Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

А. В. Шанин

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ В ТРЕУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ С ИМПЕДАНСНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Введение

В настоящей работе рассматривается задача о возбуждении волнового поля в области, представляющей собой равносторонний треугольник с импедансными границами. Такой областью может быть акустический волновод или резонатор.

Следует отметить, что аналогичная задача с идеальными граничными условиями (Дирихле или Неймана) может быть легко решена методом отражений [1]. К сожалению, этот метод оказывается непригодным в случае импедансных граничных условий. Кроме того, очевидно, метод разделения переменных к такой задаче также неприменим. Для решения поставленной задачи в настоящей работе используются функциональные уравнения типа Малюжинца [2].

Данная работа построена следующим образом.

В *первом разделе* работы с помощью II формулы Грина выводится функциональное уравнение, использующее в качестве неизвестной функции Фурье-образ поля на границе области. Это уравнение упрощается с использованием свойств симметрии задачи. Результатом является функциональное уравнение, связывающее линейным образом значения неизвестной функции $\widehat{u}(\varphi)$ в точках φ, $\varphi + 2\pi/3$ и $\varphi - 2\pi/3$ при произвольном φ. Формулируются ограничения, накладываемые на неизвестную функцию. Эти ограничения выражаются в условиях аналитичности и убывания на бесконечности и являются следствием известных теорем о свойствах преобразования Фурье финитных функций.

Во *втором разделе* к полученному функциональному уравнению применяется метод отражений. В результате удается исключить из функционального уравнения значение неизвестной функции при одном из трех значений аргументов.

Данная работа поддержана грантом INTAS 96-441.

В *третьем разделе* исследуется вопрос о собственных значениях и собственных функциях указанной области. Показано, что собственные функции являются линейными комбинациями плоских волн.

В *четвертом разделе* решается задача с неоднородными граничными условиями. Решение представлено в виде ряда по корням некоторой целой функции, выражающей свойства границы области.

В *пятом разделе* указана процедура восстановления волнового поля внутри области. С помощью II формулы Грина построено интегральное представление поля.

В *шестом разделе* исследуется поведение полученного решения в случае, когда сторона треугольника велика по сравнению с длиной волны, а среда обладает малым затуханием. Показано, что в этом случае решение переходит в полученное ранее решение для угловой области с импедансными границами.

1. Постановка задачи и вывод функциональных уравнений

Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной L. Положение этого треугольника на координатной плоскости показано на Рис. 1. Пронумеруем стороны треугольника числами 0, 1, 2 в положительном направлении, начиная с горизонтальной стороны. Введем локальные линейные координаты l_0, l_1, l_2 вдоль каждой из сторон треугольника, как показано на рисунке. Очевидно, что каждая из этих координат принимает значения от 0 до L. Эти координаты удобны при работе с функциями, определенными на сторонах треугольника. Далее будем обозначать, например, символом $u(l_0)$ значения функции u на стороне 0, а символом $u(a)|_{l_0}$ значение функции u в той точке стороны 0, где переменная l_0 принимает значение a.

Символом n будем обозначать внутреннюю нормаль к границе треугольника. На Рис. 1 показан угол φ, используемый при выводе функциональных уравнений.

Пусть внутри треугольника для некоторый функции $u(x, y)$ выполняется уравнение Гельмгольца:

$$\Delta u + k_0^2 u = 0. \tag{1}$$

Отметим, что рассматривается стационарная задача, причем зависимость от времени выбирается в виде $e^{i\omega t}$, что соответству-

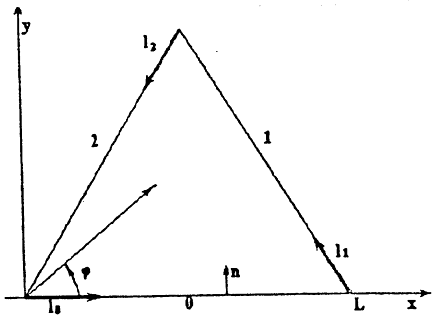

Рис. 1. Геометрия задачи.

ет выбору волны, распространяющейся в положительном направлении оси x в виде e^{-ikx}.

На границе треугольника выполняются импедансные граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial n} - iuk_0 \sin\beta = \Phi, \qquad (2)$$

где $\sin\beta$ – параметр, а Φ – заданные функции, определенные на сторонах треугольника и имеющие смысл вынуждающих сил. В случае однородных граничных условий ($\Phi = 0$) коэффициент отражения плоской волны, падающей под углом ψ на поверхность, равен

$$K_{\mathrm{ref}} = \frac{\sin\psi - \sin\beta}{\sin\psi + \sin\beta}.$$

Отсюда условием пассивного характера поверхности является условие

$$\mathrm{Re}[\sin\beta] \geqslant 0.$$

Необходимо потребовать выполнения Мейкснеровских условий в углах треугольника. Если r – расстояние до вершины треугольника, функция u ведет себя вблизи вершины как

$$u \sim U_0 + o(r^\delta), \quad \text{где} \quad \delta > 0.$$

Приступим к выводу функционального уравнения. Для этого воспользуемся второй формулой Грина:

$$\int \left[u' \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u'}{\partial n} \right] d\Gamma = 0, \qquad (3)$$

где функция u' – произвольное решение уравнения (1) в рассматриваемой области, а интегрирование проводится по границе области.

В качестве u' выберем плоскую волну, распространяющуюся под углом φ к оси x:

$$u' = e^{-ik_0(x\cos\varphi + y\sin\varphi)}.$$

Поскольку интегрирование в (3) проводится по границе треугольника, имеет смысл выяснить, что представляет собой ограничение u' на сторонах треугольника. Несложные вычисления показывают, что зависимости имеют вид:

$$\begin{aligned}
u'(l_0) &= e^{-ik_0 l_0\cos\varphi}\\
u'(l_1) &= e^{-ik_0 L\cos\varphi} e^{-ik_0 l_1\cos(\varphi-2\pi/3)}\\
u'(l_2) &= e^{-ik_0 L\cos(\varphi-\pi/3)} e^{-ik_0 l_2\cos(\varphi+2\pi/3)}.
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляются нормальные производные u':

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'(l_0)}{\partial n} &= -ik_0\sin\varphi e^{-ik_0 l_0\cos\varphi},\\
\frac{\partial u'(l_1)}{\partial n} &= -ik_0\sin(\varphi-2\pi/3)e^{-ik_0 L\cos\varphi}\, e^{-ik_0 l_1\cos(\varphi-2\pi/3)},\\
\frac{\partial u'(l_2)}{\partial n} &= -ik_0\sin(\varphi+2\pi/3)e^{-ik_0 L\cos(\varphi-\pi/3)}\, e^{-ik_0 l_2\cos(\varphi+2\pi/3)}.
\end{aligned}$$

Нормальная производная поля u, входящая в (3), вычисляется с помощью соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \Phi + iuk_0\sin\beta,$$

непосредственно следующего из граничных условий (2).

Полученные соотношения можно подставить в уравнение (3).

Получим

$$0 = \int_0^L [-iu(l_0)k_0(\sin\varphi + \sin\beta) - \Phi(l_0)]e^{-ik_0 l_0 \cos\varphi} dl_0 +$$
$$+ \int_0^L e^{-ik_0 L\cos\varphi} \left[-iu(l_1)k_0\left(\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\beta\right) - \Phi(l_1)\right] \times$$
$$\times e^{-ik_0 l_1 \cos(\varphi - 2\pi/3)} dl_1 +$$
$$+ \int_0^L e^{-ik_0 L\cos(\varphi-\pi/3)} \left[-iu(l_2)k_0\left(\sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\beta\right) - \Phi(l_2)\right] \times$$
$$\times e^{-ik_0 l_2 \cos(\varphi + 2\pi/3)} dl_2. \tag{4}$$

Воспользуемся естественной симметрией задачи относительно поворота вокруг геометрического центра на угол $2\pi/3$. Рассмотрим три независимых задачи, обладающие свойствами

$$u_\nu(l)\big|_{l_1} = e^{2\pi i\nu/3}u_\nu(l)\big|_{l_0}, \quad u_\nu(l)\big|_{l_2} = e^{-2\pi i\nu/3}u_\nu(l)\big|_{l_0}$$
$$\Phi_\nu(l)\big|_{l_1} = e^{2\pi i\nu/3}\Phi_\nu(l)\big|_{l_0}, \quad \Phi_\nu(l)\big|_{l_2} = e^{-2\pi i\nu/3}\Phi_\nu(l)\big|_{l_0},$$

где ν принимает значения 0,1,-1. Очевидно, что каждому типу симметрии u соответствует тот же тип симметрии Φ.

Фактически, проделанное преобразование есть дискретное преобразование Фурье по номеру стороны. Более точно, формулы прямого и обратного преобразования имеют вид

$$u_\nu(l) = \frac{1}{3}\left[u(l)\big|_{l_0} + e^{-2\pi i\nu/3}u(l)\big|_{l_1} + e^{-4\pi i\nu/3}u(l)\big|_{l_2}\right],$$
$$u(l)\big|_{l_j} = u_0(l) + e^{2\pi i j/3}u_1(l) + e^{4\pi i j/3}u_2(l).$$

Аналогичные формулы выполняются для Φ.

Далее рассматривается задача, принадлежащая к одному из описанных типов, и индекс ν не выписывается.

Интегралы, входящие в (4) имеют форму интегралов Фурье.

Определим прямое преобразование Фурье следующим образом:

$$\widehat{u}(\varphi) = \int\limits_0^L u(l) e^{-ik_0 l\cos\varphi}\, dl$$
$$\widehat{\Phi}(\varphi) = \frac{i}{k_0}\int\limits_0^L \Phi(l) e^{-ik_0 l\cos\varphi}\, dl. \tag{5}$$

Отметим, что комбинация, соответствующая пространственной частоте, есть $k_0\cos\varphi$. Следовательно, формула обратного преобразования имеет вид

$$u(l) = \frac{k_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\varphi) e^{ik_0 l\cos\varphi}\, d\cos\varphi.$$

С учетом введенных обозначений уравнение (4) имеет вид

$$\begin{gathered}(\sin\varphi + \sin\beta)\widehat{u}(\varphi) + \\ + e^{-i(k_0 L\cos\varphi - 2\pi\nu/3)}\left(\sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\beta\right)\widehat{u}\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \\ + e^{-i(k_0 L\cos(\varphi-\pi/3) + 2\pi\nu/3}\left(\sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\beta\right)\widehat{u}\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = \\ = \widehat{\Phi}(\varphi) + e^{-i(k_0 L\cos\varphi - 2\pi\nu/3)}\widehat{\Phi}\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right) + \\ + e^{-i(k_0 L\cos(\varphi-\pi/3) + 2\pi\nu/3}\widehat{\Phi}\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right).\end{gathered} \tag{6}$$

Неизвестный в этом уравнении является функции $\widehat{u}(\varphi)$. В том случае, если удастся найти эту зависимость (для всех трех значений ν), можно восстановить значения поля и его производной на всей границе области. После этого можно известными методами восстановить поле внутри области.

Для того, чтобы решить уравнение (6), необходимо учесть ограничения на функцию $\widehat{u}(\varphi)$, следующие из определения (5).

Очевидно, что $\widehat{u}(\varphi)$ – целая функция переменной φ, обладающая симметрией и периодичностью

$$\widehat{u}(-\varphi) = \widehat{u}(\varphi), \quad \widehat{u}(\varphi + 2\pi) = \widehat{u}(\varphi) \tag{7}$$

Мейкснеровские условия в углах треугольника приводят к ограничениям на рост неизвестной функции

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\varphi) < D|\cos\varphi|^{-1}e^{-ik_0L\cos\varphi}, \quad \mathrm{Im}[\cos\varphi] > 0 \\ \widehat{u}(\cos\varphi) < D|\cos\varphi|^{-1}, \quad \mathrm{Im}[\cos\varphi] < 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Уравнение (6) является функциональным в том смысле, что оно связывает значения неизвестной функции при трех различных значениях аргумента.

2. Применение метода отражений к функциональному уравнению

В уравнение (6) входят неизвестные значения $\widehat{u}(\varphi)$, $\widehat{u}(\varphi-2\pi/3)$, $\widehat{u}(\varphi+2\pi/3)$. Выполним в уравнении (6) формальную замену $\varphi \to -\varphi$ и воспользуемся свойствами (7). Неизвестные значения трансформируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \widehat{u}(\varphi) &\to \widehat{u}(-\varphi) = \widehat{u}(\varphi), \\ \widehat{u}(\varphi-2\pi/3) &\to \widehat{u}(-\varphi-2\pi/3) = \widehat{u}(\varphi+2\pi/3), \\ \widehat{u}(\varphi+2\pi/3) &\to \widehat{u}(-\varphi+2\pi/3) = \widehat{u}(\varphi-2\pi/3). \end{aligned}$$

Следовательно, полученное в результате проведенной замены переменной уравнение содержит те же неизвестные значения, однако с другими коэффициентами. Более точно, получается уравнение

$$\begin{gathered} (-\sin\varphi+\sin\beta)\widehat{u}(\varphi)+ \\ +e^{-i(k_0L\cos\varphi-2\pi\nu/3)}\left(-\sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\beta\right)\widehat{u}\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)+ \\ +e^{-i(k_0L\cos(\varphi+\pi/3)+2\pi\nu/3)}\left(-\sin\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\beta\right)\widehat{u}\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)= \\ =\widehat{\Phi}(\varphi)+e^{-i(k_0L\cos\varphi-2\pi\nu/3)}\widehat{\Phi}\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)+ \\ +e^{-i(k_0L\cos(\varphi+\pi/3)+2\pi\nu/3)}\widehat{\Phi}\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right). \end{gathered} \tag{9}$$

Уравнение (9) позволяет исключить из уравнения (6) одну из трех неизвестных величин, например, $\widehat{u}(\varphi)$:

$$\frac{\widehat{u}(\varphi-2\pi/3)}{f(\varphi-2\pi/3)}-\frac{\widehat{u}(\varphi+2\pi/3)}{f(\varphi+2\pi/3)}=\mu(\varphi), \tag{10}$$

где

$$\mu(\varphi) = -\frac{2\sin\varphi\widehat{\Phi}(\varphi)\lambda\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\lambda\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)}{f\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)f\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)}+$$
$$+\frac{\left[(\sin\beta-\sin\varphi)-(\sin\beta+\sin\varphi)\lambda\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\right]\widehat{\Phi}\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)}{f\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)f\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)}- \qquad (11)$$
$$-\frac{\left[(\sin\beta+\sin\varphi)-(\sin\beta-\sin\varphi)\lambda\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\widehat{\Phi}\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)}{f\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)f\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)},$$

$$f(\varphi) = \left(\sin\beta+\sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(\sin\beta-\sin\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)\right)-$$
$$\left(\sin\beta-\sin\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(\sin\beta+\sin\left(\varphi-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\lambda(\varphi),$$

$$\lambda(\varphi) = e^{-i(k_0L\cos\varphi-2\pi\nu/3)}.$$

Таким образом, в результате проделанной замены получено функциональное уравнение, содержащее значения неизвестной функции при двух различных значениях аргумента (вместо трех). Выполненная процедура имеет определенный физический смысл. Исключение $\widehat{u}(\varphi)$ с помощью $\widehat{u}(-\varphi)$ представляет собой учет отражения плоской волны от импедансной поверхности. К этому выводу легко прийти, рассмотрев коэффициенты при $\widehat{u}(\varphi)$ в уравнениях (6) и (9). Их отношение равно коэффициенту отражения плоской волны от импедансной поверхности.

Сделанные замечания позволяют рассматривать метод функциональных уравнений, используемый в настоящей работе, как развитие метода отражений.

3. Собственные функции и собственные значения

Уравнение (11) позволяет определить собственные значения поставленной задачи (точнее, построить трансцендентное уравнение для определения собственных чисел).

Рассмотрим однородное уравнение, т.е. положим $\mu(\varphi) = 0$. Получим

$$\frac{\widehat{u}(\varphi-2\pi/3)}{f(\varphi-2\pi/3)} = \frac{\widehat{u}(\varphi+2\pi/3)}{f(\varphi+2\pi/3)}.$$

Последнее уравнение выполняется при всех φ, следовательно его можно усилить:

$$\frac{\widehat{u}(\varphi)}{f(\varphi)} = \frac{\widehat{u}(\varphi+2\pi/3)}{f(\varphi+2\pi/3)} = \frac{\widehat{u}(\varphi-2\pi/3)}{f(\varphi-2\pi/3)}. \tag{12}$$

Кроме того, очевидно,

$$\frac{\widehat{u}(-\varphi)}{f(-\varphi)} = \frac{\widehat{u}(\varphi)}{f(\varphi)}. \tag{13}$$

Функция $\widehat{u}(\varphi)/f(\varphi)$ убывает на бесконечности и не равна нулю тождественно, следовательно, она имеет полюса.

С другой стороны, полюса функции $\widehat{u}(\varphi)/f(\varphi)$ соответствуют некоторым из нулей функции $f(\varphi)$. Пусть k_0 соответствует одному из собственных значений области. Тогда, как следует из (12), должно существовать число γ такое, что γ, $\gamma+2\pi/3$ и $\gamma-2\pi/3$ являются нулями функции $f(\varphi)$.

Таким образом, имеется 3 уравнения относительно двух неизвестных (γ и k_0). Покажем, что из двух уравнений следует третье, т.е., если, например, γ и $\gamma+2\pi/3$ являются нулями $f(\varphi)$, то $\gamma-2\pi/3$ также является нулем $f(\varphi)$.

Прежде всего, выпишем очевидное тригонометрическое тождество

$$\cos\varphi + \cos(\varphi+2\pi/3) + \cos(\varphi-2\pi/3) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lambda(\varphi)\lambda(\varphi-2\pi/3)\lambda(\varphi+2\pi/3) = 1.$$

Далее, из системы уравнений, соответствующих условиям $f(\gamma)=0$ и $f(\gamma+2\pi/3)=0$:

$$\begin{aligned} \lambda(\gamma) &= \frac{(\sin\beta+\sin(\gamma+2\pi/3))(\sin\beta-\sin(\gamma-2\pi/3))}{(\sin\beta-\sin(\gamma+2\pi/3)(\sin\beta+\sin(\gamma-2\pi/3))} \\ \lambda(\gamma+2\pi/3) &= \frac{(\sin\beta+\sin(\gamma-2\pi/3))(\sin\beta-\sin\gamma)}{(\sin\beta-\sin(\gamma-2\pi/3))(\sin\beta+\sin\gamma)} \end{aligned} \tag{14}$$

Можно получить (умножив одно на другое) третье уравнение, соответствующее условию $f(\gamma-2\pi/3)=0$:

$$\lambda(\gamma-2\pi/3) = \frac{(\sin\beta+\sin\gamma)(\sin\beta-\sin(\gamma+2\pi/3))}{(\sin\beta-\sin\gamma)(\sin\beta+\sin(\gamma+2\pi/3))}.$$

Функция $f(\varphi)$ обладает еще одним очевидным свойством. Она периодична с периодом 2π и симметрична, т.е. $f(\varphi) = f(-\varphi)$. Следовательно, если α удовлетворяет системе (14) при данном k_0, то $-\alpha$ также удовлетворяет системе (14) при том же k_0. Следовательно, имеет смысл говорить не о каком-то одном значении γ, а о шести значениях: $\pm\gamma$, $\pm\gamma \pm 2\pi/3$.

Таким образом, система из двух уравнений (14), рассматриваемая относительно неизвестных γ и k_0, позволяет определить собственные значения рассматриваемой области.

Нули функции $f(\varphi)$ располагаются при больших значениях $|\mathrm{Im}[\varphi]|$ вблизи прямых $\mathrm{Re}[\varphi] = \pi n$, $n \in Z$, причем лишь конечное число нулей лежит вне полос $\pi n - \delta < \mathrm{Re}[\varphi] < \pi n + \delta$, при $\delta > 0$. Отсюда следует, что при данном k_0 не более конечного числа значений γ удовлетворяют системе (14).

Уравнение для определения собственных чисел задачи оказывается трансцендентным. Рассмотрим частный случай – граничные условия Неймана. В случае граничных условий Неймана функция $f(\varphi)$ имеет вид

$$f_N(\varphi) = (1 - \lambda(\varphi)) \sin(\varphi + 2\pi/3) \sin(\varphi - 2\pi/3). \qquad (15)$$

(В случае граничных условий Дирихле описанная выше процедура должна быть изменена. В качестве неизвестной функции необходимо выбрать значения нормальной производной поля на границе.)

Нули функции $f_N(\varphi)$ при произвольном k_0 легко могут быть найдены. Это значения $\varphi = \pm 2\pi/3$, а также определяемые соотношением $\cos(\varphi) = 2\pi(n + \nu/3)/(k_0 L)$, $n \in Z$. Задача определения собственных значений k_0 сводится к квадратному уравнению, в решение которого входят произвольные целые параметры a и b:

$$k_0^2 = \frac{4\pi^2}{L^2} \left[\left(a + b + \frac{2\nu}{3} \right)^2 + \frac{(a-b)^2}{3} \right],$$

$$\cos\gamma = -\frac{2\pi(a + b + 2\nu/3)}{k_0 L}.$$

Кроме того, при $\nu = 0$ имеется решение $\gamma = 0$ при любом k_0. Это соответствует полю $u = \mathrm{const}$ везде внутри области.

Вернемся к задаче с импедансными граничными условиями и выясним, каким собственным функциям соответствуют полученные собственные значения. Пусть данному k_0 соответствует несколько различных значений γ.

Неизвестная функция $\widehat{u}(\varphi)$, удовлетворяющая условиям (12) и (13) имеет вид:

$$\widehat{u}(\varphi) = \sum_j \frac{A_j f(\varphi)}{\cos 3\varphi - \cos 3\gamma_j}, \tag{16}$$

где A_j – произвольные коэффициенты.

Заметим, что система (14) может быть истолкована в терминах "обычного" метода отражений. Она выражает тот факт, что плоская волна, испытав два последовательных отражения, переходит в плоскую волну, получающуюся из исходной после поворота на угол $2\pi j$ и умножения на $e^{2\pi ij}$, где $j = \pm 1$.

С этой точки зрения каждая собственная мода, определяемая формулой (16), может быть представлена как линейная комбинация шести плоских волн, получающихся в результате последовательных отражений от сторон треугольника плоской волны, распространяющейся под углом $-\gamma_j$ к оси x.

Процедура восстановления волнового поля с помощью второй формулы Грина рассмотрена ниже.

4. Задача с неоднородными граничными условиями в нерезонансном случае

Решение неоднородного уравнения (10) может быть построено следующим образом. Рассмотрим полюса правой и левой части. Заметим, что функции $\widehat{u}(\varphi)$ и $\widehat{\Phi}(\varphi)$ не могут иметь полюсов, следовательно, полюса связаны только с нулями функции $f(\varphi)$. Будем предполагать, что частота вынуждающих сил не является резонансной частотой области. Это означает, что ни один нуль функции $f(\varphi)$ не является нулем функций $f(\varphi \pm 2\pi/3)$.

Пусть α_i – все нули функции $f(\varphi)$, лежащие в полосе $-\pi \leqslant \mathrm{Re}[\varphi] < \pi$. Функция $\mu(\varphi)$ имеет полюса в точках $\alpha_i + 2\pi/3 + 2\pi n$ и $\alpha_i - 2\pi/3 + 2\pi n$. Первое слагаемое в левой части имеет полюса в точках $\alpha_i + 2\pi/3 + 2\pi n$, а второе – в точках $\alpha_i - 2\pi/3 + 2\pi n$.

Представим (формально) $\mu(\varphi)$ в виде

$$\frac{\widehat{u}(\varphi)}{f(\varphi)} = \sum_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{Res}\,[\mu(\varphi), \alpha_i + 2\pi/3]}{\varphi - (\alpha_i + 2\pi/3) + 2\pi n} + \frac{\mathrm{Res}\,[\mu(\varphi), \alpha_i - 2\pi/3])}{\varphi - (\alpha_i - 2\pi/3) + 2\pi n} \right].$$

Очевидно, каждое из слагаемых в левой части (10) может быть представлено как сумма соответствующих особенностей правой части:

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{u}(\varphi)}{f(\varphi)} &= \sum_i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Res}[\mu(\varphi), \alpha_i + 2\pi/3]}{\varphi - \alpha_i + 2\pi n} = \\ &= -\frac{1}{2}\sum_i \frac{\sin\alpha_i \operatorname{Res}[\mu(\varphi), \alpha_i + 2\pi/3]}{\cos\varphi - \cos\alpha_i}.\end{aligned} \tag{17}$$

Заметим, что второе равенство следует из утверждения

$$\operatorname{Res}[\mu(\varphi), \alpha_i + 2\pi/3] = -\operatorname{Res}[\mu(\varphi), -\alpha_i + 2\pi/3], \tag{18}$$

которое проверяется непосредственно. (В выкладках явно учитывается, что α_i – нули функции $f(\varphi)$.)

Решение (17) определяется с точностью до целой функции, однако последняя равна нулю в силу убывания $\widehat{u}(\varphi)/f(\varphi)$ в областях, не содержащих полюсов.

Заметим, что при больших по модулю целых n справедливы оценки

$$\begin{gathered}\cos\alpha_n \sim \frac{2\pi n + 2\pi\nu/3}{k_0 L}, \\ \operatorname{Res}[\mu(\varphi), \alpha_n + 2\pi/3] \sim \cos^{-4}\alpha_n,\end{gathered} \tag{19}$$

что подтверждает сходимость и убывание в (17).

5. Восстановление волнового поля в области

В результате решения функциональных уравнений в предыдущих разделах были получены неизвестные функции $\widehat{u}(\varphi)$ для однородной и неоднородной задачи. Укажем способ восстановления волнового поля внутри области.

Для этого снова воспользуемся второй формулой Грина (3), причем в качестве вспомогательной функции u' выберем функцию Грина уравнения (1) для плоскости:

$$u'(r) = H_0^{(1)}(|r - r'|),$$

где $H_0^{(1)}$ – функция Ханкеля первого рода нулевого значка.

Пользуясь известной асимптотикой функции Ханкеля вблизи нуля

$$H_0^{(1)}(z) \sim -\frac{2i}{\pi}\ln z,$$

получаем представление поля

$$u(r') = -\frac{i}{4} \int \left[\frac{\partial u}{\partial n} u' - \frac{\partial u'}{\partial n} u \right] d\Gamma, \qquad (20)$$

где интегрирование производится по границе области, а радиус-вектор r' соответствует положению источника функции Ханкеля.

Воспользуемся интегральным представлением функции Ханкеля [3]:

$$H_0^{(1)}(z) = \frac{1}{\pi} \int\limits_S e^{iz\cos(t-\alpha)} dt.$$

Контур интегрирования S показан на Рис. 2. Параметр α может принимать действительные значения от 0 до π.

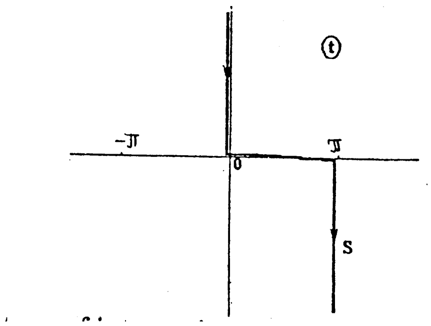

Рис. 2. Контур интегрирования при вычислении функции Ханкеля.

Будем искать значение поля в точке с полярными координатами (ρ, ψ), введенными посредством

$$x = \rho\cos\psi, \quad y = \rho\sin\psi.$$

Вычислим интеграл по стороне с номером 0 в выражении (20). Введем для каждой точки этой стороны параметр α как показано на Рис. 3. Вычислим $\partial u/\partial n$ и $\partial u'/\partial n$. Изменим порядок интегрирования, производя вначале интегрирование по стороне, а затем по контуру S. Заметим, что интегрирование по стороне снова приводит к интегралам вида (5). Проделывая ту же процедуру

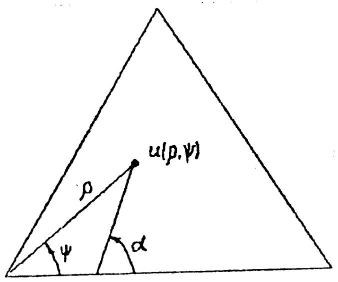

Рис. 3. К вычислению волнового поля внутри области.

для двух других сторон, получим выражение

$$
\begin{gathered}
u(\rho,\psi)=\frac{k_0}{4\pi}\int\limits_S[-\widehat{\Phi}(t)+(\sin\beta+\sin t)\widehat{u}(t)]\times\\
\times[e^{ik_0\rho\cos(\psi-t)}+e^{ik_0\rho\cos(\psi-t-2\pi/3)}\lambda(t+2\pi/3)+\\
+e^{ik_0\rho\cos(\psi-t+2\pi/3)}\lambda^{-1}(t)]dt.
\end{gathered}
\tag{21}
$$

Может оказаться полезным представление, в котором интегрирование производится по трем различным контурам:

$$
\begin{gathered}
u(\rho,\psi)=\frac{k_0}{4\pi}\int\limits_S[-\widehat{\Phi}(t)+(\sin\beta+\sin t)\widehat{u}(t)]e^{ik_0\rho\cos(\psi-t)}dt+\\
+\frac{k_0}{4\pi}\int\limits_{S+\frac{2\pi}{3}}\left[-\widehat{\Phi}\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)+\left(\sin\beta+\sin\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)\right)\widehat{u}\left(t-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\times\\
\times e^{ik_0\rho\cos(\psi-t)}\lambda(t)dt+\\
+\frac{k_0}{4\pi}\int\limits_{S-\frac{2\pi}{3}}\left[-\widehat{\Phi}\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)+\left(\sin\beta+\sin\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)\right)\widehat{u}\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)\right]\times\\
\times e^{ik_0\rho\cos(\psi-t)}\lambda^{-1}\left(t+\frac{2\pi}{3}\right)dt.
\end{gathered}
\tag{22}
$$

Формулы (21) и (22) решают задачу о восстановлении поля в области.

Продемонстрируем возможности приведенных формул на примере восстановления поля собственных функций задачи. Воспользуемся решением (16), построенным в третьем разделе. Рассмотрим одно из слагаемых в сумме:

$$\widehat{u}(\varphi) = \frac{A_j f(\varphi)}{\cos 3\varphi - \cos 3\gamma_j} =$$
$$= \frac{A_j \left(\sin\beta + \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(\sin\beta - \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\right)}{\cos 3\varphi - \cos 3\gamma_j} -$$
$$- \frac{A_j \left(\sin\beta - \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(\sin\beta + \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\right)\lambda(\varphi)}{\cos 3\varphi - \cos 3\gamma_j}.$$

Применим формулу (22). Заметим, что слагаемые в подынтегральных выражениях могут быть перегруппированы как

$$u(\rho, \psi) = \frac{k_0}{4\pi}\left(\int\limits_S - \int\limits_{S-\frac{2\pi}{3}}\right) e^{ik_0\rho\cos(\psi - t)} \times$$
$$\times \frac{(\sin\beta + \sin t)\left(\sin\beta + \sin\left(t + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(\sin\beta - \sin\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)\right)}{\cos 3t - \cos 3\gamma_j}\, dt + \ldots$$

(Подразумевается наличие еще двух аналогичных слагаемых, в которых каждое подынтегральное выражение интегрируется по двум контурам).

Интегралы могут быть легко вычислены. Действительно, контуры S и $S - 2\pi/3$ можно замкнуть на бесконечности, пользуясь убыванием экспоненциального множителя. После этого интегралы сводятся к сумме вычетов в точках $\pm\gamma_j$, $\pm\gamma_j + 2\pi/3$, $\pm\gamma_j - 2\pi/3$. Воспользовавшись равенствами (14), получаем

$$u(\rho, \psi) = \frac{k_0}{6}\sum_{n=1}^{6} \frac{e^{ik_0\rho\cos(\psi - \gamma_{j,n})}}{\sin 3\gamma_{j,n}} \times \tag{23}$$

$$(\sin\beta + \sin\gamma_{j,n})\left(\sin\beta + \sin\left(\gamma_{j,n} + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(\sin\beta - \sin\left(\gamma_{j,n} - \frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

где $\gamma_{j,n}$ пробегает значения $\pm\gamma_j$, $\pm\gamma_j + 2\pi/3$, $\pm\gamma_j - 2\pi/3$.

Из формулы (23) следует, что собственная функция представляет собой сумму шести плоских волн.

6. Решение неоднородной задачи при больших L

Формулы (17), (23) определяют решение неоднородной задачи. При этом структура решения такова, что не представляется очевидным, каким образом это решение переходит в известные решения для импедансного клина с углом раствора, равным $\pi/3$.

Предположим, что длина стороны треугольника L очень велика, а k_0 имеет малую мнимую добавку $-i\varepsilon$. Будем искать решение, полагая, что сначала L стремится к бесконечности, а затем ε к нулю.

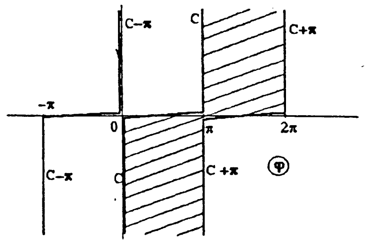

Рис. 4. Область роста функции $\lambda(\phi)$.

Исследуем нули функции $f(\varphi)$ в описанной асимптотике. Очевидно, что $\lambda(\varphi)$ быстро растет в области, лежащей между контурами C и $C+\pi$ (область заштрихована на Рис. 4) и убывает между контурами $C-\pi$ и C. Отметим, что здесь и далее все точки на плоскости φ определяются с точностью до $2\pi n$. Нули функции $f(x)$ могут быть двух типов. К первому типу отнесем нули, лежащие на границе областей, т.е. на контурах C и $C-\pi=-C$. При этом количество полюсов δn, приходящихся на участок $\delta\varphi$, определяется из (19) как

$$\frac{\delta n}{\delta\varphi}=\frac{k_0 L|\sin\varphi|}{2\pi}. \tag{24}$$

Ко второму типу отнесем нули произведения $(\sin\beta+\sin(\varphi+2\pi/3))(\sin\beta-\sin(\varphi-2\pi/3))$, лежащие в области убывания функции $\lambda(\varphi)$, а также нули произведения $(\sin\beta+\sin(\varphi-2\pi/3))(\sin\beta-\sin(\varphi+2\pi/3))$, лежащие в области роста функции $\lambda(\varphi)$. Очевидно, что наличие и положение этих нулей зависит от β. Нетрудно проверить, что при $0<\mathrm{Re}[\beta]<\pi/3$ и $\mathrm{Im}[\beta]<0$ нулей второго типа вообще нет. Именно этот случай рассматривается ниже.

Будем искать $\widehat{u}(\varphi)$ при $0 < \mathrm{Re}[\varphi] < \pi/3$ и $\mathrm{Im}[\varphi] < 0$.

Кроме того, будем интересоваться поведением $u(l_0)$ при небольших значениях l_0. Это имеет следующие последствия. Как следует из (17), $\widehat{u}(\varphi)$ имеет вид

$$\widehat{u}(\varphi) = -f(\varphi)\frac{1}{2}\sum_i \frac{\sin\alpha_i \mathrm{Res}\,[\mu(\varphi), \alpha_i + 2\pi/3]}{\cos\varphi - \cos\alpha_i}.$$

Для стороны с номером 0 при малых l_0 можно ограничиться слагаемым $f(\varphi)$, не содержащим $\lambda(\varphi)$:

$$\widehat{u}(\varphi) = -\frac{\left(\sin\beta + \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(\sin\beta - \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\right)}{2}\times$$
$$\times \sum_i \frac{\sin\alpha_i \mathrm{Res}\,[\mu(\varphi), \alpha_i + 2\pi/3]}{\cos\varphi - \cos\alpha_i}.$$

Суммирование по полюсам, лежащим вдоль контура C, можно заменить интегрированием при достаточно большой плотности полюсов на единицу длины $\delta n/\delta\varphi$, т.е. при достаточно больших значениях $k_0 L$. Перейдем от суммирования к интегрированию, воспользовавшись (18) и (24):

$$\widehat{u}(\varphi) = \frac{\left(\sin\beta + \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right)\right)\left(\sin\beta - \sin\left(\varphi - \frac{2\pi}{3}\right)\right)k_0 L}{2\pi}\times \tag{25}$$
$$\times \int\limits_C \frac{\sin^2\alpha \mathrm{Res}\,[\mu(\varphi), \alpha + 2\pi/3] d\alpha}{\cos\varphi - \cos\alpha}.$$

Без потери общности можно считать, что вынуждающая сила представлена точечными источниками, расположенными на расстоянии d от начала координат на сторонах с номерами 0 и 2 и имеющими амплитуды $-ik_0 A_0$ и $-ik_0 A_2$ соответственно. При этом

$$\widehat{\Phi}(\varphi) = A_0 e^{-ik_0 d\cos(\varphi)} + A_2 e^{-ik_0 d\cos(\dot{\varphi})}\lambda(\varphi).$$

Множитель $\mathrm{Res}\,[\mu(\varphi), \alpha + 2\pi/3]$ в подынтегральном выражении (25) можно вычислить, пренебрегая величиной $\lambda(\varphi)$ в тех областях, где она быстро убывает с ростом L:

$$\mathrm{Res}\,[\mu(\varphi), \alpha + 2\pi/3] = \frac{i}{k_0 L\sin\alpha}\times$$

$$\times\left[\frac{A_0 e^{-ik_0 d\cos(\alpha)}+A_2 e^{ik_0 d\cos(\alpha+2\pi/3)}}{(\sin\beta+\sin\alpha)(\sin\beta+\sin(\alpha+2\pi/3))(\sin\beta-\sin(\alpha-2\pi/3))}-\right.$$
$$-\frac{A_0 e^{-ik_0 d\cos(\alpha-2\pi/3)}+A_2 e^{ik_0 d\cos(\alpha+2\pi/3)}}{(\sin\beta+\sin\alpha)(\sin\beta-\sin(\alpha+2\pi/3))(\sin\beta-\sin(\alpha-2\pi/3))}+$$
$$\left.+\frac{A_0 e^{-ik_0 d\cos(\alpha-2\pi/3)}+A_2 e^{ik_0 d\cos(\alpha)}}{(\sin\beta+\sin\alpha)(\sin\beta-\sin(\alpha+2\pi/3))(\sin\beta+\sin(\alpha-2\pi/3))}\right].$$

Полученное интегральное представление может быть приведено к формулам из статьи [4] с помощью перегруппировки слагаемых и деформации контуров интегрирования.

7. Обсуждение результатов

Сделаем несколько замечаний по поводу полученных результатов.

Функциональные уравнения, подобные использованным в настоящей работе, могут быть легко выведены для любой двумерной закрытой области с кусочно-линейной границей. Для открытых областей процедура вывода уравнений несколько сложнее, однако и в этом случае похожие уравнения могут быть использованы.

Тот факт, что для равностороннего треугольника с импедансной границей функциональные уравнения удалось решить в явном виде, объясняется удачной геометрией выбранной области. Автору неизвестны решения для таких областей, как, например, произвольный треугольник или правильный пятиугольник. В то же время, представляется интересным найти приближенные или численные методы решения функциональных уравнений указанного типа.

В заключение автор благодарит М. А. Лялинова, А. В. Осипова, В. М. Бабича и других участников семинара “Дни дифракции 97”, сделавших ряд полезных замечаний по содержанию данной работы.

Литература

1. G. Lame, *Lecons sur la theorie mathe'matique de l'elasticite des corps solides.* Paris, Bachelier, 1852.
2. Г. Д. Малюжинец, *Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней.* — Докл. Акад. Наук СССР **121, No. 3** ((год)), 436–439.

3. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Гос. изд-во технико-теоретической литературы, М., Л., 1951.
4. А. В. Шанин, *К задаче о возбуждении волн в клиновидной области*. — Акуст. журн. **42, No. 5** (1996), 696–701.

Shanin A. V. Exitation of the wave field in the triangular domain with impedance boundary conditions.

The equation of Gelmgoltz in a close domain which is an equilateral triangle with nonhomogeneous impedance boundary conditions is considered. The functional equation in which an unknown function is Fouries-image of the wave field on the boundary of the domain is constracted. This functional equation is solved for the case of the homogeneous boundary conditions (the problem on eigenvalues) as well as for the case of the nonhomogeneous boundary conditions in the absence of the resonance.

Санкт-Петербургский
Государственный Университет

Поступило 7 октября 1997 г.