Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

Л. А. Молотков

О МЕТОДАХ ВЫВОДА УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ЭФФЕКТИВНЫЕ МОДЕЛИ СЛОИСТЫХ СРЕД

Предлагаемая работа посвящена методам установления уравнений, описывающих волновые процессы в эффективных моделях слоистых сред, которые могут содержать, в частности, упругие, жидкие и пористые слои. Остановимся на краткой истории развития методов вывода уравнений эффективных моделей или осреднения слоистых структур. Задача об осреднении периодических слоистых упругих сред с жестким контактом на границах решалась, согласно научной литературе, в течение нескольких десятилетий и была впервые полностью решена Бейкусом в 1962 г. [1]. Общая теория осреднения дифференциальных уравнений, описывающих периодические слоистые среды с сильной осцилляцией параметров, была разработана в книгах Санчес Паленсиа [2] и Н. С. Бахвалова и Г. П. Панасенко [3].

Предложенный автором в 1979 г. метод осреднения периодических упругих, жидких и упруго-жидких слоистых структур [4] явился обобщением метода Бейкуса и оказался в полном соответствии с теорией Н. С. Бахвалова. Этим методом, по-видимому, впервые были получены уравнения эффективных моделей срех с чередующимися упругими и жидкими слоями, а также слоистых упругих сред с контактом проскальзывания на границах. Кроме того, в указанной работе была произведена частотная оценка области применимости выведенных эффективных моделей. Используя этот подход, легко убедиться, что эффективные модели могут быть установлены также и в случае отсутствия периодичности, но в этом случае область применимости эффективной модели сильно сокращается. В то же время следует указать, что предложенный в работе [4] подход оказался довольно сложным, поскольку он использовал решения уравнений теории упругости и акустики, а в случае особых граничных условий минорные матрицы, описывающие упругие слои.

По мере установления указанным подходом эффективных моделей более сложных сред происходило усовершенствование метода, при этом выводы проводились с помощью более простых, но не всегда оправданных операций. Чтобы оправдать и уточнить некоторые результаты осреднения слоистых структур, автором была написана в 1991 году работа [5], однако эта работа не решила всех проблем усовершенствования и оправдания методов получения эффективных моделей. Осреднение упругих слоев подробно исследовалось также в работе [6]. В настоящее время в связи с большим интересом к трещиноватым и пористым средам, насыщенным водой, нефтью или газом, и в связи с тем, что выводы из теории эффективных моделей подтверждаются экспериментально [7–10], большое внимание уделяется установлению и исследованию уравнений осредненных моделей. В то же время не все работы в этом направлении приводят к правильным, с нашей точки зрения, результатам [11].

В связи с этим цель предлагаемой статьи состоит в изложении достаточно простого и оправданного метода установления уравнений эффективных моделей слоистых сред. С этой целью вначале с высокой степенью строгости рассматриваются общие задачи осреднения уравнений, а затем определяется, в каких звеньях вывода сложные операции можно заменять более простыми и получать при этом правильные результаты. Особое внимание в работе уделяется случаю необычных граничных условий, когда одна из величин на границах обращается в нуль. Исследование этого случая позволяет оправдать эффективную модель, когда пористый слой Био [12] чередуется или с упругим, или с жидким слоем [13], а также получить уравнения эффективной модели пористой среды Био, в которой между твердыми фазами имеет место контакт с проскальзыванием.

§1. Вывод эффективной модели слоистой среды в случае граничных условий, вырожающих непрерывность основных величин

Пусть задана некоторая слоистая периодическая среда $0 \leqslant z \leqslant H$, содержащая n периодов (рис. 1).

Каждый период имеет толщину $h = H/n$ и состоит из двух однородных слоев 1 и 2 с толщинами h_1 и h_2 ($h_1 + h_2 = h$). Волновое поле в слое i характеризуется $k + l_i$ величинами $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots, p_k^{(i)}, q_{k+1}^{(i)}, q_{k+2}^{(i)}, \ldots, q_{k+l_i}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ и каждая из

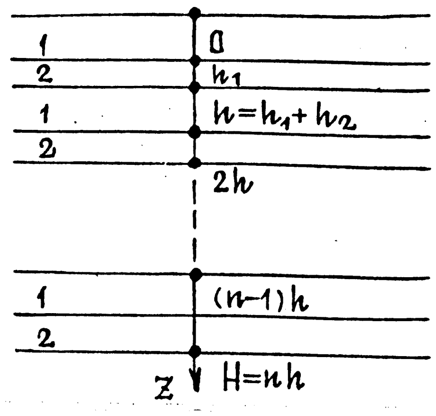

Рис. 1.

этих величин является или составляющей вектора смещений, или компонентой тензора напряжений, при этом слои могут быть как однофазными, так и содержать несколько фаз. Функции $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots, p_k^{(i)}$ удовлетворяют на всех внутренних границах условиям

$$p_1^{(1)} = p_1^{(2)}, \quad p_2^{(1)} = p_2^{(2)} \ldots, p_k^{(1)} = p_k^{(2)}, \tag{1.1}$$

которые позволяют рассматривать непрерывные в интервале $0 \leqslant z \leqslant H$ (за исключением фронтов) величины $p_1, p_2, \ldots, p_k$, равные в слоях 1 $p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_k^{(1)}$ и в слоях 2 $p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, \ldots, p_k^{(2)}$. Функции $q_1^{(i)}, q_2^{(i)}, \ldots, q_{l_i}^{(i)}$ не входят в граничные условия и на границах имеют разрывы.

Волновое поле в слое i описывается уравнением

$$\mathbf{M}_i \left(\frac{\partial}{\partial z} p_1^{(i)}, \frac{\partial}{\partial z} p_2^{(i)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z} p_k^{(i)},\ q_{k+1}^{(i)}, q_{k+2}^{(i)}, \ldots, q_{k+l_i}^{(i)} \right)^T =$$

$$\mathbf{N}_i \left(p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots p_k^{(i)} \right)^T \quad (i = 1, 2), \tag{1.2}$$

в котором T – символ транспонирования, $\mathbf{M}_i$ – неособенная квадратная матрица и $\mathbf{N}_i$ – прямоугольная матрица с $k + l_i$ строками и с k столбцами. Различие между величинами $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots, p_k^{(i)}$ и $q_{k+1}^{(i)}, q_{k+2}^{(i)}, \ldots, q_{k+l_i}^{(i)}$ состоит также и в том, что в уравнения (1.2) входят не только $p_j^{(i)}$, но и их производные по z $\partial p_j^{(i)}/\partial z$

$(j = 1, 2, \ldots k)$, а аналогичные производные от $q_j^{(i)}$ отсутствуют. Среды, описываемые уравнениями (1.2) при граничных условиях (1.1) и $l_1 = l_2$, соответствуют, в частности, случаям, когда оба слоя отличаются только параметрами и являются либо упругими, либо жидкими, либо пористыми слоями Био, при этом слои могут обладать анизотропией, вязкостью и описываться ядрами релаксации. Равенства, входящие в матричное уравнение (1.2), состоят из уравнений закона Гука и уравнений движения непрерывной среды. Поэтому элементы матриц $\mathbf{M}_i$ и $\mathbf{N}_i$ являются или числами, или линейными операторами, содержащими дифференцирование по времени t и по координатам x и y.

На основании равенств (1.2) можно записать матричные уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{W}_i}{\partial z} = \mathbf{A}_i \, \mathbf{W}_i, \quad \mathbf{V}_i = \mathbf{B}_i \, \mathbf{W}_i \quad (i = 1, 2), \tag{.1.3}$$

в которых

$$\mathbf{W}_i = \left(p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \ldots p_k^{(i)}\right)^T, \quad \mathbf{V}_i = \left(q_{k+1}^{(i)}, q_{k+2}^{(i)}, \ldots, q_{k+l_i}^{(i)}\right)^T. \tag{1.4}$$

Так как из условий (1.1) следует граничное условие

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_2, \tag{1.5}$$

то полезно ввести непрерывную матрицу $\mathbf{W}$, которая в слоях 1 и 2 соответственно равна $\mathbf{W}_1$ и $\mathbf{W}_2$.

Решение первого уравнения (1.3) представляется соотношением

$$\mathbf{W}_i(z) = e^{\mathbf{A}_i(z - z_0)} \, \mathbf{W}_i(z_0), \tag{1.6}$$

где z и z_0 – координаты точек, расположенных в одном и том же слое i. На основании формулы (1.6) получим соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(mh + h_1) &= e^{\mathbf{A}_1 h_1} \, \mathbf{W}(mh), \\ \mathbf{W}\left((m+1)h\right) &= e^{\mathbf{A}_2 h_2} \, \mathbf{W}(mh + h_1) \end{aligned} \tag{1.7}$$

для значений матрицы $\mathbf{W}$ на границах в $(m+1)$-ом периоде. Используя равенства (1.4), (1.5) и граничное условие (1.5), получим для произвольной точки, лежащей в $(m+1)$-ом периоде и имеющей координату $z = mh + \Delta z$, формулы

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} e^{\mathbf{A}_1 \Delta z} \left(e^{\mathbf{A}_2 h_2} \, e^{\mathbf{A}_1 h_1}\right)^m \mathbf{W}(0) \quad \text{при} \quad \Delta z \leqslant h_1, \\ e^{\mathbf{A}_2 (\Delta z - h_1)} \, e^{\mathbf{A}_1 h_1} \left(e^{\mathbf{A}_2 h_2} \, e^{\mathbf{A}_1 h_1}\right)^m \mathbf{W}(0) \\ \text{при} \quad h_1 < \Delta z < h_1 + h_2 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots n - 1), \end{cases} \tag{1.8}$$

определяющие волновое поле в любой точке среды.

В этом волновом поле совершим предельный переход при

$$\begin{aligned} &n \to \infty, \quad H = \text{const}, \quad h \to 0, \quad h_1 \to 0, \quad h_2 \to 0, \\ &\theta_1 = h_1/h = \text{const}, \quad \theta_2 = h_2/h = \text{const}\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Для осуществления указанного предельного перехода рассмотрим вначале случай, когда h_1, h_2, Δz и $\Delta z - h$ являются малыми величинами и экспоненты в формулах (1.8) заменяются первыми двумя членами рядов Маклорена. Равенства (1.8) в этом случае переходят в соотношения

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} (\mathbf{E} + \mathbf{A}_1 \Delta z)\,[(\mathbf{E} + \mathbf{A}_2\, h_2)(\mathbf{E} + \mathbf{A}_1\, h_1)]^m\ \mathbf{W}(0), \\ \text{при} \quad \Delta z \leqslant h_1 \\ [(\mathbf{E} + \mathbf{A}_2(\Delta z - h)]\,(\mathbf{E} + \mathbf{A}_1\, h_1)\,[(\mathbf{E} + \mathbf{A}_2\, h_2)\,(\mathbf{E} + \\ \mathbf{A}_1\, h_1)]^m\ \mathbf{W}(0), \quad \text{при} \quad h_1 \leqslant \Delta z \leqslant h_1 + h_2. \end{cases} \tag{1.10}$$

Кроме того, в основании степени с показателем m и в выражении перед этой степенью сохраним только линейные члены. После замены $m = (z - \Delta z)/h$ приходим к равенствам

$$\mathbf{W}(z) = \begin{cases} (\mathbf{E} + \mathbf{A}_1\, \Delta z)\,[\mathbf{E} + h(\mathbf{A}_1 \theta_1 + \mathbf{A}_2 \theta_2)]^{(z-\Delta z)/h}\ \mathbf{W}(0) \\ \text{при} \quad \Delta z \leqslant h, \\ [\mathbf{E} + \mathbf{A}_1\, h_1 + \mathbf{A}_2(\Delta z - h_1)]\,[\mathbf{E} + h(\mathbf{A}_1\theta_1 + \\ + \mathbf{A}_2\theta_2)]^{(z-\Delta z)/h}\ \mathbf{W}(0) \quad \text{при} \quad h_1 \leqslant \Delta z \leqslant h_1 + h_2. \end{cases} \tag{1.11}$$

В выражениях (1.11) выполняется предельный переход при условиях (1.9) и с использованием формулы

$$\lim_{h \to 0} (\mathbf{E} + \mathbf{A} h)^{z/h} = e^{\mathbf{A} z}, \tag{1.12}$$

являющейся матричным аналогом определения числа "e." В результате приходим к одному предельному соотношению

$$\mathbf{W}(z) = e^{(\mathbf{A}_1\theta_1 + \mathbf{A}_2\theta_2)z}\, \mathbf{W}(0), \tag{1.13}$$

которое выполняется при всех z, лежащих в интервале $0 \leqslant z \leqslant H$.

Следует отметить, что при осуществлении указанного предельного перехода число m в точках, расположенных вблизи плоскости $z = 0$, возрастает гораздо медленнее чем n и предельная формула (1.13) оказывается справедливой только при очень больших n. Чтобы ускорить переход к соотношению (1.13) в этих точках, полезно также рассмотреть случай, когда периоды перенумерованы в обратном порядке, а ось z имеет противоположное направление и произвести такой же предельный переход. Используя оба предельных перехода, удается не только ускорить переход к соотношению (1.13), но и сделать этот переход более равномерным для всех точек среды.

После дифференцирования соотношения (1.13) по z приходим к уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial z} = (\mathbf{A}_1\,\theta_1 + \mathbf{A}_2\,\theta_2)\mathbf{W}, \tag{1.14}$$

описывающему предельное поле. К матричному уравнению (1.14) следует добавить уравнения

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{B}_1\,\mathbf{W}, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{B}_1\,\mathbf{W}, \tag{1.15}$$

которые после предельного перехода выполняются в каждой точке. До этого перехода уравнения (1.15) удовлетворялись только в соответствующих слоях. При осуществлении предельного перехода каждая точка среды, как правило, оказывается бесконечное число раз в первых и во вторых слоях. Последовательность матриц $\mathbf{V}_1$, определенных в некоторой фиксированной точке, когда она лежит в первых слоях, стремится к одному пределу. Аналогичная последовательность $\mathbf{V}_2$, определенная в той же фиксированной точке, когда последняя находится во вторых слоях, стремится к другому пределу. Оба эти пределы обозначаются для простоты через $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$, выражаются соотношениями (1.15) и, как правило, не совпадают.

Вид окончательных уравнений эффективной модели зависит от того, осредняются или не осредняются элементы матриц $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$. Возможность осреднения величин $q_j^{(i)}$ $(j = k+1, k+2, \ldots k+l_i)$ определяется условиями, что уравнения эффективной модели, как и исходные уравнения, должны состоять из уравнений закона Гука и уравнений движения сплошной среды и что осредненные величины должны иметь определенный физический смысл. В тех случаях, когда $l_1 = l_2$, число фаз в обоих слоях одинаково и допустимо осреднение всех величин $q_j^{(i)}$, наиболее распространенным является осреднение по формуле

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1\,\theta_1 + \mathbf{V}_2\,\theta_2. \tag{1.16}$$

Эффективная модель в этом случае имеет столько же фаз, как и осредняемые слои, и описывается уравнениями (1.14) и

$$\mathbf{V} = (\mathbf{B}_1\,\theta_1 + \mathbf{B}_2\,\theta_2)\mathbf{W}. \tag{1.17}$$

Если такое осреднение невозможно осуществить полностью, так как или $l_1 \neq l_2$, или не все элементы матриц $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ осредняются, то число фаз в эффективной модели оказывается, как правило, больше чем в слоях.

Следует отметить, что в эффективной модели часть волнового поля, определяемая матрицей $\mathbf{W}$, не зависит от того, осредняются или не осредняются элементы матриц $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$. Матрица

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_1\,\theta_1 + \mathbf{A}_2\,\theta_2, \tag{1.18}$$

входящая в уравнение (1.14), полностью определяет волновые фронты в эффективной модели от точечного источника. В самом деле, для нахождения фронтов в двумерном случае, согласно работе [14], полезно заменить в уравнении (1.14) операции дифференцирования числами

$$\partial/\partial x \sim 1, \quad \partial/\partial z \sim \alpha, \quad \partial/\partial t \sim \tau. \tag{1.19}$$

После этой замены условие совместности системы уравнений (1.14) представится равенством

$$\det(\overline{\mathbf{A}} - \alpha\mathbf{E}\,) = 0. \tag{1.20}$$

Определяемые соотношением (1.20) функции $\alpha(\tau)$ на вещественной оси τ в интервалах, где эти функции вещественные, определяют, согласно работе [14], фронты от точечного источника, расположенного в начале координат. Эти фронты задаются параметрическими уравнениями

$$x = t\left(\tau - \frac{\alpha(\tau)}{\alpha'(\tau)}\right), \quad z = \frac{t}{\alpha'(\tau)}. \tag{1.21}$$

Указанный подход может быть обобщен на трехмерный случай. Как видно из этого подхода, положение фронтов от точечных источников также не зависит от того, осредняются или не осредняются элементы матриц $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$.

В заключение укажем более простые подходы к выводу уравнений эффективной модели (1.14). Осредненная по периоду производная $\partial\mathbf{W}/\partial z$ представляется равенством

$$\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial z}=\frac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial z}\theta_1+\frac{\partial\mathbf{W}_2}{\partial z}\theta_2, \tag{1.22}$$

которое соответствует определению производной с учетом предельного перехода при $h\to 0$. Подстановка первых соотношений (1.3) в формулу (1.22) и учет граничных условий (1.5) приводит к уравнению (1.14). Использование равенства (1.22) позволяет упростить и другие этапы вывода уравнений (1.14). Если к уравнениям (1.2) добавить уравнения (1.22) и из полученной системы линейных уравнений исключить величины $\partial p_1^{(i)}/\partial z$, $\partial p_2^{(i)}/\partial z,\ldots\partial p_k^{(i)}/\partial z$ $(i=1,2)$, то придем к уравнениям (1.14) и (1.15). В том случае, когда матрицы $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ осредняются по формуле (1.16), к указанной системе линейных уравнений следует добавить еще уравнения (1.16) и получить уравнения (1.14) и (1.17). Подобный подход без обоснования уже использовался в работах [4, 13, 15]. Поскольку проведенное обоснование позволяет выполнить выводы эффективных моделей более простым способом, рассмотрим такой вывод на примере одной из сред.

§2. Вывод эффективной модели слоистой среды с чередующимися пористыми слоями

В качестве примера рассмотрим в двумерной области пористую слоистую периодическую трансверсально-изотропную среду (рис. 1), в которой оба слоя описываются обобщенными уравнения Био [12, 13]

$$\begin{aligned}
\tau_{xx}&=P\frac{\partial u_x}{\partial x}+F\frac{\partial u_z}{\partial z}+M\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
\tau_{zz}&=F\frac{\partial u_x}{\partial x}+C\frac{\partial u_z}{\partial z}+Q\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
-p&=M\frac{\partial u_x}{\partial x}+Q\frac{\partial u_z}{\partial z}+R\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
\tau_{xz}&=L\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho_x \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \rho_{fx} \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{fx} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + m_x \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho_z \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_{fz} \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{fz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + m_z \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},$$

где u_x, u_z – смещения твердой фазы, w_x, w_z – смещения жидкой фазы относительно скелета τ_{xx}, τ_{zz}, τ_{xz} – суммарные напряжения и p – давление в жидкой фазе. В уравнениях (2.1), относящихся к слою i $(i = 1, 2)$, смещения, напряжения, давление и коэффициенты снабжаются дополнительным индексом i. На границах между слоями выполняются условия

$$\begin{aligned} &u_{x1} = u_{x2}, \quad u_{z1} = u_{z2}, \quad w_{z1} = w_{z2}, \\ &\tau_{zz1} = \tau_{zz2}, \quad \tau_{xz1} = \tau_{xz2}, \quad p_1 = p_2, \end{aligned} \tag{2.2}$$

которые позволяют рассматривать непрерывные в интервале $0 \leqslant z \leqslant H$ функции u_x, u_z, w_z, τ_{zz}, τ_{xz} и p. Производные этих функций по z входят в уравнения (2.1). Указанные производные осредняются по формулам

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_{x1}}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial u_{x2}}{\partial z}\theta_2, \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial u_{z2}}{\partial z}\theta_2, \\ \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial w_{z1}}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial w_{z2}}{\partial z}\theta_2, \quad \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial \tau_{zz2}}{\partial z}\theta_2, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial \tau_{xz2}}{\partial z}\theta_2, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_1}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial p_2}{\partial z}\theta_2. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Относительно величин w_{xxi} и τ_{xxi}, не входящих в граничные условия и не имеющих в уравнениях (2.1) производных по z, мы будем предполагать, что они осредняются с помощью равенств

$$w_x = w_{x1}\theta_1 + w_{x2}\theta_2, \quad \tau_{xx} = \tau_{xx1}\theta_1 + \tau_{xx2}\theta_2. \tag{2.4}$$

Нахождение эффективной модели, согласно §1, сводится к исключению величин $\partial u_{xi}/\partial z$, $\partial u_{zi}/\partial z$, $\partial w_{zi}/\partial z$, $\partial \tau_{zzi}/\partial z$, $\partial \tau_{xzi}/\partial z$, $\partial p_i/\partial z$, u_{xi} и τ_{xxi} $(i = 1, 2)$ из системы, содержащей уравнения

(2.3), (2.4), а также уравнения (2.1), записанные для обоих слоев. На основании соотношений (2.1) получим уравнения

$$\frac{\partial u_{zi}}{\partial z} == -\alpha_{1i}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \alpha_{6i}\tau_{zz} + \alpha_{4i}p,$$

$$\frac{\partial w_{zi}}{\partial z} + \frac{\partial w_{xi}}{\partial x} = \alpha_{2i}\frac{\partial u_x}{\partial x} - \alpha_{4i}\tau_{zz} - \alpha_{5i}p, \tag{2.5}$$

$$\tau_{xxi} = \alpha_{3i}\frac{\partial u_x}{\partial x} + \alpha_{1i}\tau_{zz} + \alpha_{2i}p,$$

$$\frac{\partial u_{xi}}{\partial z} = -\frac{\partial u_{zi}}{\partial x} + \alpha_{7i}\tau_{xz};$$

$$\frac{\partial \tau_{xzi}}{\partial z} = \beta_{1i}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \beta_{2i}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xxi}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 w_{xi}}{\partial t^2} = -\beta_{2i}\frac{\partial u_x}{\partial t^2} - \beta_{3i}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \tau_{zzi}}{\partial z} = \rho_{zi}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_{fzi}\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x},$$

$$-\frac{\partial p_i}{\partial z} = \rho_{fzi}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + m_{zi}\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2),$$

в которых

$$\alpha_{1i} = \frac{R_iF_i - M_iQ_i}{R_iC_i - Q_i^2}, \quad \alpha_{2i} = \frac{F_iQ_i - M_iC_i}{R_iC_i - Q_i^2},$$

$$\alpha_{3i} = \frac{\Delta_i}{R_iC_i - Q_i^2}, \quad \alpha_{4i} = \frac{Q_i}{R_iC_i - Q_i^2}, \quad \alpha_{5i} = \frac{C_i}{R_iC_i - Q_i^2},$$

$$\alpha_{6i} = \frac{R_i}{R_iC_i - Q_i^2}, \quad \alpha_{7i} = \frac{1}{L_i}, \tag{2.7}$$

$$\beta_{1i} = \frac{m_{xi}\rho_{xi} - \rho_{fxi}^2}{m_{xi}}, \quad \beta_{2i} = \frac{\rho_{fxi}}{m_{xi}}, \quad \beta_{3i} = \frac{1}{m_{xi}},$$

$$\Delta_i = P_iC_iR_i + 2F_iQ_iM_i - C_iM_i^2 - R_iF_i^2 - P_iQ_i^2.$$

Уравнения (2.5) и (2.6) оказываются более простыми и удобными по сравнению с аналогичными уравнения (2.1) и (2.3) работы [13], Преимущества уравнений (2.5) и (2.6) состоят в том, что в них, в частности, разделены уравнения, вытекающие из уравнений закона Гука и уравнений движения сплошной среды. В уравнениях (2.5) и (2.6) осредняемые величины $\partial u_{xi}/\partial z$, $\partial u_{zi}/\partial z$, $\partial w_{zi}/\partial z$, $\partial \tau_{zzi}/\partial z$, $\partial \tau_{zxi}/\partial z$, $\partial p_i \partial z$, w_{xi}, τ_{xxi} и производные двух последних величин по x и t не содержат при себе коэффициентов, а непрерывные величины u_x, u_z, w_z, τ_{zz}, τ_{zx}, p и их производные по x и t имеют коэффициенты, выражающиеся через параметры среды. Указанные особенности позволяют провести осреднение уравнений (2.5) и (2.6) по формулам (2.3) и (2.4) и исключить упомянутые осредняемые величины. В результаты приходим к уравнениям

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u_z}{\partial z} = -A_1 \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_6 \tau_{zz} + A_4 p, \\
\frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial w_x}{\partial x} = A_2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - A_4 \tau_{zz} - A_5 p, \\
\tau_{xx} = A_3 \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_1 \tau_{zz} + A_2 p, \\
\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} + A_7 \tau_{xz};
\end{gathered} \tag{2.8}$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = B_1 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - B_2 \frac{\partial p}{\partial x}, \\
-B_3 \frac{\partial p}{\partial x} = B_2 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}, \\
\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = (\rho_{z1}\, \theta_1 + \rho_{z2}\, \theta_2) \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + (\rho_{fz1} \theta_1 + \rho_{fz2} \theta_2) \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}, \\
-\frac{\partial p}{\partial z} = (\rho_{fz1} \theta_1 + \rho_{fz2} \theta_2) \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + (m_{z1} \theta_1 + m_{z2} \theta_2) \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},
\end{gathered} \tag{2.9}$$

в которых

$$A_j = \sum_{i=1}^{2} \alpha_{ji}\, \theta_i \quad (j = 1, 2, \ldots 7), \quad B_j = \sum_{i=1}^{2} \beta_{ji}\, \theta_i \quad (j = 1, 2, 3). \tag{2.10}$$

Уравнения (2.8) и (2.9) описывают эффективную модель. После несложных преобразовний приходим также к уравнениям (2.1), в которых

$$P = \frac{A_3 A_5 A_6 - 2A_1 A_2 A_3 + A_1^2 A_5 + A_2^2 A_6 - A_3 A_4^2}{A_5 A_6 - A_4^2},$$

$$F=\frac{A_1A_5-A_2A_4}{A_5A_6-A_4^2},\quad M=\frac{A_1A_4-A_2A_6}{A_5A_6-A_4^2},\quad C=\frac{A_5}{A_5A_6-A_4^2},$$
$$Q=\frac{A_4}{A_5A_6-A_4^2},\quad R=\frac{A_6}{A_5A_6-A_4^2},\quad L=\frac{1}{A_7},$$
$$\rho_x=\frac{B_1B_3+B_2^2}{B_3}=\rho_{x1}\theta_1+\rho_{x2}\theta_2-\frac{\theta_1\theta_2(\rho_{fx1}-\rho_{fx2})^2}{m_{x2}\theta_1+m_{x1}\theta_2},\tag{2.11}$$
$$\rho_{fx}=\frac{B_2}{B_3}=\frac{\rho_{fx1}m_{x2}\theta_1+\rho_{fx2}m_{x1}\theta_2}{m_{x2}\theta_1+m_{x1}\theta_2},$$
$$m_x=\frac{1}{B_3}=\frac{m_{x1}m_{x2}}{m_{x2}\theta_1+m_{x1}\theta_2},\quad \rho_z=\rho_{z1}\theta_1+\rho_{z2}\theta_2,$$
$$\rho_{fz}=\rho_{fz1}\theta_1+\rho_{fz2}\theta_2,\quad m_z=m_{z1}\theta_1+m_{z2}\theta_2.$$

Уравнения (2.11) совместно с формулами (2.7), (2.10) и (2.11) описывают эффективную модель рассматриваемой среды и находятся в полном соответствии с результатами работы [13].

Следует отметить, что, согласно формулам (2.11), величины ρ_z и ρ_{fz} являются плотностями, осредненными соответственно по всей среде и по жидким фазам обоих слоев. Величины же ρ_x и ρ_{fx} выражаются по более сложным формулам и могут рассматриваться как эффективные плотности в случае, когда полные напряжения τ_{xx} и относительные смещения w_x осредняются с помощью соотношений (2.4). Подобное различие между эффективной плотностью вдоль оси x и реальной плотностью уже отмечалось в работе [4] в случае эффективной модели слоистой жидкой среды. В то же время в работе [11], где проводилось аналогичное осреднение, утверждается, что величины ρ_x и ρ_{fx} после осреднения являются реальными осредненными плотностями, равными соответственно ρ_z и ρ_{fz}. Такое утверждение находится в противоречии с предлагаемым подходом.

§3. Вывод эффективной модели слоистой среды в случае обращения в нуль на границах некоторых величин

Пусть задана среда, представленная на рис. 1, в которой волновое поле по-прежнему характеризуется величинами $p_1^{(i)},p_2^{(i)},\dots p_k^{(i)}$, $q_1^{(i)},q_2^{(i)},\dots q_{l_i}^{(i)}$ $(i=1,2)$ и эти величины также удовлетворяют уравнениям (1.2). На границах же между слоями выполняются несколько иные условия

$$p_1^{(1)}=p_1^{(2)},\quad p_2^{(1)}=p_2^{(2)},\dots p_{k-2}^{(1)}=p_{k-2}^{(2)},\quad p_k^{(1)}=p_k^{(2)}=0,\tag{3.1}$$

при этом последние два условия удовлетворяются на внешних границах $z = 0$ и $z = H$ среды.

Из величин $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots p_{k-2}^{(i)}$ составим одностолбцовые матрицы

$$\overline{\mathbf{W}}_i = \left(p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots p_{k-2}^{(i)}\right)^T \quad (i = 1, 2). \tag{3.2}$$

Так как эти матрицы удовлетворяют граничному условию

$$\overline{\mathbf{W}}_1 = \overline{\mathbf{W}}_2, \tag{3.3}$$

то полезно рассмотреть одну матрицу $\overline{\mathbf{W}}$, которая в слоях 1 и 2 равна соответственно $\overline{\mathbf{W}}_1$ и $\overline{\mathbf{W}}_2$. Выразим матрицу $\overline{\mathbf{W}}$ на границах периодов через матрицу $\overline{\mathbf{W}}(0)$. С этой целью используем выполняющиеся в рассматриваемой среде соотношения (1.7) и на их основании с привлечением граничных условий (3.1) запишем равенства

$$\begin{gathered}
p_1(h_1) = c_{11}^{(1)} p_1(0) + c_{12}^{(1)} p_2(0) + \dots + c_{1k-1}^{(1)} p_{k-1}(0+0),\\
p_2(h_1) = c_{21}^{(1)} p_1(0) + c_{22}^{(1)} p_2(0) + \dots + c_{1k-1}^{(1)} p_{k-1}(0+0),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
p_{k-1}(h_1 - 0) = c_{k-1,1}^{(1)} p_1(0) + \dots + c_{k-1,k-1}^{(1)} p_{k-1}(0+0),\\
0 = c_{k1}^{(1)} p_1(0) + c_{k2}^{(1)} p_2(0) + \dots + c_{k,k-1}^{(1)} p_{k-1}(0+0);
\end{gathered} \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}
p_1(h) = c_{11}^{(2)} p_1(h_1) + c_{12}^{(2)} p_2(h_1) + \dots + c_{1k-1}^{(2)} p_{k-1}(h_1+0),\\
p_2(h) = c_{21}^{(2)} p_1(h_1) + c_{22}^{(2)} p_2(h_1) + \dots + c_{1k-1}^{(2)} p_{k-1}(h_1+0),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
p_{k-1}(h_1 - 0) = c_{k-1,1}^{(2)} p_1(h_1) + \dots + c_{k-1,k-1}^{(2)} p_{k-1}(h_1+0),\\
0 = c_{k1}^{(2)} p_1(h_1) + c_{k2}^{(2)} p_2(h_1) + \dots + c_{k,k-1}^{(2)} p_{k-1}(h_1+0);
\end{gathered} \tag{3.5}$$

в которых $c_{lm}^{(i)}$ – элементы матриц $\mathbf{C}_i = e^{\mathbf{A}_1 h_i}$ и для разрывной функции $p_{k-1}(z)$ указаны пределы справа и слева. Из последних соотношений (3.4) и (3.5) выразим величины

$$p_{k-1}(0+0) =$$
$$= -\frac{c_{k,1}^{(1)}}{c_{k,k-1}^{(1)}} p_1(0) - \frac{c_{k,2}^{(1)}}{c_{k,k-1}^{(1)}} p_2(0) - \dots - \frac{c_{k,k-2}^{(1)}}{c_{k,k-1}^{(1)}} p_{k-2}(0),$$
$$p_{k-1}(h_1+0) = -\frac{c_{k,1}^{(2)}}{c_{k,k-1}^{(2)}} p_1(h_1) - \frac{c_{k,2}^{(2)}}{c_{k,k-1}^{(2)}} p_2(h_1) - \dots - \frac{c_{k,k-2}^{(2)}}{c_{k,k-1}^{(2)}} p_{k-2}(h_1) \tag{3.6}$$

и подставим их в остальные формулы (2.4) и (2.5). Полученные равенства представим в матричном виде

$$\overline{\mathbf{W}}(h_1) = \mathbf{D}_1 \overline{\mathbf{W}}(0), \quad \overline{\mathbf{W}}(h) = \mathbf{D}_2 \overline{\mathbf{W}}(h_1), \tag{3.7}$$

где

$$\mathbf{D}_i = \\ = \begin{pmatrix} c_{11}^{(i)} - \frac{c_{1,k-1}^{(i)} c_{k,1}^{(i)}}{c_{k,k-1}^{(i)}}, c_{12}^{(i)} - \frac{c_{1,k-1}^{(i)} c_{k,2}^{(i)}}{c_{k,k-1}^{(i)}}, \ldots c_{1k-2}^{(i)} - \frac{c_{1,k-1}^{(i)} c_{k,k-2}^{(i)}}{c_{k,k-1}^{(i)}} \\ c_{21}^{(i)} - \frac{c_{2,k-1}^{(i)} c_{k,1}^{(i)}}{c_{k,k-1}^{(i)}}, c_{22}^{(i)} - \frac{c_{2,k-2}^{(i)} c_{k,2}^{(i)}}{c_{k,k-1}^{(i)}}, \ldots c_{2,k-2}^{(i)} - \frac{c_{2,k-1}^{(i)} c_{k,k-2}^{(i)}}{c_{k,k-1}^{(i)}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_{k-2,1}^{(i)} - \frac{c_{k-2,k-1}^{(i)} c_{k,1}^{(i)}}{c_{k,k-1}^{(i)}}, \ldots c_{k-2,k-2}^{(i)} - \frac{c_{k-2,k-1}^{(i)} c_{k,k-2}^{(i)}}{c_{k,k-1}^{(i)}}, \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

На основании периодичности среды и соотношений (3.7) приходим к равенствам

$$\overline{\mathbf{W}}(mh) = (\mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1)^m \overline{\mathbf{W}}(0) \quad (m = 1, 2, \ldots n), \tag{3.9}$$

связыващим матрицы $\overline{\mathbf{W}}(mh)$ на границах периода с матрицей $\overline{\mathbf{W}}(0)$.

В выражениях (2.9) совершим предельный переход при условиях (1.9). С этой целью рассмотрим сперва малые толщины h_1 и h_2 и представим матрицы $\mathbf{C}_i = e^{h_i \mathbf{A}_i}$ приближенным равенством

$$\mathbf{C}_i = \mathbf{E} + \mathbf{A}_i h. \tag{3.10}$$

В соотношении (3.10) сохранены члены, которые не старше линейных относительно h_1 и h_2 Из формулы (3.10) следуют равенства

$$c_{lm}^{(i)} = \delta_{lm} + h_i\, a_{lm}^{(i)}, \tag{3.11}$$

где $\delta_{l,m}$ – символ Кронекера, а $a_{lm}^{(i)}$ – элементы матрицы $\mathbf{A}_i$. После подстановки выражения (3.11) в равенство (3.8) последнее заменяется формулой

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{E} + \mathbf{F}_i\, h_i, \tag{3.12}$$

где

$$\mathbf{D}_i = \begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} - \frac{a_{1,k-1}^{(i)} a_{k,1}^{(i)}}{a_{k,k-1}^{(i)}}, a_{12}^{(i)} - \frac{a_{1,k-1}^{(i)} a_{k,2}^{(i)}}{a_{k,k-1}^{(i)}}, \ldots a_{1k-2}^{(i)} - \frac{a_{1,k-1}^{(i)} a_{k,k-2}^{(i)}}{a_{k,k-1}^{(i)}} \\ a_{21}^{(i)} - \frac{a_{2,k-1}^{(i)} a_{k,1}^{(i)}}{a_{k,k-1}^{(i)}}, a_{22}^{(i)} - \frac{a_{2,k-1}^{(i)} a_{k,2}^{(i)}}{a_{k,k-1}^{(i)}}, \ldots a_{2,k-2}^{(i)} - \frac{a_{2,k-1}^{(i)} a_{k,k-2}^{(i)}}{a_{k,k-1}^{(i)}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k-2,1}^{(i)} - \frac{a_{k-2,k-1}^{(i)} a_{k,1}^{(i)}}{a_{k,k-1}^{(i)}}, \ldots a_{k-2,k-2}^{(i)} - \frac{a_{k-2,k-1}^{(i)} a_{k,k-2}^{(i)}}{a_{k,k-1}^{(i)}}, \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

С учетом равенств (3.12) и при сохранении только линейных членов относительно h_i формула (3.9) заменяется соотношением

$$\overline{\mathbf{W}}(mh) = [\mathbf{E} + h(\mathbf{F}_1\theta_1 + \mathbf{F}_2\theta_2]^m \ \overline{\mathbf{W}}(0). \tag{3.14}$$

Для проведения указанного предельного перехода отметим, что координата z произвольной точки среды представляется равенством

$$z = mh + \Delta z, \tag{3.15}$$

в котором натуральное число m определяется условием

$$0 < \Delta z < h. \tag{3.16}$$

При бесконечном увеличении числа периодов и при уменьшении толщины периода до 0 число m также неограниченно возрастает, при этом mh и m/n оказываются ограниченными. В результате (3.14) и (3.15) с учетом соотношения (1.12) заменяются равенствами

$$\overline{\mathbf{W}}(mh) = e^{mh(\mathbf{F}_1\theta_1 + \mathbf{F}_2\theta_2)}\overline{\mathbf{W}}(0), \quad mh = z, \tag{3.17}$$

из которых следует предельное соотношение

$$\overline{\mathbf{W}}(z) = e^{z(\mathbf{F}_1\theta_1 + \mathbf{F}_2\theta_2)}\overline{\mathbf{W}}(0), \tag{3.18}$$

выполняющееся во всех точках среды. Оно сохранится также и в том случае, если в выражениях (3.10) и (3.14) учитываются не только линейные члены. Чтобы ускорить приближение к предельному равенству (3.18) для точек вблизи поверхности $z = 0$, полезно, как и в §1, рассмотреть случай, когда слои перенумерованы в обратном порядке, а ось z имеет противоположное направление. После дифференцирования равенства (3.18) по z получим уравнение

$$\frac{\partial \overline{\mathbf{W}}}{\partial z} = (\mathbf{F}_1\theta_1 + \mathbf{F}_2\theta_2)\,\overline{\mathbf{W}}, \tag{3.19}$$

аналогичное уравнению (1.13).

Функции $p^{(i)}_{x-1}(x,z,t)$ определены с помощью равенств (3.6) на границах, а величины $p^{(i)}_k(x,z,t)$, согласно условиям (3.1), обращаются в нуль на всех границах. После указанного предельного перехода, когда все фиксированные точки оказываются на границах, имеют место равенства

$$
\begin{aligned}
&p^{(i)}_{k-1} = -\frac{1}{a^{(i)}_{k,k-1}}\left[a^{(i)}_{k,1}\,p_1 + a^{(i)}_{k,2}\,p_2 + \cdots + a^{(i)}_{k,k-2}\,p_{k-2}\right],\\
&p^{(i)}_k = (0),
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

записанные на основании соотношений (3.6) на границах. Величины $p^{(i)}_1, p^{(i)}_2, \ldots p^{(i)}_{k-2}, p^{(i)}_{k-1}$ и $p^{(i)}_k$, образующие, согласно первой формуле (1.4), одностолбцовую матрицу $\mathbf{W}_i$, определяют с помощью формул (1.15) матрицы $\mathbf{V}_i = (q^{(i)}_{k+1}, q^{(i)}_{k+2}, \ldots q^{(i)}_{k+l_i})^T$ во всей среде. Таким образом, волновое поле после предельного перехода описывается уравнениями (3.19), (3.20) и (1.15). Величины $p^{(i)}_{k-1}, q^{(i)}_1, q^{(i)}_2, \ldots q^{(i)}_l$, не входящие в граничные условия (3.1), могут быть осреднены или не осредняются в зависимости от условий, указанных в §1.

После изложения строгого вывода эффективной модели укажем более простые подходы к этому выводу. Предположим, что последние граничные условия (3.1) выполняются не только на всех границах, но и во всех точках среды. С учетом этого предположения выпишем в виде скалярных уравнений первое матричное равенство (1.3)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p^{(i)}_1}{\partial z} &= a^{(i)}_{11}p^{(i)}_1 + a^{(i)}_{12}p^{(i)}_2 + \cdots + a^{(i)}_{1k-2}p^{(i)}_{k-2} + a^{(i)}_{1k-1}p^{(i)}_{k-1},\\
\frac{\partial p^{(i)}_2}{\partial z} &= a^{(i)}_{21}p^{(i)}_1 + a^{(i)}_{22}p^{(i)}_2 + \cdots + a^{(i)}_{2k-2}p^{(i)}_{k-2} + a^{(i)}_{2k-1}p^{(i)}_{k-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial p^{(i)}_{k-2}}{\partial z} &= a^{(i)}_{k-21}p^{(i)}_1 + a^{(i)}_{k-22}p^{(i)}_2 + \cdots + a^{(i)}_{k-2k-2}p^{(i)}_{k-2} + a^{(i)}_{k-2k-1}p^{(i)}_{k-1},\\
\frac{\partial p^{(i)}_{k-1}}{\partial z} &= a^{(i)}_{k-11}p^{(i)}_1 + a^{(i)}_{k-12}p^{(i)}_2 + \cdots + a^{(i)}_{k-1k-2}p^{(i)}_{k-2} + a^{(i)}_{k-1k-1}p^{(i)}_{k-1},\\
0 &= a^{(i)}_{k1}p^{(i)}_1 + a^{(i)}_{k2}p^{(i)}_2 + \cdots + a^{(i)}_{kk-2}p^{(i)}_{k-2} + a^{(i)}_{kk-1}p^{(i)}_{k-1}.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Выразим из последнего равенства (3.21) величину $p^{(i)}_{k-1}$ и получим соотношение (3.20), которое подставим в первые $k-2$ равенства (3.21). В результате придем к соотношениям

$$\frac{\partial \mathbf{W}^{(i)}}{\partial z} = \mathbf{F}_i \, \mathbf{W}^{(i)}, \tag{3.22}$$

в которых матрица $\mathbf{F}_i$ представляется формулой (3.13). Осредненные по периоду производные $\partial p_j/\partial z$ выражаются соотношениями

$$\frac{\partial p_j}{\partial z} = \frac{\partial p_j^{(1)}}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial p_j^{(2)}}{\partial z}\theta_2 \quad (j = 1, 2, \dots k-2), \tag{3.23}$$

которые равносильны уравнению (3.19). Предпоследнее равенство (3.21) следует отбросить, так как оно содержит производную $\partial p_{k-1}^{(i)}/\partial z$ от функции $p_{k-1}^{(i)}(z)$, имеющей разрывы на границах. Функция $p_{k-1}^{(i)}(z)$ же выражается первым соотношением (3.20) через величины $p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots p_{k-2}^{(i)}$.

Если исходить из уравнений (1.2) и граничных условий (3.1), то вывод уравнений эффективной модели сводится к следующим операциям:

1. На основании граничных условий положить в уравнениях (1.2) $p_k^{(i)} = 0$, $p_1^{(1)} = p_1^{(2)}$, $p_2^{(1)} = p_2^{(2)}, \dots p_{k-2}^{(1)} = p_{k-2}^{(2)}$, при этом $\partial p_1^{(1)}/\partial z \neq \partial p_1^{(2)}/\partial z$, $\partial p_2^{(1)}/\partial z \neq \partial p_2^{(2)}/\partial z, \dots \partial p_{k-1}^{(1)}/\partial z \neq \partial p_{k-1}^{(2)}/\partial z$.

2. Добавить уравнения (3.23).

3. Исключить из образовавшейся системы уравнений величины $\partial p_1^{(1)}/\partial z$, $\partial p_1^{(2)}/\partial z$, $\partial p_2^{(1)}/\partial z$, $\partial p_2^{(2)}/\partial z, \dots \partial p_{k-2}^{(1)}/\partial z$, $\partial p_{k-2}^{(2)}/\partial z$, $\partial p_{k-1}^{(1)}/\partial z$, $\partial p_{k-1}^{(2)}/\partial z$. После этих операций система уравнений содержит $l_1 + l_2 + k$ уравнений относительно $l_1 + l_2 + k$ величин p_1, $p_2, \dots p_k$, $q_1^{(1)}$, $q_2^{(1)}, \dots q_{l_1}^{(1)}$, $q_1^{(2)}, q_2^{(2)}, \dots q_{l_2}^{(2)}$.

4. В этой системе уравнений следует провести осреднение величин $q_j^{(i)}$ в соответствии с условиями, указанными в §1. В результате этого осреднения определяется количество уравнений и количество фаз в эффективной модели.

§4. Вывод эффективной модели слоистой пористой среды с контактом проскальзывания на границах

В качестве примера рассмотрим пористую слоистую периодическую трансверсально-изотропную среду (рис. 1), в которой оба слоя также описываются обобщенными уравнениями Био

(2.1). На границах между слоями выполняются условия

$$u_{z1} = u_{z2}, \quad w_{z1} = w_{z2}, \quad \tau_{zz1} = \tau_{zzz}, \quad p_1 = p_2, \quad \tau_{xz1} = \tau_{xz2} = 0, \tag{4.1}$$

аналогичные условиям (3.1), при этом два последних условия удовлетворяются также и при $z = 0$ и $z = H$.

Согласно §3 и соотношениям (4.1), мы предполагаем, что

$$\tau_{xz} = 0, \quad \partial\tau_{xz}/\partial z = 0 \tag{4.2}$$

во всей среде, и отбрасываем четвертое уравнение (2.1), так как оно содержит производную $\partial u_x/\partial z$ от разрывной функции $u_x(z)$. После этих операций число неизвестных функций и число уравнений в каждом слое сокращается до 7. Из условий (4.1) также следует, что функции u_z, w_z, τ_{zz} и p, которые в слоях 1 и 2 равны соответственно u_{zi}, w_{zi}, τ_{zzi} и p_i $(i = 1, 2)$, являются непрерывными вне фронтов во всем интервале $0 \leqslant z \leqslant H$. Их производные, согласно предположениям (3.23), представляются равенствами

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial u_{z2}}{\partial z}\theta_2, \quad \frac{\partial w_z}{\partial z} = \frac{\partial w_{z1}}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial w_{z2}}{\partial z}\theta_2, \\ \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial \tau_{zz2}}{\partial z}\theta_2, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p_1}{\partial z}\theta_1 + \frac{\partial p_2}{\partial z}\theta_2. \end{gathered} \tag{4.3}$$

Чтобы записать уравнения для осредненных производных (4.3) и других осредняемых и неосредняемых величин, представим уравнения (4.1) с учетом сделанных предположений равенствами

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_{zi}}{\partial z} = -\alpha_{1i}\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + \alpha_{6i}\tau_{zz} + \alpha_{4i}p, \\ \frac{\partial w_{zi}}{\partial z} + \frac{\partial w_{xi}}{\partial x} = \alpha_{2i}\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} - \alpha_{4i}\tau_{zz} - \alpha_{5i}p, \\ \tau_{xxi} = \alpha_{3i}\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + \alpha_{1i}\tau_{zz} + \alpha_{2i}p, \\ \beta_{1i}\frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2} - \beta_{2i}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xxi}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 w_{xi}}{\partial t^2} = -\beta_{2i}\frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2} - \beta_{3i}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial \tau_{zzi}}{\partial z} = \rho_{zi}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_{fzi}\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}, \end{gathered} \tag{4.4}$$

$$-\frac{\partial p_i}{\partial z} = \rho_{fzi}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + m_{zi}\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2),$$

где использованы обозначения (2.7). Анализ уравнений (4.4) показывает, что кроме осреднения производных (4.3), можно еще провести осреднение относительных смещений w_{xi} по формуле

$$w_x = w_{x1}\,\theta_1 + w_{x2}\,\theta_2. \tag{4.5}$$

Такое осреднение оказалось возможным, так как величины w_{xi} входят только во второе и пятое уравнения (4.4) в виде производных по x и t и не имеют коэффициентов и так как после этого осреднения сохраняется вид уравнений закона Гука и уравнений движения сплошной пористой среды. Хотя напряжение τ_{xxi} и его производная по x также входят в уравнения (4.4) без коэффициентов, осреднение этих величин нельзя проводить, поскольку в этом случае или существенно усложняется форма окончательных уравнений, или количество уравнений оказывается меньше на единицу числа неизвестных.

После осреднения уравнений (4.4) по формулам (4.3) и (4.5) приходим к уравнениям

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\alpha_{11}\,\theta_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} - \alpha_{12}\,\theta_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + A_6\,\tau_{zz} + A_4\,p,$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} + \frac{\partial w_x}{\partial x} = \alpha_{21}\,\theta_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \alpha_{22}\,\theta_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} - A_4\,\tau_{zz} - A_5\,p, \tag{4.6}$$

$$\tau_{xxi} = \alpha_{3i}\frac{\partial u_{xi}}{\partial x} + \alpha_{1i}\,\tau_{zz} + \alpha_{2i}\,p \quad (i = 1, 2);$$

$$\beta_{1i}\frac{\partial^2 u_{xi}}{\partial t^2} - \beta_{2i}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xxi}}{\partial x} = 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2} = -\beta_{21}\,\theta_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} - \beta_{22}\,\theta_2\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2} - B_3\frac{\partial p}{\partial x}; \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial \tau_z}{\partial z} = (\rho_{z1}\,\theta_1 + \rho_{z2}\,\theta_2)\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + (\rho_{fz1}\,\theta_1 + \rho_{fz2}\,\theta_2)\,\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = (\rho_{fz1}\,\theta_1 + \rho_{fz2}\,\theta_2)\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + (m_{z1}\,\theta_1 + m_{z2}\,\theta_2)\,\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}, \tag{4.8}$$

в которых используются обозначения (2.10). Решая уравнения (4.6) относительно τ_{xx1}, τ_{xx2}, τ_{zz}, p и выражая производные

$\partial\tau_{xx1}/\partial x$, $\partial\tau_{xx2}/\partial x$, $\partial p/\partial x$ из соотношений (4.7), придем к уравнениям

$$\theta_1\,\tau_{xx1} = P_{11}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \tilde F_1\frac{\partial u_z}{\partial z} + \tilde M_1\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

$$\theta_2\,\tau_{xx2} = P_{12}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \tilde F_2\frac{\partial u_z}{\partial z} + \tilde M_2\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right),$$

$$\tau_{zz} = \tilde F_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \tilde F_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + C\frac{\partial u_z}{\partial z} + Q\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right), \tag{4.9}$$

$$-p = \tilde M_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \tilde M_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + Q\frac{\partial u_z}{\partial z} + R\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right);$$

$$\theta_1\,\frac{\partial\tau_{xx1}}{\partial x} = \rho_{x11}\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \rho_{x12}\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2} + \tilde\rho_{fx1}\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},$$

$$\theta_2\,\frac{\partial\tau_{xx2}}{\partial x} = \rho_{x12}\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \rho_{x22}\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2} + \tilde\rho_{fx2}\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}, \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \tilde\rho_{fx1}\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \tilde\rho_{fx2}\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2} + m_x\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},$$

в которых коэффициенты C, Q, R и m_x определены равенствами (2.11), а остальные коэффициенты имеют выражения

$$P_{11} = \theta_1\left(\alpha_{31} + \theta_1\frac{A_5\,\alpha_{11}^2 - 2A_4\,\alpha_{11}\,\alpha_{21} + A_6\,\alpha_{21}^2}{A_5\,A_6 - A_4^2}\right),$$

$$P_{12} = \theta_1\,\theta_2\frac{A_5\,\alpha_{11}\,\alpha_{12} + A_6\,\alpha_{21}\,\alpha_{22} - A_4(\alpha_{11}\,\alpha_{22} + \alpha_{12}\,\alpha_{21})}{A_5\,A_6 - A_4^2},$$

$$P_{22} = \theta_2\left(\alpha_{32} + \theta_2\frac{A_5\,\alpha_{12}^2 - 2A_4\,\alpha_{12}\,\alpha_{22} + A_6\,\alpha_{22}^2}{A_5\,A_6 - A_4^2}\right), \tag{4.11}$$

$$\tilde F_1 = \theta_1\frac{\alpha_{11}\,A_5 - \alpha_{21}\,A_4}{A_5\,A_6 - A_4^2}, \quad \tilde F_2 = \theta_2\frac{\alpha_{12}\,A_5 - \alpha_{22}\,A_4}{A_5\,A_6 - A_4^2},$$

$$\tilde M_1 = \theta_1\frac{\alpha_{11}\,A_4 - \alpha_{21}\,A_5}{A_5\,A_6 - A_4^2}, \quad \tilde M_2 = \theta_2\frac{\alpha_{12}\,A_4 - \alpha_{22}\,A_5}{A_5\,A_6 - A_4^2};$$

$$\rho_{11} = \theta_1\left(\beta_{11} + \frac{\beta_{21}^2\,\theta_1}{B_3}\right) = \frac{\theta_1\rho_{x1}\,m_{x2} + \theta_2(\rho_{x1}\,m_{x1} - \rho_{fx1}^2)}{\theta_1\,m_{x2} + \theta_2\,m_{x1}}\,\theta_1,$$

$$\rho_{12} = \frac{\beta_{21}\,\beta_{22}\,\theta_1\,\theta_2}{B_3} = \frac{\rho_{fx1}\,\rho_{fx2}\,\theta_1\,\theta_2}{\theta_1\,m_{x2} + \theta_2\,m_{x1}}, \tag{4.12}$$

$$\rho_{22} = \theta_2\left(\beta_{12} + \frac{\beta_{22}^2\,\theta_2}{B_3}\right) = \frac{\theta_2\rho_{x2}\,m_{x1} + \theta_1(\rho_{x2}\,m_{x2} - \rho_{fx2}^2)}{\theta_1\,m_{x2} + \theta_2\,m_{x1}}\,\theta_2,$$

$$\tilde\rho_{fx1} = \frac{\beta_{21}\,\theta_1}{B_3} = \frac{\rho_{fx1}\,m_{x2}\,\theta_1}{\theta_1\,m_{x2} + \theta_2\,m_{x1}}, \quad \tilde\rho_{fx2} = \frac{\beta_{22}\,\theta_2}{B_3} = \frac{\rho_{fx2}\,m_{x1}\,\theta_2}{\theta_1\,m_{x2} + \theta_2\,m_{x1}}.$$

Уравнения (4.8)–(4.10) совместно с формулами (4.11) и (4.12) описывают волновое поле в эффективной модели, которая является трехфазной. Первая фаза характеризуется смещениями u_{x1}, u_z и напряжениями τ_{xx1}, τ_{zz}, а вторая фаза описывается смещениями u_{x2}, u_z и напряжениями τ_{xx2}, τ_{zz}. Обе эти фазы связаны со скелетом, который состоит из твердых частиц первого и второго слоев. Третья фаза является жидкой и характеризуется относительными смещениями w_x, w_z и давлением p. Жидкости из обоих слоев осредняются в "одну жидкость."

Проведем энергетическое исследование полученной трехфазной модели. С этой целью помножим первое уравнение (4.8) на $\partial u_z/\partial t$, второе уравнение (4.8) на $\partial w_z/\partial t$ и три уравнения (4.10) помножим соответственно на $\partial u_{x1}/\partial t$, $\partial u_{x2}/\partial t$ и $\partial w_x/\partial t$. Полученные пять уравнений сложим почленно. После несложных преобразований образовавшегося уравнения с учетом уравнений закона Гука (4.9) придем к соотношению энергетического баланса

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial p_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}(W_k + W_p), \tag{4.13}$$

в котором

$$\begin{aligned} p_x &= \theta_1\,\tau_{xx1}\frac{\partial u_{x1}}{\partial t} + \theta_2\,\tau_{xx2}\frac{\partial u_{x2}}{\partial t} - p\frac{\partial w_x}{\partial t}, \\ p_z &= \tau_{zz}\,\frac{\partial u_z}{\partial t} - p\frac{\partial w_z}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.14}$$

– потоки энергий вдоль осей x и z,

$$W_k = \frac{1}{2}\left[\rho_{x11}\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\right)^2 + 2\rho_{x12}\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\,\frac{\partial u_{x2}}{\partial t} + \rho_{x22}\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2 + \right.$$

$$+2\tilde\rho_{fx1}\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\,\frac{\partial w_x}{\partial t} + 2\tilde\rho_{fx2}\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\,\frac{\partial w_x}{\partial t} + m_x\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w_x}{\partial t}\right)^2 +$$

$$+\left(\rho_{z1}\,\theta_1+\rho_{z2}\,\theta_2\right)\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2+2\left(\rho_{fx1}\,\theta_1+\rho_{fx2}\,\theta_2\right)\frac{\partial u_z}{\partial t}\,\frac{\partial w_z}{\partial t}+$$

$$\left.\left(m_{z1}\,\theta_1+m_{z2}\,\theta_2\right)\left(\frac{\partial w_z}{\partial t}\right)^2\right], \tag{4.15}$$

$$W_p=\frac{1}{2}\left[P_{11}\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\right)^2+P_{22}\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)^2+C\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2+R\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)^2+\right.$$

$$+2P_{12}\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\,\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}+2\tilde{F}_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\,\frac{\partial u_z}{\partial z}+2\tilde{F}_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\,\frac{\partial u_z}{\partial z}+$$

$$+2\tilde{M}_1\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)+2\tilde{M}_2\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)+$$

$$\left.+2Q\frac{\partial u_z}{\partial z}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_z}{\partial z}\right)\right] \tag{4.16}$$

– плотности кинетической и потенциальной энергий. Выражение (4.15) представляет собой сумму двух квадратичных форм относительно аргументов $\partial u_{x1}/\partial t$, $\partial u_{x2}/\partial t$, $\partial w_x/\partial t$ и аргументов $\partial u_z/\partial t$, $\partial w_z/\partial t$, а правая часть соотношения (4.16) является квадратичной формой, зависящей от величин $\partial u_{x1}/\partial x$, $\partial u_{x2}/\partial x$, $\partial u_z/\partial t$ и $\partial w_x/\partial x+\partial w_z/\partial z$. Так как все три упомянутые квадратичные формы оказываются положительно определенными, то эффективная модель является энергетически устойчивой.

Рассмотрим теперь частный случай, когда в заданной среде оба слоя состоят из одинакового материала и

$$P_1=P_2,\quad C_1=C_2,\quad R_1=R_2,\quad M_1=M_2,$$

$$F_1=F_2,\quad Q_1=Q_2,\quad L_1=L_2,$$

$$\rho_{x1}=\rho_{x2},\quad \rho_{fx1}=\rho_{fx2},\quad m_{x1}=m_{x2},$$

$$\rho_{z1}=\rho_{z2},\quad \rho_{fz1}=\rho_{fz2},\quad m_{z1}=m_{z2}. \tag{4.17}$$

Граничные условия (4.1) в этом случае по-прежнему выполняются. При условиях (4.17) предельные смещения u_{x1} и u_{x2} оказываются одинаковыми и

$$u_{x1}=u_{x2}, \tag{4.18}$$

а напряжения σ_{xx1} и σ_{xx2} определяются по формуле

$$\sigma_{xx}=\sigma_{xx1}\,\theta_1+\sigma_{xx2}\,\theta_2. \tag{4.19}$$

Используя соотношения (4.17)–(4.19), приходим после ряда преобразований уравнений (4.8)–(4.10) к уравнениям

$$
\begin{aligned}
&\tau_{xx} = P\frac{\partial u_x}{\partial x} + F\frac{\partial u_z}{\partial z} + M\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
&\tau_{zz} = F\frac{\partial u_x}{\partial x} + C\frac{\partial u_z}{\partial z} + Q\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
&-p = M\frac{\partial u_x}{\partial x} + Q\frac{\partial u_z}{\partial z} + R\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right),\\
&\tau_{xz} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = \rho_x\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \rho_{fx}\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
&\quad -\frac{\partial p}{\partial x} = \rho_{fx}\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + m_x\frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2},\\
&\quad \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \rho_z\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_{fz}\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},\\
&\quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_{fz}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + m_z\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

в которых коэффициенты P, F, M, C, Q, R, ρ_x, ρ_{fx}, m_x, ρ_z, ρ_{fz} и m_z совпадают с соответствующими коэффициентами, характеризующими заданные одинаковые пористые слои. По сравнению с уравнениями (2.1) в уравнениях (4.20) касательное напряжение τ_{xz} и его производная $\partial\tau_{xz}/\partial z$ обращаются в нуль и $L = 0$.

В заключение отметим, что проведенные в работе [13] выводы эффективных моделей в случае чередований пористого и упругого слоев, а также пористого и жидкого слоев оправдывается исследованиями §3. Остановимся только на самых существенных моментах этих выводов. В случае пористо-упругой среды вследствие граничных условий (3.2) [13] необходимо в уравнениях (2.5) и (2.6) положить $w_{zi} = 0$ и отбросить последнее уравнение (2.6) как содержащее производную $\partial p_i/\partial z$ разрывной функции. При использовании уравнений теории упругости стандартными путями получаются уравнения (3.9) и (3.10) [13] модели пористо-упругой среды. В случае пористо-жидкой среды на основании граничных условий (4.2) [13] следует в уравнениях (2.5) и (2.6) положить $\tau_{xzi} = 0$ и $p_i + \tau_{zzi} = 0$. Особенность вывода в этом случае состоит в том, что из уравнений (2.5) и (2.6) исключаются не одно, а два уравнения. Окончательные уравнения эффективной модели представляются равенствами (4.18) и (4.19) [13].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (96-05-65904).

Литература

1. G. E. Backus, *Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering.* — J. Geophys. Res. **67, No. 11** (1962), 4427–4400.
2. E. Sanchez-Palencia, *Non-homogeneous media and vibration theory.* — Lecture Notes in Physics, Berlin: Springer-Verlag **127** (1980), 398.
3. Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в неоднородных средах. Математические задачи механики композиционных материалов.* Наука, М. (1984), 352с.
4. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233.
5. Л. А. Молотков, *О новом способе вывода уравнений осредненной эффективной модели периодических сред.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **195** (1991), 82–102.
6. M. Schoenberg, F. Muir, *A calculus for finely layered anisotropic media.* — Geophysics **54, No. 5** (1989), 581–589.
7. T. J. Plona, K. W. Winkler, M. Schoenberg, *Acoustic waves alternating fluid/solid layers.* — J. Acoust. Soc. Am. **81, No. 5** (1987), 1227–1234.
8. R. H. Tatham, M. D. Matthews, K. K. Sekharan, C. J. Wade, L. M. Liro, *A physical model study of shear-wave splitting and fracture intensity.* — Geophysics **57, No. 5** (1992), 647–652.
9. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективная модель трещиноватой среды с трещинами, описываемыми поверхностями разрывов смещений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **218** (1994), 118–137.
10. C-J. Hsu, M. Schoenberg, *Elastic waves through a simulated fractured medium.* — Geophysics **58, No. 7** (1993), 964–977.
11. S. Gelinsky, S. Shapiro, *Poroelastic effective media model for fractured and layered reservoir rock.* 65th Annual International Meeting, Society of Exploration Geophysists, Expanded Abstracts (1995), 922–925.
12. M. A. Biot, *Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I Low-frequency range.* — J. Acoust. Soc. Am. **28, No. 2** (1956), 168–178.
13. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективные модели слоистых сред, содержащих пористые слои Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **239** (1997), 140–163.
14. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 105–122.
15. Л. А. Молотков, *Об эффективной модели, описывающей слоистую периодическую упругую среду с контактами проскальзывания на границах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **210** (1994), 192–212.

Molotkov L. A. On the derivation methods of the equations describing the effective models of layered media.

The derivation methods of the equations describing the effective models of layered periodic media are represented. Elastic and fluid media and porous Biot media can be as such ones. At first the effective models are derived by the strict approach and then some operations of the derivation are changed for more simple operations giving right results. As result the comparatively simple and justified method of derivation of the effective model equations is established. In particular, this method allows rather to simplify and to justify the derivation of the effective model in the case of media containing the Biot layers and to establish the equations of the effective model of the porous layered medium intersected by fractures on which there is slide contact.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 26 ноября 1997 г.