}\right)_i & \text{на } S. \end{cases}$$

Поэтому W_0^μ представима в виде понетциала простого слоя, то есть существует такая функция $\nu_1 \in C(S)$, что $W_0^\mu \equiv V_0^{\nu_1}$ в Ω_i. Аналогично, существует такая функция $\nu_2 \in C(S)$, что $W_0^\mu \equiv V_0^{\nu_2}$ в Ω_e. Следовательно,

$$\mu = (W_0^\mu)_e - (W_0^\mu)_i = V_0^\nu\big|_S,$$

где $\nu = \nu_1 - \nu_2$.

Лемма 2.2. *Пусть $\rho \in C(S)$,*

$$F(x, x') = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} V_{(1)}^\rho(x') + W_{(1)}^\rho(x')\right), \ x \in S, \ xx' \| \mathbf{n}_x \tag{2.3}$$

(если $x' = x$, то все производные понимаются в смысле прямого значения).

Тогда 1) $F(x, x)$ непрерывна на S;

2) справедливо соотношение

$$\lim_{\delta \to \pm 0} F(x, x + \delta \mathbf{n}_x) - F(x, x) = \mp \frac{1}{2}\rho(x)H(x), \tag{2.4}$$

где $H(x)$ – средняя кривизна поверхности S в точке x относительно внешней нормали.

Доказательство. Будем считать, что $\delta > 0$. Случай $\delta < 0$ рассматривается аналогично.

Выражение (2.3) можно записать в виде

$$F(x, x') = \int\limits_S R(x, x', y)\rho(y)dS_y, \quad x \in S, \tag{2.5}$$

где

$$R(x, x', y) = \frac{1}{\chi_m}\left(\frac{(\mathbf{n}_x, \mathbf{n}_y) - 1}{|x' - y|^m} + m\frac{(x' - y, \mathbf{n}_x)(x' - y, \mathbf{n}_x - \mathbf{n}_y)}{|x' - y|^{m+2}}\right).$$

Из свойств поверхностей класса C^2 ([5], гл. 18) видно, что

$$|R(x, x, y)| = O\left(\frac{1}{|x - y|^{m-2}}\right), \quad y \to x, \ x, y \in S. \tag{2.6}$$

Таким образом, интеграл (2.5) при $x' = x$ имеет слабую особенность, откуда $F(x, x)$ непрерывна на S. Утверждение 1) доказано.

Для вычисления скачка (2.4) достаточно исследовать

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{u_\varepsilon} R(x, x+\delta\mathbf{n}_x, y)\rho(y)dS_y\,,$$

где $u_\varepsilon = S\cap B_\varepsilon(x)$ (интеграл по $S\setminus u_\varepsilon$ непрерывен при $\delta = 0$).

Из равенства (2.6) имеем

$$R(x, x+\delta\mathbf{n}_x, y) = \frac{m}{\chi_m}\,\delta\frac{(x-y, \mathbf{n}_x-\mathbf{n}_y)}{|x-y|^{m+2}} + O\left(\frac{1}{|x-y|^{m-2}}\right), \quad y\to x. \tag{2.7}$$

Далее, если в местной системе координат с началом в точке x вектор $\mathbf{a}$ имеет координаты $(a_1,\dots,a_m)$, то через $\mathbf{a}^\Pi$ будем обозначать вектор с координатами $(a_1,\dots,a_{m-1})$.

Известно ([7], §15), что

$$(\mathbf{n}_y)^\Pi = (\mathbf{n}_x)^\Pi + A(x)(y-x)^\Pi + o(|(y-x)^\Pi|), \quad x,y\in S,\ y\to x, \tag{2.8}$$

где $A(x)$ – матрица оператора Вайнгартена поверхности S. Из (2.7) с учетом (2.8) получаем, что

$$R(x, x+\delta\mathbf{n}_x, y)\rho(y) = \frac{m}{\chi_m}\,\frac{(A(x)(x-y)^\Pi, (x-y)^\Pi)}{(|(x-y)^\Pi|^2+\delta^2)^{\frac{m+2}{2}}}\,\rho(x) +$$

$$+ o(1)\frac{\delta}{|x-y|^m} + O\left(\frac{1}{|x-u|^{m-2}}\right), \quad y\to x,\ y\in S,$$

причем ([5], гл. 18) интеграл от последних двух слагаемых равномерно сходится в точке x, и потому непрерывен при $\delta = 0$.

Переходя к интегрированию по касательной плоскости и отбрасывая непрерывные при $\delta = 0$ слагаемые, приходим к интегралу

$$\rho(x)\frac{m}{\chi_m}\,\delta\int\limits_{\omega_\varepsilon}\frac{(A(x)(x-y)^\Pi, (x-y)^\Pi)}{(|(x-y)^\Pi|^2+\delta^2)^{\frac{m+2}{2}}}\,dy^\Pi, \tag{2.9}$$

где ω_ε – проекция u_ε на касательную плоскость к поверхности S в точке x. Замена переменной в интеграле (2.9) $z = \frac{(y-x)^\Pi}{\delta}$ и предельный переход при $\delta\to 0$ дают интеграл

$$\rho(x)\frac{m}{\chi_m}\int\limits_{\mathbf{R}^{m-1}}\frac{(A(x)z, z)}{(|z|^2+1)^{\frac{m+2}{2}}}\,dz.$$

Пользуясь тем, что собственные числа матрицы $-A(x)$ есть главные кривизны поверхности S в точке x относительно нормали $\mathbf{n}_x$, получаем

$$\frac{m}{\chi_m} \int\limits_{\mathbf{R}^{m-1}} \frac{A(x)z, z)}{(|z|^2+1)^{\frac{m+2}{2}}}\, dz = -\frac{1}{2}\, H(x)$$

и утверждение 2) леммы доказано.

Теорема 2.1. *Если $\mu \in C(S)$, то повторный потенциал $V^{\mu}_{(2)}$ имеет вторую правильную внутреннюю и внешнюю нормальную производную, причем*

$$\left(\frac{\partial^2 V^{\mu}_{(2)}}{\partial \mathbf{n}_x^2}\right)_{i,e}(x) = \frac{1}{4}\,\mu(x) + (Q^{(2)}_{i,e}\mu)(x), \quad x \in S, \tag{2.10}$$

где $Q^{(2)}_i$, $Q^{(2)}_e$ – операторы со слабой особенностью.

Доказательство. Запишем вторую производную повторного потенциала в виде

$$\frac{\partial^2 V^{\mu}_{(2)}(x')}{\partial \mathbf{n}_x^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\, V^{\mu}_{(2)}(x') + W^{\mu}_{(2)}(x')\right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x}\, W^{\mu}_{(2)}(x'), \quad x' \notin S.$$

Из лемм 2.1, 2.2 следует, что первое и второе слагаемое имеют пределы при $\delta \to 0$, $x' = x \pm \delta \mathbf{n}_x$, и справедлива формула (2.10).

Следствие. *Пусть $m = 2$, S – замкнутый C^2-гладкий контур. Тогда повторный логарифмический потенциал отображает $C(S)$ на $C^2(S)$.*

Это следует из теоремы 2.1 и из того факта, что для гармонической в плоской области функции существование второй нормальной и второй касательной производных равносильны.

§3. Сведение внешней и внутренней задач Вентцеля к интегральным уравнениям и их исследование

Будем искать решение задач $(\mathcal{W}_i)$ и $(\mathcal{W}_e)$ в виде повторного потенциала

$$u(x) = V^{\mu}_{k,0}(x), \tag{3.1}$$

где $\mu \in C(S)$. С учетом того, что u является решением уравнения (1.1), граничные условия (1.2), (1.3) можно переписать в виде

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right)_{i,e} - \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_{i,e} q + (\beta - 1)k^2 u = f, \tag{3.2}$$

где $q = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \mathbf{n}} + \alpha$ для задачи $(\mathcal{W}_i)$ и $q = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial \mathbf{n}} - \alpha$ для задачи $(\mathcal{W}_e)$. Подставляя в равенство (3.2) представление (3.1) и используя теорему 2.1, получим интегральное уравнение на S относительно неизвестной функции μ:

$$-(1/4)\mu + K_i\mu = f \text{ для задачи } (\mathcal{W}_i), \tag{3.3}$$

$$-(1/4)\mu + K_e\mu = f \text{ для задачи } (\mathcal{W}_e). \tag{3.4}$$

Здесь K_i, K_e – операторы со слабой особенностью. Поэтому все решения $\mu \in L_2(S)$ уравнений (3.3), (3.4) непрерывны на S.

Лемма 3.1. *Пусть u определена равенством (3.1), где $\mu \in C(S)$, и $u \equiv 0$ в $\mathbf{R}^m$. Тогда $\mu \equiv 0$ на S.*

Доказательство. Известно, что $V_0^{\mu}(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_i(x) - \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right)_e(x)$, $x \in S$. Так как $u \equiv 0$ в $\mathbf{R}^m$, то $V_0^{\mu} \equiv 0$ на S. Из свойств потенциала простого слоя ([5], гл. 18) следует, что $\mu \equiv 0$ на S.

Рассмотрим задачу $(\mathcal{W}_i)$. Если μ есть решение однородного уравнения (3.3), то функция u, определяемая равенством (3.1), решает однородную задачу $(\mathcal{W}_i)$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $k^2 \notin \sigma$. Тогда $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega_i}$. Таким образом, функция u является решением однородной внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца. По теореме единственности для этой задачи ([4], п. 131) $u \equiv 0$ в Ω_e. По лемме 3.1 $\mu \equiv 0$ на S. Итак, однородное уравнение (3.3) при $k^2 \notin \sigma$ имеет только тривиальное решение. Следовательно, уравнение (3.3), а вместе с ним и задача $(\mathcal{W}_i)$, при $k^2 \notin \sigma$ разрешимы при любой $f \in C(S)$.

2) Пусть $k^2 \in \sigma$. Тогда $V_{k,0}^{\mu}\big|_{\Omega_i}$ есть решение однородной задачи $(\mathcal{W}_i)$ и по лемме 1.2 является линейной комбинацией $\{v_p\}$, $p = 1, \ldots, l$.

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_j$ – базис $\mathrm{Ker}\,(-(1/4)I + K_i)$. Докажем, что $V_{k,0}^{\mu_1}, \ldots, V_{k,0}^{\mu_j}$ линейно независимы. Составим линейную комбинацию:

$$d_1 V_{k,0}^{\mu_1} + \ldots + d_j V_{k,0}^{\mu_j} \equiv 0 \text{ в } \mathbf{R}^m.$$

Обозначив $\nu = d_1\mu_1 + \ldots + d_j\mu_j$, получаем $V_{k,0}^{\nu} \equiv 0$ в $\mathbf{R}^m$. По лемме 3.1 $\nu \equiv 0$ на S. Так как $\mu_1, \ldots, \mu_j$ линейно независимы, то $d_1 = \ldots = d_j = 0$. Из сказанного выше получаем

$$\dim \operatorname{Ker}(-(1/4)I + K_i) \leqslant l. \tag{3.5}$$

Обозначим

$$\Phi = \{f \in C(S) : \text{задача } (\mathcal{W}_i) \text{ разрешима}\}.$$

Понятно, что

$$\operatorname{Im}(-(1/4)I + K_i) \subset \overline{\Phi}. \tag{3.6}$$

Из (3.6), (1.6) следует, что

$$v_1, \ldots, v_l \in \Phi^{\perp} \subset \operatorname{Ker}(-(1/4)I + K_i^*). \tag{3.7}$$

Из (3.5), (3.7) получаем, что

$$\dim \Phi^{\perp} = \dim \operatorname{Ker}(-(1/4)I + K_i) = \dim \operatorname{Ker}(-(1/4)I + K_i^*) = l.$$

Таким образом, если $k^2 \in \sigma$, то условия (1.6) являются необходимыми и достаточными для разрешимости задачи $(\mathcal{W}_i)$.

Рассмотрим теперь задачу $(\mathcal{W}_e)$. Если μ – решение однородного уравнения (3.4), то функция u, определяемая равенством (3.1), решает однородную задачу $(\mathcal{W}_e)$. По лемме 1.1 $u \equiv 0$ в Ω_e. Отсюда $u\big|_S = 0$, и функция u является решением задачи Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta u = k^2 u \text{ в } \Omega_i, \\ u\big|_S = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть k^2 не является собственным числом задачи Дирихле (3.8). Тогда $u \equiv 0$ в Ω_i. По лемме 3.1 $\mu \equiv 0$ на S. Таким образом, в этом случае однородное уравнение (3.4) имеет только тривиальное решение. Следовательно, уравнение (3.4), а вместе с ним и задача $(\mathcal{W}_e)$, разрешимы при любой $f \in C(S)$.

2) Пусть k^2 является собственным числом задачи Дирихле (3.8). Тогда не умаляя общности, можно считать, что $0 \in \Omega_i$, и будем искать решение задачи $(\mathcal{W}_e)$ в виде суммы повторного потенциала $V_{k,0}^{\mu}$ и дополнительного слагаемого – потенциала простого слоя

$$\tilde{V}_k^{\tau}(x) = \int\limits_{\partial B_\varepsilon} G_k(x-y)\tau(y)\,dS_y\,.$$

Радиус шара ε мы выберем позже. Заметим, что $\overline{B_\varepsilon} \subset \Omega_i$ при всех достаточно малых ε. Функция

$$u(x) = V^{\mu}_{k,0}(x) + \tilde{V}^{\tau}_{k}(x), \quad x \in \mathbf{R}^m \tag{3.9}$$

удовлетворяет уравнению Гельмгольца в трех областях: $\Omega_e, \Omega_i \setminus B_\varepsilon, B_\varepsilon$. Будем искать функции $\mu \in C(S)$ и $\tau \in C(\partial B_\varepsilon)$ так, чтобы выполнялись граничные условия (1.2) и

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}'}\right)_i = 0 \text{ на } \partial B_\varepsilon \tag{3.10}$$

(здесь $\mathbf{n}'$ – внешняя нормаль к ∂B_ε). Подставляя функцию u, определенную равенством (3.9), в (1.2) и (3.10), получим

$$\begin{cases} -(1/4)\mu + K_\varepsilon \mu + D_1 \tau = f, \\ (1/2)\tau + D_2 \mu + D_3 \tau = 0, \end{cases} \tag{3.11}$$

где D_1, D_2, D_3 – операторы со слабой особенностью.

Пусть $(\mu, \tau) \in L_2(S) \times L_2(\partial B_\varepsilon)$ – решение однородной системы (3.11). Тогда $(\mu, \tau) \in C(S) \times C(\partial B_\varepsilon)$. Рассмотрим функцию, определенную равенством (3.9). В силу (3.11) эта функция удовлетворяет однородным условиям (1.2) и (3.10). По лемме 1.1 $u \equiv 0$ в Ω_e. Поскольку k^2 – собственное число задачи (3.8), то $k^2 > 0$. Поэтому k^2 при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ не является собственным числом задачи Неймана в шаре B_ε и, следовательно, $u \equiv 0$ в B_ε. Таким образом, u является решением задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в $\Omega \setminus B_\varepsilon$. В силу дискретности спектра задачи Дирихле можно выбрать ε так, чтобы k^2 не являлось собственным числом этой задачи. Тогда $u \equiv 0$ в $\Omega \setminus B_\varepsilon$. Таким образом, получаем, что $u \equiv 0$ в $\mathbf{R}^m$. Из свойств потенциала простого слоя $\tau \equiv 0$ на ∂B_ε. По лемме 3.1 $\mu \equiv 0$ на S. Таким образом, однородная система (3.11) имеет только тривиальное решение. Следовательно, система (3.11), а вместе с ней и задача $(\mathcal{W}_i)$, разрешимы при любой $f \in C(S)$.

Особым для задачи $(\mathcal{W}_e)$ является случай $m = 2$, $k = 0$. Это связано с тем, что потенциал $V^{\mu}_{0,0}$, вообще говоря, не имеет правильного поведения на бесконечности. Однако при выполнении условия (1.5) несложно получить, что $\int\limits_S \mu dS_y = 0$, и дальнейший анализ показывает, что это условие является достаточным для разрешимости задачи $(\mathcal{W}_e)$.

Сформулируем полученные результаты в виде двух теорем.

Теорема 3.1. 1) *Если k^2 не принадлежит спектру задачи $(\mathcal{W}_i)$, то решение задачи $(\mathcal{W}_i)$ существует и единственно при любой $f \in C(S)$.*

2) *Если k^2 принадлежит спектру задачи $(\mathcal{W}_i)$ и $v_1, \dots, v_l$ – соответствующие решение однородной задачи, то задача $(\mathcal{W}_i)$ разрешима тогда и только тогда, когда выполняются условия* (1.6).

При этом в обоих случаях решение задачи $(\mathcal{W}_i)$ представимо в виде повторного потенциала $V^{\mu}_{k,0}$ с непрерывной плотностью.

Теорема 3.2. *Решение задачи $(\mathcal{W}_e)$ существует и единственно при любой $f \in C(S)$, кроме случая $m = 2$, $k = 0$. В случае $m = 2$, $k = 0$ необходимым и достаточным условием разрешимости задачи $(\mathcal{W}_e)$ является условие* (1.5).

§4. Некоторые обобщения

Наряду с потенциалами $V^{\mu}_{k_1,k_2}$ и $W^{\mu}_{k_1,k_2}$ можно рассмотреть третьи повторные потенциалы

$$V^{\mu}_{k_1,k_2,k_3} = V^{V^{\mu}_{k_2,k_3}}_{k_1}, \quad W^{\mu}_{k_1,k_2,k_3} = W^{V^{\mu}_{k_2,k_3}}_{k_1},$$

и, аналогично, повторные потенциалы любого порядка.

Теорема 4.1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$,*

$$\begin{aligned} &S \in C^{r+\epsilon} \text{ при нечетном } r, \ 0 < \epsilon < 1, \\ &S \in C^{r} \quad \text{ при четном } r, \end{aligned}$$

и $\mu \in C(S)$. Тогда повторный потенциал простого слоя порядка r $V^{\mu}_{(r)}$ имеет на S правильную нормальную производную порядка r, причем

$$\left(\frac{\partial^r V^{\mu}_{(r)}}{\partial \mathbf{n}^r} \right)_{i,e} (x) = (\pm 1)^r \cdot \frac{\mu(x)}{2^r} + (Q^{(r)}_{i,e}\mu)(x), \ x \in S, \tag{4.1}$$

где $Q^{(r)}_{i,e}$ – компактные операторы в $C(S)$.

Замечание. Мы ограничимся доказательством для Ω_i (вторая формула из (4.1) получается аналогично). Кроме того, так же, как и в §2, можно при доказательстве считать, что $k_1 = k_2 = \ldots = k_r = 0$.

Доказательство проведем индукцией по r. При $r=1$ утверждение теоремы хорошо известно; случай $r=2$ разобран в §2.

Пусть $r>2$. Предположим сначала, что $S\in C^r$ и обозначим $\rho=V^{\mu}_{(r-1)}$. Тогда ([5], гл. 7) $\rho\in C^{r-2+\gamma}(\overline{\Omega_i})$ при любом $\gamma<1$. Пусть $x\in S$, $x'\in\Omega_i$. Имеем

$$\frac{\partial^2 V^{\mu}_{(r)}(x')}{\partial \mathbf{n}_x^2}=\int\limits_S \mathbf{n}_i(x)\mathbf{n}_k(x)\frac{\partial^2 G_0(x'-y)}{\partial y_i\partial y_k}\,\rho(y)dS_y=$$

$$=\int\limits_S \nu_i(y)\nu_k(y)\frac{\partial^2 G_0(x'-y)}{\partial y_i\partial y_k}\,\rho(y)dS_y-$$

$$-\int\limits_S \mathbf{n}_i(y)\nu_k(x)\frac{\partial^2 G_0(x'-y)}{\partial y_i\partial y_k}\,\rho(y)dS_y+$$

$$+\int\limits_S \mathbf{n}_i(x)\mathbf{n}_k(y)\frac{\partial^2 G_0(x'-y)}{\partial y_i\partial y_k}\,\rho(y)dS_y, \tag{4.2}$$

где $\nu(y)=\mathbf{n}(y)-\mathbf{n}(x)$, $y\in S$. Обозначим слагаемые в правой части (4.2) I_1, I_2, I_3.

Очевидно, интеграл I_1 имеет слабую (порядка $m-2$) особенность при $x'=x=y\in S$, поэтому $I_2\in C^{r-2+\gamma}(\overline{\Omega_i})$, и, таким образом, существует

$$\left(\frac{\partial^{r-2}I_1}{\partial\mathbf{n}^{r-2}}\right)_i\in C^{\gamma}(S).$$

Далее, очевидно,

$$I_3(x')=-\frac{\partial W_0^{\rho}}{\partial\mathbf{n}_x}\,(x').$$

Из формулы (2.2) по индукционному предположению получаем, что W_0^{ρ} имеет правильную нормальную производную порядка $r-1$. Поэтому существует

$$\left(\frac{\partial^{r-2}I_3}{\partial\mathbf{n}^{r-2}}\right)_i(x)=\frac{\mu(x)}{2^r}+\Phi(x),\ x\in S,$$

причем $\Phi\in C^{\gamma}(S)$.

Теперь рассмотрим интеграл I_2. Будем считать, что векторное поле $\nu(y)$ продолжено внутрь Ω, причем в $\Omega\setminus\Omega_\delta$ оно постоянно вдоль нормали. Тогда интегрирование по частям дает (при $x'\in\Omega\setminus\Omega_\delta$)

$$I_2(x') = \int\limits_S (\rho_{y_i}(y)\mathbf{n}_k(y) - \rho_{y_k}(y)\mathbf{n}_i(y))\nu_k(y)\frac{\partial}{\partial y_i}\,G_0(x'-y)dS_y +$$

$$+2\frac{m-1}{m}\,H(x')\rho(x') + \int\limits_S \rho(y)H(y)\mathbf{n}_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}\,G_0(x'-y)dS_y \qquad (4.3)$$

(здесь $H(x')$ – средняя кривизна параллельной поверхности, проходящей через точку x'). Преобразовав последний интеграл в (4.3) в сумму

$$\int\limits_S (\rho(y)-\rho(x))H(y)\mathbf{n}_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}\,G_0(x'-y)dS_y + \rho(x)W_0^H(x'),$$

несложно увидеть, что все слагаемые, кроме последнего, имеют нормальную производную порядка $r-2$, принадлежащую $C^\gamma(S)$.

Заметим, наконец, что $H\in C^{r-2}(S)$, откуда предельное значение $(W_0^H)_i\in C^{r-2}(S)$. В силу уравнения Лапласа нормальные производные четного порядка выражаются через касательные производные того же порядка (и младшие производные). Поэтому при четном r W_0^H также имеет правильную нормальную производную порядка $r-2$. А вот при нечетном r условия $H\in C^{r-2}(S)$ для этого недостаточно. Если же $S\in C^{r+\epsilon}$, то это верно и для нечетного r.

Таким образом, при выполнении условий теоремы все слагаемые в (4.2) имеют правильную нормальную производную порядка $r-2$. Из вышесказанного следует формула (4.1). Компактность оператора $Q_i^{(r)}$ следует из компактности вложения $C^\gamma(S)$ в $C(S)$. Теорема доказана.

Замечание. Условие $S\in C^{r+\epsilon}$ при нечетном r можно ослабить, потребовав, например, чтобы производные порядка r удовлетворяли условию Дини.

Теорема 4.1 позволяет использовать повторные потенциалы при решении краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца с граничными операторами, которые могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial^r u}{\partial \mathbf{n}^r} + \text{ оператор порядка } (r-1).$$

Такие краевые условие встречаются, например, в задачах акустики.

Литература

1. А. Д. Вентцель, *О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов.* Теор. вероятн. и ее примен. **4**, вып. 2 (1959), 172–185.
2. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений.* Алгебра и анализ **6**, No. 6 (1994), 1–29.
3. Д. Е. Апушкинская, А. И. Назаров, *Гельдеровские оценки решений вырожденных граничных задач Вентцеля для параболических и эллиптических уравнений недивергентного вида.* Пробл. мат. анал., вып. 17 (1977), 3–19.
4. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* т. 4, ч. 2, М., 1981.
5. С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных.* М., 1977.
6. А. М. Ляпунов, *Собр. соч..* т. 1, М., 1954.
7. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию.* СПб., Наука, 1994.

Lukyanov V. V., Nazarov A. I. Solving of Vent'sel boundary-value problem for Laplace and Helmholtz equations by iterated potentials.

Using the properties of iterated potentials we transform Vent'sel problem for Laplace and Helmholtz equations to Fredholm equation. The possibility of application of iterated potentials to investigation of the Helmholtz equation with high order boundary condition is shown.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 27 ноября 1997 г.