Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 250, 1998 г.

Ю. Б. Янушанец

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ЛИНЕЙНОГО ОДНОСКОРОСТНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Рассматривается фундаментальное решение задачи Коши $E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)$ линейного односкоростного уравнения Больцмана

$$(\partial/\partial t + c(s, \mathrm{grad}_{\mathbf{x}}) + \gamma) E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) =$$
$$= \gamma\nu \int\limits_{\Omega} f((\mathbf{s}, \mathbf{s}'))\, E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}'; \mathbf{s}_0)\, ds' + \delta(t)\, \delta(\mathbf{x})\, \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0),$$

справедливого при всех $(t, \mathbf{x}) \in R^{n+1}$, причем при $t < 0$ требуется

$$E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = 0.$$

Здесь $n = 1, 2, 3$; $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}_0 \in \Omega$, равному отрезку $[-1, 1]$ при $n = 1$, S^1 при $n = 2$ и S^2 при $n = 3$; соответствующие меры Лебега ds нормированы; c, $\gamma > 0$, $\nu \in (0, 1]$ константы; $f(\,,\,) \geqslant 0$ функция рассеяния, непрерывно зависящая лишь от скалярного произведения векторов $(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$; $\int\limits_{\Omega} f((\mathbf{s}, \mathbf{s}'))ds' = 1$. С помощью преобразования Фурье–Лапласа по пространственно-временным аргументам задача сводится к исследованию интегрального уравнения по переменной $\mathbf{s}$. Его ядро оказывается аналитическим в трубчатой области над конусом, сопряженным к переднему пространственно-временному. Это позволяет доказать однозначную разрешимость исходной задачи при любом фиксированном $\mathbf{s}$ в классе обобщенных функций умеренного роста с носителями в переднем пространственно-временном конусе. В случае изотропного рассеяния $f(\,.\,) = 1$ решение интегрального уравнения может быть выписано явно. Это позволяет в "приближении малых длин свободного пробега" на основе теоремы тауберова типа для обобщенных функций получить различные слабые пределы $E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)$. Отмечены связи с фундаментальными решениями уравнения теплопроводности и его обобщением на диссипативный случай.

§1. Введение

Фундаментальное решение задачи Коши линейного односкоростного уравнения Больцмана это решение следующей задачи:

$$(\partial/\partial t + c(s, \mathrm{grad}_{\mathbf{x}}) + \gamma)E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) =$$
$$= \gamma\nu \int\limits_{\Omega} f((\mathbf{s}, \mathbf{s}'))E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}'; \mathbf{s}_0)\, ds' + \delta(t)\,\delta(\mathbf{x})\,\delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0), \tag{1.1}$$

справедливого при всех вещественных t, в то время как при $t < 0$ требуется

$$E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = 0. \tag{1.2}$$

При этом $\mathbf{x} \in R^n$, $(n = 1, 2, 3)$; $\mathbf{s}$, $\mathbf{s}_0 \in \Omega$, где Ω равняется отрезку $[-1, 1]$ при $n = 1$, S^1 при $n = 2$ и S^2 при $n = 3$; соответствующие меры Лебега ds нормированы на единицу; c скорость распространения; γ постоянное микроскопическое сечение поглощения, равное обратному средней длины свободного пробега частицы; $\nu \in (0, 1]$ вероятность испускания частицы вслед за поглощением; $(\mathbf{s}, \mathbf{s}')$ скалярное произведение векторов; $f(\ ,\ ) \geqslant 0$ функция рассеяния, непрерывно зависящая от косинуса угла между направлениями $\mathbf{s}'$ и $\mathbf{s}$ поглощенной и эмиттированной частиц, причем

$$\int\limits_{\Omega} f((\mathbf{s}, \mathbf{s}'))\, ds' = 1. \tag{1.3}$$

Таким образом $E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)$ описывает эволюцию "элементарной струи частиц," испущенных в точке $\mathbf{x} = 0$ в момент времени $t = 0$ в направлении $\mathbf{s}_0$, движущихся равномерно и прямолинейно со скоростью c и изменяющих в момент столкновения лишь направление движения с $\mathbf{s}'$ на $\mathbf{s}$ с вероятностью $f((\mathbf{s}, \mathbf{s}'))$.

Для прояснения смысла использованных величин полезно ввести макроскопическую плотность числа частиц

$$\rho\,(t, \mathbf{x}; \mathbf{s}_0) = \int\limits_{\Omega} E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)\, ds, \tag{1.4}$$

а также макроскопическую плотность потока частиц

$$J(t, \mathbf{x}; \mathbf{s}_0) = c \int\limits_{\Omega} \mathbf{s}\, E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)\, ds. \tag{1.5}$$

Интегрируя (1.1) по ds при $t > 0$ и принимая во внимание (1.4) и (1.5) приходим к уравнению неразрывности

$$\partial\rho\,(t, \mathbf{x}; \mathbf{s}_0)/\partial t + \operatorname{div} J(t, \mathbf{x}; \mathbf{s}_0) = \gamma(\nu - 1)\rho\,(t, \mathbf{x}; \mathbf{s}_0). \qquad (1.6)$$

Из уравнения (1.6) вытекает (при условии $\rho\,(t, \mathbf{x}; \mathbf{s}_0) \geqslant 0$) то, что случай $\nu = 1$ описывает консервативную среду, в то время как $\nu < 1$ отвечает диссипативной среде.

Пусть

$$V_c = \Big\{(t, \mathbf{x}) \in [0, +\infty) \bigcup R^n : ct \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} (x^k)^2\Big)^{1/2}\Big\}, \qquad (1.7)$$

обозначает передний пространственно-временной конус. Переписав уравнение (1.1) в виде интегрального уравнения вдоль луча, проходящего через точку $(t, \mathbf{x})$ в направлении $\mathbf{s}$ [1] можно доказать, что решение задачи (1.1)+(1.2) при фиксированном $\mathbf{s}$ сосредоточенно в пределах V_c. Более того, это решение можно представить в виде

$$E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = \exp(-\gamma t)\delta(\mathbf{x} - ct\mathbf{s}_0)\,\theta(t)\,\delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) + E^s(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0), \qquad (1.8)$$

что отвечает разложению решения на “прямую” и “рассеянную” части, где $\theta(t) = 0$ при $t < 0$ и $\theta(t) = 1$ при $t \geqslant 0$. При этом функционал $E^s(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)$ неотрицателен и при любом фиксированном $\mathbf{s}$ его сужение на V_c имеет смысл и является

а) при $\nu < 1$ ограниченной мерой, удовлетворяющей оценке

$$\Big|\big(E^s(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0), \varphi\,(t, \mathbf{x})\big)\Big| \leqslant \Big(\gamma\,(1 - \nu)\Big)^{-1} \nu \max_{\mathbf{x}:|\mathbf{x}|\leqslant ct} |\varphi(t, \mathbf{x})|; \qquad (1.9)$$

б) при $\nu = 1$ мерой умеренного роста с оценкой

$$\Big|\big(E^s(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0), \varphi\,(t, \mathbf{x})\big)\Big| \leqslant \int\limits_0^{+\infty} dt' \max_{\mathbf{x}':|\mathbf{x}'|\leqslant ct} |\varphi(t', \mathbf{x}')|, \qquad (1.10)$$

где $\varphi(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}(V_c)$ – пространство гладких быстроубывающих функций. В то же время существенную дополнительную информацию о решении можно получить используя мощную технику [2], основанную на изоморфизме между пространством $\mathcal{S}'(V_c)$ обобщенных функций умеренного роста с носителями в V_c и граничными значениями функций, голоморфных в подходящей трубчатой области.

Более точно: пусть

$$V_c^* = \Big\{\mathbf{v} = (v_0, \dots, v_n) \in R^{n+1} : tv_0 + \sum_{k=1}^{n} x^k\, v_k \geqslant 0, \\ (t, \mathbf{x}) \in V_c \Longleftrightarrow v_0 \geqslant c\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k^2\Big)^{1/2}\Big\}, \tag{1.11}$$

конус, сопряженный к V_c и пусть $Q_c = \operatorname{Int} V_c^*$ внутренность V_c^*. Введем трубчатую область

$$T^{Q_c} = \big(\mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^{n+1} : \mathbf{u} = (u_0, \dots, u_n) = \Re\mathbf{z} \in R^{n+1}, \\ \mathbf{v} = \Im\mathbf{z} \in Q_c\big), \tag{1.12}$$

с основанием Q_c.

Следуя [2] определим $H^{(l,r)}(Q_c)$ для некоторых целых l, $r \geqslant 0$ как множество функций $h(\mathbf{z})$, голоморфных в T^{Q_c} и удовлетворяющих в этой области условию

$$|h(\mathbf{z})| \leqslant M(1 + |\mathbf{z}|^2)^{l/2}\big[1 + \operatorname{dist}(\mathbf{v}, \partial V_c^*)^{-r}(\mathbf{v})\big], \tag{1.13}$$

где $|\mathbf{z}|^2 = \sum\limits_{j=0}^{n} |z_j|^2$, M положительная константа, ∂B граница множества B. Если ввести норму

$$\|h(\mathbf{z})\|^{(l,r)} = \\ = \sup\Big(|h(\mathbf{z})|(1 + |\mathbf{z}|)^{-l/2}\big[1 + \operatorname{dist}(\mathbf{v}, \partial V_c^*)^r\big]\Big), \quad \mathbf{z} \in T^{Q_c}, \tag{1.14}$$

то можно показать, что $H^{(l,r)}(Q_c)$ является пространством Банаха и если $l \leqslant l'$ и $r \leqslant r'$, то $H^{(l,r)}(Q_c) \subset H^{(l',r')}(Q_c)$. Введем пространство Фреше

$$H(Q_c) = \bigcup_{l,r \geqslant 0} H^{(l,r)}(Q_c). \tag{1.15}$$

Для любой $G(t, \mathbf{x}) \in \mathcal{S}'(V_c)$ определим

$$\widetilde{G}(\mathbf{z}) = \int\limits_{V_c} \exp\Big(i\Big(tz_0 + \sum_{k=1}^{n} x^k\, z_k\Big)\Big)\, G(t, \mathbf{x})\, dt dx = \\ = \int\limits_{V_c} \exp\Big(i\Big(tu_0 + \sum_{k=1}^{n} x^k\, u_k\Big)\Big) \exp\Big(-tv_0 - \sum_{k=1}^{n} x^k\, v_k\Big) G(t, \mathbf{x})\, dt dx, \tag{1.16}$$

как преобразование Фурье–Лапласа функции $G(t,\mathbf{x})$. Известно [2], что это преобразование осуществляет изоморфизм между $\mathcal{S}'(V_c)$ и $H(Q_c)$. Реализовать его можно следующим образом.

Для функции $g(\,.\,)\in\mathcal{S}'(R^{n+1})$ пусть

$$\widehat{g}(\mathbf{y})=(2\pi)^{-n-1}\int\limits_{R^{n+1}}\exp\Big(-i\Big(y^0\,u_0+\sum_{k=1}^{n}y^k\,u_k\Big)\Big)\times \\ \times\, g(u_0,\dots,u_n)\,du_o\dots du_0 \quad (1.17)$$

есть обратное преобразование Фурье, являющееся автоморфизмом $\mathcal{S}'(R^{n+1})$. Известно и то [2], что для любого элемента $h(z)\in H(Q_c)$ существует слабый предел в пространстве $S'(R^{n+1})$

$$h_b(u_0,\dots,u_n)=\underset{\tau\to+0}{\text{w-}\lim}\,h(\mathbf{u}+i\tau\mathbf{v}), \quad (1.18)$$

причем граничное значение функции от аргумента $\mathbf{u}$ достигается независимо от $\mathbf{v}\in Q_c$. Тогда для любого элемента $G(t,\mathbf{x})\in\mathcal{S}'(V_c)$ справедливо равенство

$$G(t,\mathbf{x})=\widehat{\widetilde{G}}_b(u_0,\dots,u_n). \quad (1.19)$$

§2. Единственность решения и интегральное представление для рассеянной части поля

Совершив при фиксированном $\mathbf{s}$ преобразование Фурье–Лапласа уравнения (1.1) получим:

$$\Big[\gamma-i\Big(z_0+c\sum_{k=1}^{n}s^k\,z_k\Big)\Big]\widetilde{E}(\mathbf{z},\mathbf{s};\mathbf{s}_0)= \\ =\nu\gamma\int\limits_{\Omega}f((\mathbf{s},\mathbf{s}'))\widetilde{E}(\mathbf{z},\mathbf{s};\mathbf{s}_0)\,ds'+\delta(\mathbf{s}-\mathbf{s}_0). \quad (2.1)$$

Заметим, что в случае $\mathbf{z}\in T^{Q_c}$ вследствие (1.11) справедлива оценка

$$\Big|\gamma-i\Big(z_0+c\sum_{k=1}^{n}s^k\,z_k\Big)\Big|\geqslant\Re\Big[\gamma-i\Big(z_0+c\sum_{k=1}^{n}s^k\,z_k\Big)\Big]= \\ =\gamma+v_0+c\sum_{k=1}^{n}s^k\,v_k\geqslant\gamma, \quad (2.2)$$

причем равенство достигается лишь на границе T^{Q_c} в точке $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Следовательно, при $\mathbf{z} \in T^{Q_c}$ выражение (2.1) можно переписать в виде

$$\widetilde{E}(\mathbf{z}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = \int\limits_{\Omega} \nu\gamma \Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s^k\, z_k\Big)\Big]^{-1} f((\mathbf{s}, \mathbf{s}'))\, \widetilde{E}(\mathbf{z}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)\, ds' + \Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s_0^k\, z_k\Big)\Big]^{-1} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0). \tag{2.3}$$

Введем интегральный оператор $K(\mathbf{s}, \mathbf{s}'; p)$ с ядром

$$\mathcal{K}(\mathbf{s}, \mathbf{s}'; p) = \nu\gamma \Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s^k\, z_k\Big)\Big]^{-1} f((\mathbf{s}, s')), \tag{2.4}$$

действующий на банаховом пространстве непрерывных комплекснозначных функций $\mathbf{C}(\Omega)$ с нормой максимума модуля, зависящий от набора параметров $p = (\nu, \gamma, \mathbf{z})$.

Справедлива следующая

Теорема 2.1. *Для любого заданного* $\mathbf{s}$ *решение уравнения* (2.3) *существует на множестве* $T^{Q_c} \cup \partial T^{Q_c}$ *в случае* $\nu < 1$, *а при* $\nu = 1$ *на том же множестве, за исключением точки* 0. *Оно может быть представлено в виде*

$$\widetilde{E}(\mathbf{z}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = \widetilde{E}^{\,d}(\mathbf{z}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) + \widetilde{E}^{\,s}(\mathbf{z}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0), \tag{2.5}$$

где

$$\widetilde{E}^{\,d}(\mathbf{z}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = \Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s_0^k\, z_k\Big)\Big]^{-1} \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0), \tag{2.6}$$

$$\widetilde{E}^{\,s}(\mathbf{z}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = \nu\gamma \Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s_0^k\, z_k\Big)\Big]^{-1} \big(I - K(\mathbf{s}, \mathbf{s}'; p)\big)^{-1} \times \Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} {s'}^k\, z_k\Big)\Big]^{-1} f((\mathbf{s}', \mathbf{s}_0)). \tag{2.7}$$

Функция $\widetilde{E}^{\,s}(\mathbf{z}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)$ *принадлежит пространству* $H^{(0,0)}(Q_c)$ *при* $\nu <$ 1 *и* $H^{(0,1)}(Q_c)$ *при* $\nu = 1$.

Замечание 2.2. Правую часть (2.5) можно интерпретировать как представление решения в виде суммы сингулярного и регулярного слагаемых.

Из теоремы 2.1 выводится основная

Теорема 2.3. *Справедливы следующие равенства*

$$\exp(-\gamma t)\,\theta(t)\,\delta\,(\mathbf{x}-ct\mathbf{s}_0)\,\delta\,(\mathbf{s}-\mathbf{s}_0) = \widehat{\widetilde{E}_b^d}(u_0,\dots,u_n,\mathbf{s};\mathbf{s}_0). \tag{2.8}$$

$$E^s(t,\mathbf{x},\mathbf{s};\mathbf{s}_0) = \widehat{\widetilde{E}_b^d}(u_0,\dots,u_n,\mathbf{s};\mathbf{s}_0). \tag{2.9}$$

При любом фиксированном $\mathbf{s}$ *решение задачи* (1.1)+(1.2) *единственно в классе* $\mathcal{S}'(V_c)$.

Доказательство теоремы 2.1. С помощью (2.4), (1.3) и (2.2) для нормы оператора $K(\,.\,,.\,;p)$ имеем оценку

$$\|K(\,.\,,.\,;p)\| \leqslant \nu\Big(1+\Big[v_0 + c\,\min_{\mathbf{s}\in\Omega}\sum_{k=1}^{n} s^k\,v_k\Big]/\gamma\Big)^{-1} =$$

$$= \nu\Big(1+\Big[v_0 - c\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k^2\Big)^{1/2}\Big]/\gamma\Big)^{-1} \leqslant \nu, \quad \mathbf{z}\in T^{Q_c}\cup\partial T^{Q_c}, \tag{2.10}$$

причем равенство достигается лишь в точке $\mathbf{z}=\mathbf{0}$. Следовательно, если $\nu<1$, то оператор $I-K(\,.\,,.\,;p)$ обратим на множество $T^{Q_c}\cup\partial T^{Q_c}$, а в случае $\nu=1$ он обратим на том же множестве за исключением точки $\mathbf{0}$.

Мы будем пользоваться стандратным выражением для обратного оператора

$$(I-K(\,.\,,.\,;p))^{-1} = \sum_{m=0}^{n} K^m(\,.\,,.\,;p). \tag{2.11}$$

Применим его к некоторой функции $g(\,.\,)\in\mathbf{C}(\Omega)$. В силу (2.10) для каждого слагаемого справедлива оценка

$$\max_{\mathbf{s}\in\Omega}|\,K^m(\mathbf{s},\,.\,;p)\,g\,(\,.\,)\,|\leqslant$$

$$\nu^m\Big(1+\Big[v_0 - c\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k^2\Big)^{1/2}\Big]/\gamma\Big)^{-m}\|g(\,.\,)\|. \tag{2.12}$$

Следовательно, сумма ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} K^m(\mathbf{s},\,.\,;p)\,g\,(\,.\,)$ голоморфна в области T^{Q_c} как функция набора комплексных переменных $z_0,\dots,z_n$. Выберем последовательность $g_l(\,.\,;p)\in C(\Omega)$, слабо сходящуюся к $\Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum\limits_{k=1}^{n} s_0^k\, z_k\Big)\Big]^{-1}\delta((\mathbf{s}-\mathbf{s}_0))$. Воспользовавшись тождеством

$$(I - K(\,.\,,.\,;p))^{-1} = I + (I - K(\,.\,,.\,;p))^{-1}\ K(\,.\,,.\,;p)$$

и применив его к $g_l(\,.\,;p)$ приходим к выражению

$$(I - K(\,.\,,.\,;p))^{-1}\ g_l(\,.\,;p) =$$

$$= g_l(\,.\,;p) + (I - K(\,.\,,.\,;p))^{-1}\ K(\,.\,,.\,;p) g_l(\,.\,;p). \tag{2.13}$$

Устремив l к бесконечности получим в качестве слабого предела левой части (2.13) искомое решение уравнения (2.3). Убедиться в том, что (2.13) является решением уравнения (2.3) можно и непосредственно, подействовав на обе части равенства (2.5) оператором $I - K(\,.\,,.\,;p)$ и приняв во внимание (2.6) и (2.7).

В силу (2.10) и (2.11) на множестве $T^{Q_c}\cup\partial T^{Q_c}\setminus\mathbf{0}$ имеет место оценка

$$\Big\|(I - K(\,.\,,.\,;p))^{-1}\Big\| \leqslant (I - \|K(\,.\,,.\,;p)\|)^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(1 + \Big[v_0 - c\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k^2\Big)^{1/2}\Big]/\gamma\Big)\Big(1 + \Big[v_0 - c\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k^2\Big)^{1/2}\Big]/\gamma\Big)^{-1}. \tag{2.14}$$

Принадлежность функции $\widetilde{E}^{\,s}(\mathbf{z},\mathbf{s},\mathbf{s}_0)$ классу $H^{(0,0)}(Q_c)$ при $\nu < 1$ непосредственно вытекает из (2.14). Для доказательства принадлежности этой функции классу $H^{(0,1)}(Q_c)$ при $\nu = 1$ достаточно, согласно [3], доказать, что для любого $\mathbf{v}\in Q_c$ имеет место асимптотика $\widetilde{E}^{\,s}(\mathbf{u}+\tau i\mathbf{v},\mathbf{s};\mathbf{s}_0)\sim\tau^{-1}$, $\tau > 0$. Последнее так же непосредственно следует из (2.14). $\bullet$

Доказательство теоремы 2.3. Рассмотрим выражение (2.6) для "прямой" части поля. Выберем $\mathbf{v} = (v_0, 0, \ldots, 0)$. Если $v_0 \to +0$, то имеет место слабая сходимость

$$\Big[1 - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s^k\, z_k\Big)/\gamma\Big]^{-1} \to \Big[1 - i\Big(u_0 + c\sum_{k=1}^{n} s^k\, z_k\Big)/\gamma\Big]^{-1}$$

в силу равномерного характера этой сходимости при $\mathbf{u}\in K$, где $K\subset R^{n+1}$ – некоторый компакт. Значит $\widetilde{E_b^d}(u_0,\ldots,u_n,\mathbf{s};\mathbf{s}_0)$ существует и принадлежит $\mathcal{S}'(R^{n+1})$. В таком случае

$$\widetilde{E_b^d}(u_0,\ldots,u_n,\mathbf{s};\mathbf{s}_0) = \delta(\mathbf{s}-\mathbf{s}_0)\ \underset{v_0\to+0}{\text{w-lim}}\ (2\pi)^{-n-1}\times$$

$$\times \int\limits_{R^{n+1}} du_0 \dots du_n \exp\left(-i\left(\left(tu_0 + \sum_{k=1}^{n} x^k\, u_k\right)\right)\right.$$

$$\left[\gamma - i\left(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s_0^k\, z_k\right)\right]^{-1} =$$

$$= \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)\ \underset{v_0 \to +0}{\text{w-}\lim}\ (2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} du_1 \dots du_n \exp\left(-i \sum_{k=1}^{n} x^k\, u_k\right)$$

$$(-2\pi i)^{-1} \int\limits_{R} du_0 \exp\left(-itu_0\right) \left[i\gamma + z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s_0^k\, u_k\right]^{-1}$$

и, поскольку полюс в последнем интеграле при достаточно малых v_0 лежит в нижней полуплоскости, с помощью леммы Жордана мы получаем при $t > 0$

$$\exp(-\gamma t)\, \delta\,(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)(2\pi)^{-n} \int\limits_{R^n} du_1 \dots du_n \exp\left(-i\sum_{k=1}^{n} x^k\, u_k\right) \times$$

$$\times \exp\left(ict \sum_{k=1}^{n} s_0^k\, u_k\right) = \exp(-\gamma t)\, \delta\,(\mathbf{x} - ct\mathbf{s}_0)\, \delta\,(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0).$$

При $t < 0$ таким же образом получаем нуль, т.е. (2.8).

Соотношение (2.9) в силу (1.8), (2.8) и (1.9) следует из равенства

$$E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = \widehat{\widetilde{E}_b}(u_0, \dots, u_n, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0). \tag{2.15}$$

Для проверки единственности рассмотрим функцию $E_h(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)$ – решение однородного варианта задачи $(1.1) + (1.2)$. Используя те же приемы, что и при доказательстве теоремы 2.1 получаем равенство $\widetilde{E}_h(\mathbf{z}, \mathbf{s}, \mathbf{s}_0) = 0$, справедливое в $T^{Q_c} \cup \partial T^{Q_s}$ при $\nu < 1$ и в $T^{Q_c} \cup \partial T^{Q_s} \setminus \mathbf{0}$ при $\nu = 1$. Таким образом в случае $\nu < 1$ $E_h(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = \widehat{0} = 0$.

Если $\nu = 1$ функция $\widetilde{E}_h(\mathbf{u}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = 0$ вещественной переменной $\mathbf{u}$ равна нулю всюду, за исключением точки $\mathbf{0}$. Следовательно, по теореме о структуре обобщенной функции с точечным носителем [2]

$$\widetilde{E}_h(u, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = \sum_{k,l} a_{k,l}\, D^k\, \delta(u_0)\, D^l\, \delta(u_1, \dots, u_n), \tag{2.16}$$

где $l = (l_1, \dots, l_n)$ и сумма в правой части конечна. Из (2.16) вытекает равенство

$$E_h(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = \sum_{k,l} a_{k,l} (-i)^{k+l}\, t^k\, \mathbf{x}^l. \tag{2.17}$$

Поскольку полином в правой части (2.17) должен обращаться в нуль вне V_c, то он обращается в нуль тождественно. Следовательно $a_{k,l} = 0$ для всех k и l. $\bullet$

Следствие 2.4. *Согласно теоремы Бохнера–Шварца* [3] *для любого* $\mathbf{s}$ *обобщенная функция* $\widetilde{E^s_b}(u_0, \dots, u_n, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)$ *является положительно определенной, будучи преобразованием Фурье от неотрицательной меры умеренного роста.*

§3. Решение интегрального уравнения и слабые пределы в случае изотропного рассеяния

При проведении конкретных расчетов функцию рассеяния принято разлагать по полиномам Лежандра [4]:

$$f((\mathbf{s}, \mathbf{s}')) = \sum_{k=0}^{n} a_n\, P_n((\mathbf{s}, \mathbf{s}')). \tag{3.1}$$

В силу (1.3) справедливо равенство

$$a_0 = 1. \tag{3.2}$$

Особый интерес представляет случай изотропного рассеяния

$$f((\mathbf{s}, \mathbf{s}')) = 1 \Longleftrightarrow a_k = 0, \quad k \geqslant 1, \tag{3.3}$$

поскольку в этом случае функцию $\widetilde{E}^{\,s}(\mathbf{z}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)$ с помощью (2.7) можно вычислить. При этом, как показывают результаты исследования стационарных задач [4], изотропный случай является, по-видимому, исключительным, где это удается сделать. Справедлива

Теорема 3.1. *В изотропном случае имеет место явное выражение для преобразования Фурье–Лапласа "рассеянной части" поля:*

$$\widetilde{E}^{\,s}(\mathbf{z}, \mathbf{s}, \mathbf{s}_0) = \nu\gamma\Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s_0^k\, z_k\Big)\Big]^{-1} \times$$

$$\times\Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s^k\, z_k\Big)\Big]^{-1} I^{-1}(\mathbf{z};\nu,\gamma), \tag{3.4}$$

где

$$I(\mathbf{z};\nu,\gamma) = 1 - \nu\gamma\int\limits_{\Omega} ds\Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s^k\, z_k\Big)\Big]^{-1}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Действительно, с помощью (2.4) легко подсчитать по индукции результат действия $m \geqslant 1$-ой итерации оператора $K(\,.\,,\,.\,;p)$ на функцию $\Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s^k\, z_k\Big)\Big]^{-1}$:

$$K^m(\mathbf{s},\mathbf{s}';p)\Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} {s'}^k\, z_k\Big)\Big]^{-1} =$$

$$= K^{m-1}(\mathbf{s},\mathbf{s}';p)\nu\gamma\Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} {s'}^k\, z_k\Big)\Big]^{-1}$$

$$\int\limits_{\Omega} ds''\Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} {s''}^k\, z_k\Big)\Big]^{-1} = \ldots = \Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s^k\, z_k\Big)\Big]^{-1}$$

$$\Big(\nu\gamma\int\limits_{\Omega} ds'\Big[\gamma - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} {s'}^k\, z_k\Big)\Big]^{-1}\Big)^m. \tag{3.6}$$

Суммируя полученные выражения с помощью (2.7) и (2.11) получаем (3.4). •

Замечание 3.2. Величины $I(\mathbf{z})$ при $n = 1,2,3$ могут быть подсчитаны явно, однако в этой работе они не понадобятся.

Сформулируем следующее утверждение:

Теорема 3.3. *Если $\gamma \to +\infty$ (приближение "малых длин" свободного пробега), то имеют место слабые пределы:*

в консервативном случае $\nu = 1$:

$$1) \qquad \operatorname{w-lim}\, E(t,\mathbf{x},\mathbf{s};\mathbf{s}_0) = \theta(t)\,\delta(\mathbf{x}); \tag{3.7}$$

2) *если и $c \to \infty$, так, что $c^2/\gamma \to k_n^{-1} D$, где $\varkappa_1 = \varkappa_3 = 1/3$, $\varkappa_2 = 1/2$, D – положительная константа, то*

$$\operatorname{w-lim}\, E(t,\mathbf{x},\mathbf{s};\mathbf{s}_0) = (4\pi Dt)^{-n/2}\exp\big(-|\mathbf{x}|^2/(4Dt)\big) \tag{3.8}$$

в диссипативном случае $\nu < 1$:

3) *если и* $c \to \infty$, *так, что* $c^2/\gamma \to \varkappa_n^{-1} D$, *где величины* k_n *имеют те же значения,* D *– положительная константа и к тому же* $\gamma(\nu^{-1}(\gamma) - 1) \to a$, $a \geqslant 0$, *то*

$$\text{w-lim } E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = (4\pi Dt)^{-n/2} \exp\left(-at - |\mathbf{x}|^2/(4Dt)\right). \tag{3.9}$$

Поясним идею доказательства. Прежде всего заметим, что при $\gamma \to +\infty$ мы имеем

$$\begin{gathered} \text{w-lim } E^d(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = \\ = \text{w-lim } \exp(\gamma t)\, \delta(\mathbf{x} - ct\mathbf{s}_0)\, \theta(t)\, \delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0) = 0. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Отсюда вытекает равенство

$$\text{w-lim } E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = \text{w-lim } E^s(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0), \tag{3.11}$$

то есть достаточно рассматривать слабые пределы лишь рассеянной части поля.

Разложим знаменатель правой части (3.4) в окрестности точки $\mathbf{0}$ по степеням z. Используя (3.5) после простых преобразований получаем:

$$\begin{gathered} \widetilde{E}^{\,s}(\mathbf{z}, \mathbf{s}, \mathbf{s}_0) = \Big[1 - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s^k z_k\Big)/\gamma\Big]^{-1} \times \\ \times \Big[1 - i\Big(z_0 + c\sum_{k=1}^{n} s_0^k z_k\Big)/\gamma\Big]^{-1} \Big[\gamma(\nu^{-1} - 1) - \\ - iz_0 + \Big(z_0^2 + \varkappa_n c^2 \sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big)/\gamma + O(|c\mathbf{z}|^3/\gamma^2)\Big]^{-1}. \end{gathered} \tag{3.12}$$

Можно доказать, что выражение (3.12) при $\gamma \to +\infty$ слабо сходится к

$$1) \qquad -iz_0; \tag{3.7$'$}$$

$$2) \qquad -iz_0 + D\sum_{k=1}^{n} z_k^2; \tag{3.8$'$}$$

$$3) \qquad -iz_0 + a + D\sum_{k=1}^{n} z_k^2. \tag{3.9$'$}$$

Овеществив аргументы в $(3.7')$–$(3.9')$ и применив обратное преобразование Фурье вида (1.17) приходим к искомым выражениям (3.7)–(3.9). •

Замечание 3.4. Выражение (3.7) имеет прозрачную физическую интерпретацию: при $\gamma \to +\infty$ и зафиксированных прочих параметрах поглощение в среде является доминирующим фактором, в то время как процессы переноса подавлены. Поэтому начальное возмущение не покидает за конечное время бесконечно малой окрестности начала координат. Если принять во внимание тот факт, что вклад величины $E^d(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)$ пренебрежим, то не удивительно, что единственным наблюдаемым эффектом многократного рассеяния является трансформация исходного мононаправленного распределения к изотропному.

Замечание 3.5. Формула (3.9) при $a > 0$ является фундаментальным решением $E_d^h(t, \mathbf{x})$ уравнения теплопроводности для диссипативной среды:

$$(\partial/\partial t - D\Delta + a)\; E_d^h\,(t, \mathbf{x}) = \delta(t)\delta(\mathbf{x}), \quad (t, \mathbf{x}) \in R^{n+1}, \qquad (3.13)$$

$$E_d^h(t, \mathbf{x}) = 0, \quad t < 0. \qquad (3.14)$$

В заключение автор выражает признательность проф. В. М. Бабичу (ПОМИ РАН) и проф. В. С. Буслаеву (СПГУ) за интерес к работе и полезное обсуждение.

Литература

1. К. Кейз, П. Цвайфель, *Линейная теория переноса.* Мир. М., 1972.
2. В. С. Владимиров, *Обобщенные функции в математической физике.* Наука, М., 1976.
3. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. т. 2. Гармонический анализ, самосопряженности.* Мир, М., 1978.
4. В. В. Соболев, *Рассеяние света в атмосферах планет.* Наука, М., 1972.

Yanushanets Yu. B. Fundamental solution of the Cauchy problem corresponding to one-speed linear Boltzman Equation for anisotropic media.

We consider fundamental solution $E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0)$ of the Cauchy problem for the one-speed linear Boltzman Equation $\big(\partial/\partial t + c(s, \mathrm{grad}_{\mathbf{x}}) + \gamma\big) E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = \gamma\nu \int f\big((\mathbf{s}, \mathbf{s}')\big) E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}'; \mathbf{s}_0) ds' + \Omega\delta(t)\delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{s} - \mathbf{s}_0)$, assumed to be true for any $(t, \mathbf{x}) \in R^{n+1}$, while for $t < 0$ the condition $E(t, \mathbf{x}, \mathbf{s}; \mathbf{s}_0) = 0$ holds. By using the Fourier–Laplace transform over space-time arguments the problem is reduced to investigation of an integral equation in the $\mathbf{s}$ argument. The uniqueness and existence of the initial problem for any fixed $\mathbf{s}$ within the space of tempered distributions with supports in the forward space-time cone are proved assuming $0 < \nu \leqslant 1$. If the scattering media are of isotropic type $f(.) = 1$ the solution of the integral equation is given in the explicit form. In the limit of "small mean free paths" various weak limits of the solution are obtained with the help of tauberian type theorem for distributions.

Главная Геофизическая
Обсерватория им. А. И. Воейкова

Поступило 2 октября 1997