Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 251, 1998 г.

П. П. Кулиш, М. А. Соколов

ГАУССОВО РАЗЛОЖЕНИЕ КВАНТОВЫХ ГРУПП И МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИКИ

1. Введение. Квантовые группы [1, 2], возникшие при изучении интегрируемых квантовых моделей, вызывают устойчивый интерес уже более десятилетия. Эти алгебраические системы, во многих аспектах, оказываются близкими группам и алгебрам Ли. В частности, квантовые группы, полученные стандартным квантованием из соответствующих классических групп, допускают гауссово разложение [2–4] принимающее, в этом случае, форму нелинейной замены базисных элементов специального вида. Результатами такой замены являются:

а) упрощение коммутационных соотношений между новыми генераторами;

б) возможность разрешения дополнительных соотношений, входящих в определение ортогональных и симплектических квантовых групп, и, как следствие, уменьшение числа генераторов до количества соответствующего их классическим аналогам [4];

в) возможность реализации новых генераторов базисныммими элементами классических алгебр Ли [5];

г) простой рецепт q-бозонизации квантовых групп [6], и т.д. Если принять условие обратимости главных квантовых миноров [4], нелинейные соотношения можно разрешить и выразить новые генераторы через старые. Это позволяет, в частности, определить наследуемую хопфову структуру на новых генераторах [3].

В случае классических групп Ли гауссово разложение может быть задано несколькими эквивалентными способами, различающимися только порядком сомножителей. Проведя разложение произвольного элемента группы одним из спрособов и, затем, поменяв порядок сомножителей, получим, вообще говоря, новый элемент группы. Такая операция приводит к некоторому отображению (автоморфизму) группы Ли. Итерирование этого отображения может быть ассоциировано с динамической системой, эволюционирующей в дискретном времени.

Работа выполнялась при поддержке РФФИ, грант 98-01-00310.

Задачи о динамических системах (как классических, так и квантовых) в дискретном времени, относятся к сложным и интересным задачам теории динамических систем (см. обзор [7] и лекции [11]). Интегрируемость таких систем является предметом активного изучения [8–10]. Например, в работе [8] изучалась интегрируемость симплектического отображения, связанного с уравнением Хироты, а в работе [9] рассматривалась система, связаная с неоднородной шестивершинной моделью. Итерируемое отображение, в последнем случае, определялось с помощью операций с числовыми блочными матрицами. С этой точки зрения, отображение, индуцируемое гауссовым разложением квантовых групп, является его естественным обобщением.

В настоящей заметке на примере квантовой группы $GL_q(2)$ продемонстрированы некоторые свойства модели с дискретным временем, каждый шаг итерации в которой связан с разложением Гаусса этой группы.

2. Гауссово разложение квантовых групп. Наиболее естественно квантовые группы описываются в рамках R-матричного формализма [1] основу которого составляет матричное RTT-соотношение

$$RT_1T_2 = T_2T_1R. \tag{1}$$

Это равенство есть экономная запись квадратичных перестановочных соотношений генераторов квантовой группы $T = \|t_{ik}\|$. Элементы числовой матрицы R играют роль структурных постоянных. R-матрицы, соответствующие всем классическим простым алгебрам Ли, известны. В равенстве (1) использованы общепринятые обозначения $T_1 = T \otimes I$, $T_2 = I \otimes T$. Наивная аналогия матрицы генераторов T с матрицами как элементами классических групп позволяет вводить и оперировать квантовыми аналогами хорошо известных классических объектов, таких как детерминанты и миноры. В частности, оказывается возможным провести разложение матрицы генераторов, аналогичное классическому разложению Гаусса числовых матриц. Именно, гауссовым разложением матричной квантовой группы (если оно существует) называется факторизация матрицы генераторов этой группы $T = \|t_{ij}\|$ следующего вида [4]

$$T = T_L T_D T_U, \tag{2}$$

где $T_L = \|l_{ik}\|$ – строго нижне-треугольная матрица (с единицами на главной диагонали $l_{kk} = 1$); $T_D = \mathrm{diag}(A_{kk})$; $T_U = \|u_{ik}\|$ – строго верхне-треугольная матрица ($u_{kk} = 1$). Удобно, также, определить $T^{(+)} = T_D T_U$ и $T^{(-)} = T_L T_D$. Будем называть базис из новых генераторов, вводимый разложением (2), гауссовым базисом. Для квантовых групп, являющихся деформациями классических групп всех серий, коммутационные соотношения между гауссовыми генераторами определяются соотношениями типа RTT-уравнений [4]

$$RT_{L1}R_D^{-1}T_{L2}R_D = T_{L2}R_D^{-1}T_{L1}R_DR, \tag{3}$$

$$RR_D^{-1}T_{U1}R_DT_{U2} = R_D^{-1}T_{U2}R_DT_{U1}R, \tag{4}$$

$$R_DT_{D1}T_{L2} = T_{L2}T_{D1}R_D, \tag{5}$$

$$R_DT_{U1}T_{D2} = T_{D2}T_{U1}R_D, \tag{6}$$

$$T_{L1}T_{U2} = T_{U2}T_{L1}, \tag{7}$$

$$T_{D1}T_{D2} = T_{D2}T_{D1}, \tag{8}$$

$$RT_1^{(\pm)}T_2^{(\pm)} = T_2^{(\pm)}T_1^{(\pm)}R. \tag{9}$$

В равенствах (3)–(8) R_D есть диагональная часть R-матрицы. Для полноты, к выписанным соотношениям необходимо присоединить дополнительные соотношения, выделяющие квантовые аналоги ортогональных и симплектических групп

$$T^{(\pm)}C(T^{(\pm)})^tC^{-1} = 1 = C(T^{(\pm)})^tC^{-1}T^{(\pm)}. \tag{10}$$

Здесь T^t – матрица, транспонированная к T, а C – известная числовая матрица [1]. Удобно, также, добавить соотношения, получаемые с помощью оператора перестановки $\mathcal{P}$ со свойствами $\mathcal{P}\,F_1\,\mathcal{P} = F_2$; $\mathcal{P}^2 = 1$ и формулу

$$RT_{D1}T_{D2} = T_{D2}T_{D1}R, \tag{11}$$

справедливую для рассматриваемых квантовых групп. Так как $\mathcal{P}R_D\mathcal{P} = R_D$, то применение оператора $\mathcal{P}$ к любому из уравнений (3)–(8), не содержащему R-матрицы, сводится просто к перестановке индексов $1 \leftrightarrow 2$. Ниже мы не различаем такие соотношения. Можно показать, что перечисленные соотношения между гауссовыми генераторами определяются заданием R-матрицы единственным образом [4].

Заметим, что в случае квантовых групп, как и в случае классических групп Ли, разложение типа (2) можно определять изменяя порядок сомножителей. Например, изменив порядок на противоположный, получим новое разложение с другими гауссовыми генераторами. Однако, как легко показать с помощью процедуры контракции [4], перестановочные соотношения между этими генераторами имеют прежний вид (3)–(9).

3. Модель дискретной динамики. Рассмотрим простейший случай матричной квантовой группы $GL_q(2)$. Гауссово разложение для этой группы имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & Au \\ lA & lAu + B \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Коммутационные соотношения генераторов группы $T = \|t_{ik}\|$ $(i, j = 1, 2)$ и генераторов гауссова базиса A, B, l, u даются, соответственно, формулами

$$\begin{aligned} t_{11}t_{ij} &= qt_{ij}t_{11},\ i \neq j; & [t_{12}, t_{21}] &= 0 \\ t_{22}t_{ij} &= q^{-1}t_{ij}t_{22},\ i \neq j; & [t_{11}, t_{22}] &= (q - q^{-1})t_{12}, t_{21}; \end{aligned} \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} Au = quA; \quad Al = qlA; \quad uB = qBu; \\ lB = qBl; \quad [A, B] = 0; \quad [u, l] = 0. \end{aligned} \qquad (14)$$

Для выражения гауссовых генераторов через стандартные генераторы необходимо потребовать обратимости главных q-миноров [4]. В нашем случае, это означает обратимость элемента t_{11}. Предполагая такую обратимость, имеем

$$A = t_{11}; \quad u = t_{11}^{-1}t_{12}; \quad l = t_{21}t_{11}^{-1}; \quad B = t_{11}^{-1}\mathcal{D}_q, \qquad (15)$$

где $\mathcal{D}_q = \det_q T = t_{11}t_{22} - qt_{12}t_{21} = AB$ – квантовый детерминант, порождающий, вместе с единицей, центр квантовой группы $GL_q(2)$. Изменив порядок матричных сомножителей в гауссовом разложении (12) на противоположный, получаем следующую новую матрицу:

$$T' = \begin{pmatrix} A + uBl & uB \\ Bl & B \end{pmatrix}. \qquad (16)$$

Представим, пользуясь соотношениями (15), элементы матрицы T' через исходные генераторы:

$$T' = \begin{pmatrix} t'_{11} & t'_{12} \\ t'_{21} & t'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} + q^3\mathcal{D}_q t_{11}^{-3} t_{12} t_{21} & q\mathcal{D}_q t_{11}^{-2} t_{12} \\ q\mathcal{D}_q t_{11}^{-2} t_{21} & \mathcal{D}_q t_{11}^{-1} \end{pmatrix}. \qquad (17)$$

Легко проверить, что матричные элементы t'_{ik} удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям (13), что и генераторы t_{ik} группы $GL_q(2)$. Последний результат имеет более универсальный смысл и может быть обобщен на квантовые группы, допускающие гауссово разложение. Точнее, справедливо следующее утверждение:

Предложение. *Пусть задана матричная квантовая группа $T = \|t_{ij}\|$, определяемая некоторой обратимой R-матрицей, коммутирующей со своей диагональной частью*

$$[R, R_D] = 0. \qquad (18)$$

Пусть T допускает гауссово разложение вида (2), генераторы которого подчиняются соотношениям (3)–(9), (11). Тогда матрица

$$T' = T_U T_D T_L \qquad (19)$$

удовлетворяет RTT-уравнению с исходной R-матрицей.

Доказательство. Требуется доказать, что $RT'_1T'_2 = T'_2T'_1R$. Используя перестановочные соотношения (3)–(9), (11), получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} RT'_1T'_2 &= RT_{U1}T_{D1}T_{L1}T_{U2}T_{D2}T_{L2} \\ &\overset{(7;5;3)}{=} RT_{U1}T_{D1}T_{U2}R_DT'_{D2}R^{-1}T_{L2}R_D^{-1}T_{L1}R_DRR_D^{-1} \\ &\overset{(6;11;5)}{=} RT_{U1}R_DT_{U2}R^{-1}T_{D2}R_D^{-1}T_{L2}T_{D1}T_{L1}R_DRR_D^{-1} \\ &\overset{(4;6;7)}{=} RR_DR^{-1}R_D^{-1}T'_2T'_1R_DRR_D^{-1} \\ &\overset{(18)}{=} T'_2T'_1R. \end{aligned}$$

Заметим, что условию (18) удовлетворяют все стандартно квантованные классические группы, кроме ортогональных групп серии B_{qn}.

Вернемся к группе $GL_q(2)$. Формулы (17) определяют эндоморфизм алгебры функций на группе $\mathrm{Fun}(GL_q(2))$, пополненной элементом t_{11}^{-1} (с подходящим доопределением коумножения, коединицы и антипода). Если считать элемент t'_{11}, как и t_{11}, обратимым, то процедуру гауссова разложения (12) можно повторить для матрицы T', и т.д. Таким образом, рассмотренное выше преобразование, сохраняя структуру перестановочных соотношений исходной квантовой группы, может быть интерпретировано как шаг эволюции некоторой системы в дискретном времени. Будем считать описанный выше эндоморфизм $(n+1)$-ым шагом итерации (полагая, далее, в формулах $t_{ij}^{(0)} \equiv t_{ij}$), соответствующим переходу динамической системы, "фазовым пространством" которой являются элементы матрицы T, от момента времени t_n $(T = T^{(n)})$ к моменту t_{n+1} $(T' = T^{(n+1)})$. В этом случае, соотношения (17) рассматриваются как рекуррентные формулы, разрешение которых эквивалентно интегрированию динамической задачи.

Легко видеть, что в процессе эволюции квантовый детерминант $\mathcal{D}_q$ остается неподвижным элементом, т.е. является интегралом движения. Развитие во времени недиагональных членов имеет одинаковую форму и зависит только от $t_{11}^{(i)}$ при $i \leq n-1$ и начальных значений t_{12}, t_{21}:

$$t_{ij}^{(n)} = (\mathcal{F}_+^{(n)})^{-1} t_{ij} (\mathcal{F}_-^{(n)})^{-1}, \quad i \neq j, \tag{20}$$

где $\mathcal{F}_+^{(n)} = \mathcal{D}_q^n t_{11} t_{11}^{(1)} \ldots . t_{11}^{(n-1)}$; $\mathcal{F}_-^{(n)} = \mathcal{D}_q^n t_{11}^{(n-1)} \ldots . t_{11}^{(1)} t_{11}$. Таким образом, наиболее трудной частью задачи является решение рекуррентного соотношения для $t_{11}^{(n)}$:

$$t_{11}^{(n+1)} = t_{11}^{(n)} + q^3 \mathcal{D}_q (t_{11}^{(n)})^{-3} (\mathcal{F}_+^{(n)})^{-1} t_{12} (\mathcal{F}_+^{(n)} \mathcal{F}_-^{(n)})^{-1} t_{21} (\mathcal{F}_-^{(n)})^{-1}. \tag{21}$$

Получить такое решение в замкнутой форме удается только в частном случае треугольной T-матрицы. Пусть, например, $t_{12} = 0$. Тогда соотношение (21) становится тривиальным и дает постоянные решения для диагональных элементов: $t_{11}^{(n)} = t_{11}$, $t_{22}^{(n)} = t_{22} = \mathcal{D}_q t_{11}^{-1}$. Из соотношения (20) для недиагонального элемента следует

$$t_{21}^{(n)} = q^n \mathcal{D}_q^n (t_{11})^{-2n} t_{21}. \tag{22}$$

Изменение матричных элементов с увеличением числа итераций может быть задано с помощью оператора эволюции $\mathcal{U}^{(n)}$:

$$t_{ij}^{(n)} = \mathcal{U}^{(n)} t_{ij} (\mathcal{U}^{(n)})^{-1}. \tag{23}$$

Так как диагональные элементы не меняются от шага к шагу, то имеет место $\mathcal{U}^{(n)} = \mathcal{U}^n$, где оператор "пошаговой" эволюции $\mathcal{U}$ определяется уравнением

$$\mathcal{U} t_{21} = q \mathcal{D}_q (t_{11})^{-2} t_{21} \mathcal{U}.$$

Решая это уравнение, формально, получаем

$$\mathcal{U}^{(n)} = A \exp \left(-n \ln q \log_q t_{11} \log_q \frac{t_{11}}{\mathcal{D}_q} \right), \tag{24}$$

где A – произвольный элемент центра. В заключении раздела, приведем перестановочное соотношение между элементами $t_{21}^{(n)}$ в разные моменты времени

$$t_{21}^{(n)} t_{21}^{(m)} = q^{2(m-n)} t_{21}^{(n)} t_{21}^{(n)}.$$

4. Матричная реализация. Приведенные выше рекуррентные соотношения (17) упрощаются, если перейти к конечномерному представлению группы $GL_q(2)$. Воспользуемся реализацией элементов квантовых групп как функций генераторов соответствующих недеформированных алгебр Ли [5]. Для простоты ограничимся случаем $SL_q(2)$:

$$T = T^{(-)} \otimes T^{(+)} = \\ = \begin{pmatrix} q^{-H/2} \otimes q^{H/2} & f q^{-H/2} \otimes X^{(+)} \\ g X^{(-)} \otimes q^{H/2} & q^{H/2} \otimes q^{-H/2} + f g X^{(-)} \otimes X^{(+)} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

В этой формуле $T^{(-)}, T^{(+)}$ – матрицы, полученные в результате гауссова разложения (см. п.2); H, $X^{(\pm)}$ – генераторы классической алгебры Ли $\mathrm{sl}(2, C)$; f, g – произвольные постоянные, которые, далее, положим равными 1. Используя представление наименьшей размерности алгебры $\mathrm{sl}(2, C)$

$$X^{(+)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad X^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ввиду (25), получаем для группы $SL_q(2)$:

$$t_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad t_{12} = \begin{pmatrix} 0 & q^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{1/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$t_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad t_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать эту матричную реализацию как начальную конфигурацию системы в "фазовом пространстве" T. Тогда рекуррентные соотношения (17) для элементов $T^{(n)}$ удается легко разрешить. Получаем

$$t_{11}^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & n & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad t_{12}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & q^{n-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{1/2-n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$t_{21}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^{1/2-n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{n-1/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad t_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 1-n & q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом представлении удается, также, найти выражение для оператора эволюции (23):

$$\mathcal{U}^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & -n(q-q^{-1})^{-1}q^{-n} & q^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Заключительные замечания. Очевидные обобщения рассмотренной модели на другие квантовые группы, возможные ввиду Предложения из п. 3, приводят к значительному усложнению рекуррентных соотношений (17). Однако, даже простейший случай дискретной динамики, основанной на гауссовом разложении группы $GL_q(2)$, достаточно интересен для детального анализа.

На это указывает многообразие возможных решений рекуррентных соотношений, получающихся в случае отображения числовых матриц (соотношения (17) в которых $q = 1$ и все t_{ij} являются числами). Последнее не является неожиданным, так как, даже, в хорошо известном случае отображения комплексной плоскости C в себя $z \mapsto z^2 + c$, где c-произвольное комплексное число, дискретная динамика оказывается нетривиальной [7].

В случае числовых матриц инвариантность детерминанта при итерациях (17) основана на известном свойстве определителей $\det AB = \det A \det B$. В этом случае, к тому же, появляется еще один закон сохранения, так как при $t_{12}^{(n)}$, $t_{21}^{(n)}$ не равных нулю, их отношение остается постоянным. Следовательно, "фазовые точки" с течением дискретного времени не покидают поверхности, определяемой уравнениями

$$t_{11}^{(n)} t_{22}^{(n)} - t_{12}^{(n)} t_{21}^{(n)} = \mathcal{D}, \quad t_{12}^{(n)}, = \kappa t_{21}^{(n)}, \tag{26}$$

где $\mathcal{D}$ и κ – произвольные числа. Таким образом, только два рекуррентных соотношения определяют динамику в случае числовых матриц из $GL(2, \mathbb{C})$:

$$\frac{t_{11}^{(n+1)}}{t_{11}^{(n)}} = 1 + \mathcal{D}^{2n+1} \kappa (t_{11}^{(n)} t_{11}^{(n-1)} \ldots.. t_{11}^{(0)})^{-4} (t_{21}^{(0)})^2. \tag{27}$$

и

$$t_{21}^{(n+1)} = \mathcal{D} t_{11}^{-2} t_{21}. \tag{28}$$

Среди возможных решений соотношений (27), (28) выделяются критические, в которых, при некотором n, $t_{11}^{(n)}$ становится равным нулю. В этом случае эволюция системы обрывается, так как следующий шаг не может быть сделан. Простейший пример такой ситуации дает матрица $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ переходящая в $T' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ которая не имеет разложения вида $T' = T_L T_D T_U$.

Как указывалось выше в п. 4, для анализа динамики в рассматриваемой модели удобно использовать представления квантовой группы $GL_q(2)$. Особенно интересным может оказаться использование бесконечномерных представлений полученных, например, с помощью процедуры q-бозонизации квантовых групп [6]. Мы надеемся детально изучить этот вопрос в отдельной работе.

Литература

1. Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, — Алгебра и Анализ **1** (1989), 178–206.
2. L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, and L.A.Takhtajan, *Quantum groups.* Braid group, Knot theory and Statistical Mechanics, C. N. Yang, M.-L. Ge (Eds.), World Sci. 1989, p. 97–110.
3. C. Fronsdal, A. Galindo,, — Lett. Math. Phys. **27** (1993), 59.
4. Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, М. А. Соколов, *Разложения Гаусса квантовых групп и супергрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **22** (1995), 155–177.
5. M. A. Sokolov, *On Gauss decomposition of quantum groups and Jimbo homomorphism.* Preprint SPBU-IP-97-30, St. Petersburg, 1997.
6. E. V. Damaskinsky and M. A. Sokolov, — J. Phys. A. **28** (1995), 3725–3732.
7. А. П. Веселов, — Успехи Мат. Наук **46** (1991), 3–45.
8. L. D. Faddeev, A. Yu. Volkov, — Lett. Math. Phys. **32** (1994), 125–135.
9. И. Г. Корепанов, *Динамическая система, связанная с неоднородной шестивершинной моделью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **224** (1995), 225–239.
10. I. G. Korepanov, *Vacuum curves and classical integrable systems in* $2+1$ *discrete dimensions.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **235** (1996), 273–286.
11. N. Yu. Reshetikhin, *Integrabe discrete systems.* Quantum groups and their application in physics. L. Castellani, J. Wess (eds.) 1996, pp.445–487.

Kulish P. P., Sokolov M. A. Gauss decomposition of quantum groups and a discrete dynamical model.

A discrete dynamical model based on the Gauss decomposition of the quantum group $GL_q(2)$ is considered.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский Институт
Машиностроения

Поступило 8 июня 1998 г.