Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 251, 1998 г.

А. А. Андрианов, М. В. Иоффе, Д. Н. Нишнианидзе

НОВЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ ДВУМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ДЕФОРМИРОВАННОЙ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ АЛГЕБРОЙ

1. Введение

Поиск классических, либо квантовых систем, обладающих дополнительными интегралами движения, либо операторами симметрии, представляет собой одну из традиционных задач математической физики [1–4]. Среди методов поиска таких систем особую роль занимают алгебраические алгоритмы, основанные на скрытых симметриях динамической системы [5, 6]. Более конкретно, недавно была предложена [7] схема построения интегрируемых двумерных систем, использующая реализацию деформированной алгебры суперсимметрии (SUSY) дифференциальными операторами второго (и выше) порядка. Оказалось, что идея суперсимметрии [8–11], т.е. построение изоспектральной пары гамильтонианов, однозначно связана с интегрируемостью обоих гамильтонианов, т.е. с существованием дифференциального оператора симметрии, полиномиального по производным, который переводит решения двумерного уравнения Шредингера в другие решения с той же энергией. Квазиклассическая редукция деформированной суперсимметричной алгебры [7] позволила найти факторизацию классических интегралов движения для соответствующих гамильтонианов [12]. В результате удалось продвинуться в понимании структуры аналитически разрешимых интегралов движения и найти новые классы интегрируемых потенциалов [12, 13].

В настоящей работе мы продолжаем исследование квантовых и классических систем, которые являются интегрируемыми в выше изложенном смысле, и представляем новые классы двумерных потенциалов, которым соответствуют операторы суперсим-

Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 96-01-00535).

метрии второго порядка с гиперболической либо вырожденной структурой в старших производных.

В Разд. 2 исследуются соотношения сплетания дифференциальными операторами $q^{\pm}$ второго порядка по производным общего вида для пары квантовых гамильтонианов Шредингеровского типа. Найден класс частных решений этих соотношений сплетания для случаев гиперболической (Лоренцевой) $g_{ik} = \mathrm{diag}(1,-1)$ и вырожденной $g_{ik} = \mathrm{diag}(1,0)$ структуры операторов $q^{\pm}$ по вторым производным. Построены дифференциальные операторы четвертого порядка по производным, которые являются операторами симметрии для сплетающих гамильтонианов. В Разд. 3 рассматривается квазиклассический предел $\hbar \to 0$ для гамильтонианов и получен ряд классических систем с интегралами движения четвертой степени по импульсам. В Разд. 4 построен класс новых интегрируемых систем, обладающих аналогичной структурой интегралов движения.

2. SUSY подход к построению 2-мерных интегрируемых моделей в квантовой механике

В работах [7, 12, 14] построено двумерное обобщение полиномиальной суперсимметричной квантовой механики [15], в котором главную роль играют соотношения сплетания между двумя гамильтонианами $H^{(1)}, H^{(2)}$ посредством операторов $q^{\pm}$ второго порядка по производным:

$$H^{(1)}q^{+} = q^{+}H^{(2)}, \quad q^{-}H^{(1)} = H^{(2)}q^{-}, \tag{1}$$

$$H^{(i)} = -\hbar^2\Delta + V(\vec{x}), \quad \Delta \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2, \quad \partial_i \equiv \partial/\partial x_i,$$

$$q^{+} = (q^{-})^{\dagger} = \hbar^2 g_{ik}(\vec{x})\partial_i\partial_k + \hbar C_i(\vec{x},\hbar)\partial_i + B(\vec{x},\hbar),$$

где $\hbar$ – постоянная Планка, а коэффициентные функции вещественны.

Соотношения сплетания (1) означают, что, с точностью до нуль-мод операторов $q^{\pm}$, спектры операторов $H^{(1)}, H^{(2)}$ совпадают, а их собственные функции связаны между собой:

$$\Psi^{(2)} \sim q^{-}\Psi^{(1)}, \quad \Psi^{(1)} \sim q^{+}\Psi^{(2)}. \tag{2}$$

Легко проверить, что гамильтонианы $H^{(1)}$, $H^{(2)}$, удовлетворяющие соотношениям сплетания (1), обладают операторами симметрии $R^{(1)}, R^{(2)}$, соответственно:

$$[R^{(i)}, H^{(i)}] = 0, \quad R^{(1)} = q^{+}q^{-}, \quad R^{(2)} = q^{-}q^{+}, \quad i = 1,2. \tag{3}$$

Как известно [15], в одномерном случае аналогичные соотношения приводят к операторам $R^{(i)}$, которые являются полиномами от $H^{(i)}$ с постоянными коэффициентами. Отличительной особенностью двумерного случая является [14] существование нетривиальных операторов динамической симметрии $R^{(i)}$, которые не сводятся к функции от гамильтонианов $H^{(i)}$.

В работе [7] было показано, что в случае единичной метрики $g_{ik} = \delta_{ik}$ операторы $R^{(i)}$ сводятся к дифференциальным операторам второго порядка, а соответствующие квантовые системы допускают разделение переменных в параболических, эллиптических или полярных системах координат. Для всех остальных метрик g_{ik} операторы $R^{(i)}$ имеют четвертый порядок по производным.

Уравнения сплетания (1) могут быть записаны в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\hbar\partial_i C_k + \hbar\partial_k C_i + \hbar^2\triangle g_{ik} - (V^{(1)} - V^{(2)})g_{ik} = 0; \\ &\hbar^2\triangle C_i + 2\hbar\partial_i B + 2\hbar g_{ik}\partial_k V^{(2)} - (V^{(1)} - V^{(2)})C_i = 0; \\ &\hbar^2\triangle B + \hbar^2 g_{ik}\partial_k\partial_i V^{(2)} + \hbar C_i\partial_i V^{(2)} - (V^{(1)} - V^{(2)})B = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

где метрика $g_{ik}(\vec{x})$ является квадратным трехчленом по переменным x_1, x_2:

$$g_{11} = ax_2^2 + a_1x_2 + b_1; \quad g_{22} = ax_1^2 + a_2x_1 + b_2;$$

$$g_{12} = -\frac{1}{2}(2ax_1x_2 + a_1x_1 + a_2x_2) + b_3.$$

I. Рассмотрим соотношения сплетания (4) для суперзаряда с метрикой $g_{ik} = \mathrm{diag}(1, -1)$:

$$q^+ = \hbar^2(\partial_1^2 - \partial_2^2) + \hbar C_k\partial_k + B. \tag{5}$$

В работе [14] показано, что решение системы (4) сводится к решению системы двух уравнений:

$$\partial_-(C_-F) = -\partial_+(C_+F); \tag{6}$$

$$\partial_+^2 F = \partial_-^2 F, \tag{7}$$

где $C_1 \mp C_2 \equiv C_\pm(x_\pm)$ зависят только от $x_\pm \equiv x_1 \pm x_2$, соответственно, а уравнение (7) означает, что функция F может быть записана в виде $F = F_1(x_+ + x_-) + F_2(x_+ - x_-)$. Потенциалы $V^{(1,2)}$ и функция B выражаются через решения системы уравнений (6), (7):

$$V^{(1,2)} = \pm\frac{\hbar}{2}(C'_+ + C'_-) + \frac{1}{8}(C_+^2 + C_-^2) + \frac{1}{4}(F_2(x_+ - x_-) - F_1(x_+ + x_-)), \tag{8}$$

$$B = \frac{1}{4}(C_+C_- + F_1(x_+ + x_-) + F_2(x_+ - x_-)). \tag{9}$$

В случае, когда функция F допускает факторизацию $F = F_+(x_+)F_-(x_-)$, решение приведено в работе [14]. В настоящей работе будут построены другие решения системы (6), (7).

1) Подставляя в (7) общее решение уравнения (6)

$$F = L\left(\int \frac{dx_+}{C_+} - \int \frac{dx_-}{C_-}\right)/(C_+C_-), \tag{10}$$

получаем функционально-дифференциальное уравнение на функцию L и $A'_\pm \equiv 1/C_\pm$:

$$\left(\frac{A'''_+}{A'_+} - \frac{A'''_-}{A'_-}\right)L(A_+ - A_-) +$$

$$+3(A''_+ + A''_-)L'(A_+ - A_-) + (A'^2_+ - A'^2_-)L''(A_+ - A_-) = 0, \tag{11}$$

где L' производная функции L по своему аргументу. Уравнение (11) легко решается, если функции $A_\pm$ являются решениями уравнений:

$$A''_\pm = \lambda^2 A_\pm,$$

т.е. $A_\pm = \sigma_\pm \exp(\lambda x_\pm) + \delta_\pm \exp(-\lambda x_\pm)$, с параметрами, удовлетворяющими условию $\sigma_+\delta_+ = \sigma_-\delta_-$:

$$L(A_+ - A_-) = \alpha(A_+ - A_-)^{-2} + \beta,$$

где α и β вещественные константы интегрирования. При $\lambda^2 > 0$ имеем (с точностью до произвольного сдвига по $x_\pm$) два решения:

$$a) \quad A_\pm = k\sinh(\lambda x_\pm), \qquad b) \quad A_\pm = k\cosh(\lambda x_\pm).$$

Тогда (10) позволяет найти функции F_1 и F_2:

$$\begin{gathered} a)\ F_1(2x) = F_2(2x) = \frac{k_1}{\cosh^2(\lambda x)} + k_2\cosh(2\lambda x), \\ C_\pm = \frac{k}{\cosh(\lambda x_\pm)},\ k \neq 0, \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} b)\, F_1(2x) = -\,F_2(2x) = \frac{k_1}{\sinh^2(\lambda x)} + k_2 \sinh^2(\lambda x), \\ C_\pm = \frac{k}{\sinh(\lambda x_\pm)},\ k \neq 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Решение при $\lambda^2 < 0$ получается путем перехода от гиперболических функций к тригонометрическим.

В предельном случае $\lambda = 0$ решения имеют вид:

$$F_1(2x) = -F_2(2x) = k_1 x^2 + k_2 x^4,\ C_\pm = \pm\frac{k}{x_\pm},\ k \neq 0, \tag{14}$$

$$F_1(2x) = -F_2(2x) = k_1 x^{-2} + k_2 x^2,\ C_\pm = \frac{k}{x_\pm},\ k \neq 0. \tag{15}$$

2) Другой класс решений системы (6), (7) можно получить, если в формуле (10) перейти от $C_\pm$ к функциям $f_\pm : C_\pm \equiv \pm f_\pm / f'_\pm$. Тогда F из (10) представима в виде $F = U(f_+ f_-) f'_+ f'_-$, где U – произвольная функция. Подставляя это выражение в (7), получаем уравнение:

$$\begin{gathered} (f_+^{'2} f_-^2 - f_+^2 f_-^{'2}) U''(f) + 3f\left(\frac{f''_+}{f_+} - \frac{f''_-}{f_-}\right) U'(f) + \left(\frac{f'''_+}{f'_+} - \frac{f'''_-}{f'_-}\right) U(f) = 0, \\ f \equiv f_+ f_-. \end{gathered}$$

Нетрудно увидеть, что $f_\pm = \alpha_\pm \exp(\lambda x_\pm) + \beta_\pm \exp(-\lambda x_\pm)$ и $U = a + 4b f_+ f_-$, являются решениями этого уравнения (a,b – вещественные константы). Функции

$$\begin{aligned} F_1(x) =& k_1(\alpha_+\alpha_- \exp(\lambda x) + \beta_+\beta_- \exp(-\lambda x)) + \\ &+ k_2(\alpha_+^2\alpha_-^2 \exp(2\lambda x) + \beta_+^2\beta_-^2 \exp(-2\lambda x)), \\ F_2(x) =& -k_1(\alpha_+\beta_- \exp(\lambda x) + \beta_+\alpha_- \exp(-\lambda x)) - \\ &- k_2(\alpha_+^2\beta_-^2 \exp(2\lambda x) + \beta_+^2\alpha_-^2 \exp(-2\lambda x)), \\ C_\pm =& \pm\frac{\alpha_\pm \exp(\lambda x_\pm) + \beta_\pm \exp(-\lambda x_\pm)}{\lambda(\alpha_\pm \exp(\lambda x_\pm) - \beta_\pm \exp(-\lambda x_\pm))} \end{aligned} \tag{16}$$

являются вещественными решениями системы (6), (7), если при $\lambda^2 > 0$ константы $\alpha_\pm, \beta_\pm$ вещественны, а при $\lambda^2 < 0$ $\alpha_\pm = \beta_\pm^*$.

3) Для нахождения третьего типа решений перепишем уравнение (6) в переменных $x_{1,2}$:

$$2(F_1(x_1)+F_2(x_2))\partial_1(C_+ + C_-) + F'_1(x_1)(C_+ + C_-) + F'_2(x_2)(C_+ - C_-) = 0.$$

Тогда легко проверить, что у этого уравнения имеются следующие решения:

$$\begin{aligned} 3a)\ & C_+(x_+) = \sigma_1\sigma_2 \exp(\lambda x_+) + \delta_1\delta_2 \exp(-\lambda x_+) + c, \\ & C_-(x_-) = \sigma_1\delta_2 \exp(\lambda x_-) + \sigma_2\delta_1 \exp(-\lambda x_-) + c, \\ & F_1(x_1) = 0, \\ & F_2(x_2) = \frac{1}{(\sigma_2 \exp(\lambda x_2) - \delta_2 \exp(-\lambda x_2))^2}; \end{aligned} \tag{17}$$

$$3b)\ C_+(x) = C_-(x) = ax^2 + c,\ \ F_1(x_1) = 0,\ \ F_2(x_2) = \frac{4b^2}{x_2^2}; \tag{18}$$

$$\begin{aligned} 3c)\ & C_+(x_+) = \sigma_1\sigma_2 \exp(\lambda x_+) + \delta_1\delta_2 \exp(-\lambda x_+), \\ & C_-(x_-) = \sigma_1\delta_2 \exp(\lambda x_-) + \sigma_2\delta_1 \exp(-\lambda x_-), \\ & F_1(x_1) = \frac{\nu_1}{(\sigma_1 \exp(\lambda x_1) + \delta_1 \exp(-\lambda x_1))^2} + \gamma, \\ & F_2(x_2) = \frac{\nu_2}{(\sigma_2 \exp(\lambda x_2) - \delta_2 \exp(-\lambda x_2))^2} - \gamma. \end{aligned} \tag{19}$$

Еще два решения, аналогичных 3а) и 3б), получаются, если в (17) и (18) поменять местами функции $F_1(x_1)$ и $F_2(x_2)$.

Подставляя полученные решения (12)–(19) в общее выражения для потенциалов (8), получаем, соответственно, потенциалы (20)–(27)

$$\begin{aligned} V^{(1,2)} = \mp \frac{\hbar k\lambda}{2}\left[\frac{\sinh(\lambda x_+)}{\cosh^2(\lambda x_+)} + \frac{\sinh(\lambda x_-)}{\cosh^2(\lambda x_-)}\right] + \\ + \frac{k^2}{8}\left[\frac{1}{\cosh^2(\lambda x_+)} + \frac{1}{\cosh^2(\lambda x_-)}\right] + \\ \frac{1}{4}\left[\frac{k_1}{\cosh^2(\lambda x_2)} - \frac{k_1}{\cosh^2(\lambda x_1)} + k_2\cosh(2\lambda x_2) - k_2\cosh(2\lambda x_1)\right]; \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} V^{(1,2)} = \mp \frac{\hbar k\lambda}{2}\left[\frac{\cosh(\lambda x_+)}{\sinh^2(\lambda x_+)} + \frac{\cosh(\lambda x_-)}{\sinh^2(\lambda x_-)}\right] + \\ + \frac{k^2}{8}\left[\frac{1}{\sinh^2(\lambda x_+)} + \frac{1}{\sinh^2(\lambda x_-)}\right] - \\ -\frac{1}{4}\left[\frac{k_1}{\sinh^2(\lambda x_2)} + \frac{k_1}{\sinh^2(\lambda x_1)} + k_2\cosh(2\lambda x_1) + k_2\cosh(2\lambda x_2)\right]; \end{aligned} \tag{21}$$

$$V^{(1,2)} = \mp\frac{\hbar k}{2}\left(\frac{1}{x_+^2}+\frac{1}{x_-^2}\right)+\frac{k^2}{8}\left(\frac{1}{x_+^2}+\frac{1}{x_-^2}\right)-\frac{1}{4}\left[\frac{k_1}{x_1^2}+\frac{k_1}{x_2^2}+k_2(x_1^2+x_2^2)\right]. \tag{22}$$

Отметим, что потенциал (21) при $k_2 = 0$ и потенциал (22) подробно исследовались ранее (см., например, [4]).

$$\begin{aligned} V^{(1,2)} = \mp\, &\frac{\hbar k}{2}\left(\frac{1}{x_+^2}-\frac{1}{x_-^2}\right)+\frac{k^2}{8}\left(\frac{1}{x_+^2}+\frac{1}{x_-^2}\right)- \\ &-\frac{1}{4}\left[k_1(x_1^2+x_2^2)+k_2(x_1^4+x_2^4)\right]; \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} V^{(1,2)} = &\frac{2\alpha_+\beta_+(1\mp 8\hbar\lambda^2)+\alpha_+^2\exp(2\lambda x_+)+\beta_+^2\exp(-2\lambda x_+)}{8\lambda^2(\alpha_+\exp(\lambda x_+)-\beta_+\exp(-\lambda x_+))^2}+ \\ &\frac{2\alpha_-\beta_-(1\pm 8\hbar\lambda^2)+\alpha_-^2\exp(2\lambda x_-)+\beta_-^2\exp(-2\lambda x_-)}{8\lambda^2(\alpha_-\exp(\lambda x_-)-\beta_-\exp(-\lambda x_-))^2}- \\ &\frac{1}{4}\Big[k_1(\alpha_+\beta_-\exp(2\lambda x_2)+\alpha_-\beta_+\exp(-2\lambda x_2))+k_2(\alpha_+^2\beta_-^2\exp(4\lambda x_2)+ \\ &\alpha_-^2\beta_+^2\exp(-4\lambda x_2))+k_1(\alpha_+\alpha_-\exp(2\lambda x_1)+\beta_+\beta_-\exp(-2\lambda x_1))+ \\ &k_2(\alpha_+^2\alpha_-^2\exp(4\lambda x_1)+\beta_+^2\beta_-^2\exp(-4\lambda x_1))\Big]; \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} V^{(1,2)} = \pm\, &\frac{\hbar\lambda}{2}(\sigma_1\exp(\lambda x_1)-\delta_1\exp(-\lambda x_1))(\sigma_2\exp(\lambda x_2)+\delta_2\exp(-\lambda x_2))+ \\ &\frac{1}{8}\Big[(\sigma_1^2\exp(\lambda x_1)+\delta_1^2\exp(-\lambda x_1))(\sigma_2^2\exp(\lambda x_2)+\delta_2^2\exp(-\lambda x_2))+ \\ &2c(\sigma_1\exp(\lambda x_1)-\delta_1\exp(-\lambda x_1))(\sigma_2\exp(\lambda x_2)-\delta_2\exp(-\lambda x_2))\Big]+ \\ &\frac{1}{4(\sigma_2\exp(2\lambda x_2)-\delta_2\exp(-2\lambda x_2))^2}; \end{aligned} \tag{25}$$

$$V^{(1,2)} = \pm 2\hbar a x_1+\frac{1}{4}\left[a^2(x_1^4+x_2^4+6x_1^2x_2^2)+ac(x_1^2+x_2^2)\right]+\frac{b^2}{x_2^2}; \tag{26}$$

$$\begin{aligned} V^{(1,2)} = \pm\, &\frac{\hbar\lambda}{2}(\sigma_1\exp(\lambda x_1)-\delta_1\exp(-\lambda x_1))(\sigma_2\exp(\lambda x_2)+\delta_2\exp(-\lambda x_2))+ \\ &\frac{1}{8}(\sigma_1^2\exp(\lambda x_1)+\delta_1^2\exp(-\lambda x_1))(\sigma_2^2\exp(\lambda x_2)+\delta_2^2\exp(-\lambda x_2))+ \\ &\frac{\nu_2}{(\sigma_2\exp(2\lambda x_2)-\delta_2\exp(-2\lambda x_2))^2}-\frac{\nu_1}{(\sigma_1\exp(2\lambda x_1)+\delta_1\exp(-2\lambda x_1))^2}. \end{aligned} \tag{27}$$

Гамильтонианы с перечисленными выше потенциалами обладают операторами симметрии $R^{(1)} = q^+q^-$, $R^{(2)} = q^-q^+$, которые могут быть получены подстановкой решений (12)–(19) в выражения (5) для суперзарядов $q^{\pm}$.

Отметим, что потенциалы (21)–(27) имеют точки сингулярности на плоскости x_1Ox_2, поэтому отдельно следует исследовать асимптотику соответствующих волновых функций и их поведение при действии операторов суперпреобразования $q^{\pm}$ (5) и операторов симметрии $R^{(1)}, R^{(2)}$. В частности, в случае потенциалов (25)–(27) операторы $q^{\pm}$ сохраняют асимптотический вид волновых функций в точке сингулярности, и операторы $R^{(1)}, R^{(2)}$ являются физическими операторами симметрии в этих системах. Свойства симметрии для потенциалов (21), (22) обсуждались ранее (см. например, [4]). В случаях (23), (24) операторы $R^{(1)}, R^{(2)}$, вообще говоря, меняют асимптотический вид волновых функций и являются, возможно, лишь формальными операторами симметрии, коммутирующими с гамильтонианом. Свойства симметрии для этих систем требуют дальнейшего исследования.

II. Исследуем теперь случай вырожденной метрики $g_{ik} = \mathrm{diag}(1,0)$, когда суперзаряд имеет вид:

$$q^{+} = \hbar^2\partial_1^2 + \hbar C_k\partial_k + B. \tag{28}$$

Из уравнений (4) следует, что:

$$\begin{aligned}
&C_1 = -x_2F_1' + G_1; \quad C_2 = F_1; && (29)\\
&V^{(1)}+ = \hbar(2G_1' - x_2F_1'') + \frac{1}{4}x_2^2(F_1^2)'' - x_2(F_1G_1)' + K_1(x_1) + K_2(x_2); &&\\
&V^{(2)} = \hbar x_2F_1'' + \frac{1}{4}x_2^2(F_1^2)'' - x_2(F_1G_1)' + K_1(x_1) + K_2(x_2); &&\\
&B = -\frac{\hbar}{2}(G_1' + x_2F_1'') + \frac{1}{2}G_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2F_1F_1'' + x_2F_1G_1' - K_1(x_1), &&
\end{aligned}$$

где F_1, G_1, K_1 произвольные вещественные функции переменной x_1, которые удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$-\frac{\hbar^2}{2}G_1''' + \frac{\hbar}{2}((G_1^2)'' + 2G_1^{'}2) + G_1K_1' + 2G_1'K_1 - F_1(F_1G_1)' - G_1'G_1^2 = m_1F_1; \tag{30}$$

$$\frac{\hbar^2}{2}F_1^{(IV)} - \hbar(F_1'G_1'' + 2G_1'F_1'') - G_1(2G_1'F_1' + G_1''F_1) -$$

$$F_1'K_1' + \frac{1}{2}F_1(F_1^2)'' - 2G_1'^2F_1 - 2F_1''K_1 = m_2F_1; \tag{31}$$

$$\frac{1}{4}G_1(F_1^2)''' + F_1'(F_1G_1)'' + 3G_1'F_1F_1'' = m_3F_1; \tag{32}$$

$$\frac{1}{4}F_1'(F_1^2)''' + F_1F_1''^2 = m_4F_1, \tag{33}$$

а $K_2(x_2)$ должна быть полиномом от x_2 с постоянными коэффициентами:

$$K_2(x_2) = m_0 - m_1x_2 - \frac{1}{2}m_2x_2^2 - \frac{1}{3}m_3x_2^3 + \frac{1}{4}m_4x_2^4.$$

При решении уравнения (33) можно заметить, что его ненулевым решением является постоянная функция $F_1 = k_1$ при $m_4 = 0$. Для нахождения остальных решений (33) введем функцию

$$U(F_1) = F_1'(x_1), \tag{34}$$

что позволяет понизить порядок дифференциального уравнения:

$$U'' + \frac{3}{U}U'^2 + \frac{3}{F_1}U' - \frac{2m_4}{U^3} = 0. \tag{35}$$

Решение уравнения (35) известно [17], и подставляя его в (34), получаем уравнение для функции $F_1(x_1)$:

$$\int F_1^{1/2}(m_4F_1^4 + nF_1^2 + k)^{-1/4}dF_1 = x_1, \tag{36}$$

где n и k – постоянные интегрирования.

Интеграл (36) выражается в виде конечной комбинации элементарных функций только в том случае, когда лишь одна из констант m_4, n, k отлична от нуля, а две остальные равны нулю. Таким образом, решениями уравнения (33) в элементарных функциях являются функции $F_1 = k_1, F_1 = x_1/n, F_1 = (3/2)^{2/3}k^{1/6}x_1^{2/3}, F_1 = m_4^{1/2}x_1^2/4$. Для простоты будут рассматриваться решения, соответствующие частным значениям констант m_4, n, k. Решения для произвольных m_4, n, k будут отличаться лишь некоторыми коэффициентами. При решении уравнений (30)–(32) рассмотрим отдельно два случая: $G_1 \equiv 0$ и $G_1 \neq 0$. Функция $F_1 = x_1$ в обоих случаях приводит к потенциалам $V^{(1,2)}$ с разделяющимися переменными, поэтому далее не будут рассматриваться.

1) $G_1 = 0$.

Функция $F_1 = k_1$ при этом тоже приводит к потенциалам $V^{(1,2)}$ с разделяющимися переменными. Более интересный выбор $F_1 = x_1^2$ и $F_1 = x_1^{2/3}$ ведет, соответственно, к

$$V^{(1,2)} = \mp 2\hbar x_2 + 3x_1^2 x_2^2 + l x_1^{-2} - \frac{m_2}{8}(x_1^2 + 4x_2^2) + \frac{1}{2}(x_1^4 + 8x_2^4) \quad (37)$$

и

$$V^{(1,2)} = \frac{7\hbar^2}{36} x_1^{-2} \pm \frac{2\hbar}{9} x_2 x_1^{-4/3} + \frac{1}{9} x_2^2 x_1^{-2/3} + 9 l x_1^{2/3} - \frac{m_2}{8}(9x_1^2 + 4x_2^2) + \frac{1}{2} x_1^{4/3}. \quad (38)$$

где l – произвольная вещественная константа.

2) $G_1 \neq 0$.

a) Для $F_1 = k_1 \neq 0$ из уравнения (31) следует, что функция $G_1(x_1)$ удовлетворяет уравнению:

$$\int \frac{G_1^2 dG_1}{\sqrt{k - \frac{1}{2} m_2 G_1^4}} = x_1,$$

которое решается в элементарных функциях, когда $k > 0$, $m_2 = 0$ или $k = 0$, $m_2 < 0$. В первом случае, переопределяя константы, после трансляции по переменной x_2 имеем выражения:

$$V^{(1,2)} = -\frac{5\hbar^2}{36} x_1^{-2} + \frac{\hbar k_2}{3}(1 \pm 1) x_1^{-2/3} - \frac{k_1 k_2}{3} x_2 x_1^{-2/3} + \frac{1}{4}\left(k_3^2 + \frac{3k_1 m_1}{k_2}\right) x_1^{2/3} - m_1 x_2 + \frac{k_1^2}{2}. \quad (39)$$

Второй случай ($k = 0, m_4 < 0$) снова соответствует разделению переменных.

b) В случаях $F_1 = x_1^{2/3}$ и $F_1 = x_1^2$ находим общие решения уравнения (32) и, подставляя их в уравнения (30), (31), определяем функцию $K_1(x_1)$ и константы интегрирования. В результате, получаем выражения для потенциалов:

$$V^{(1,2)} = \frac{7\hbar^2}{36} x_1^{-2} \pm \frac{2\hbar}{9} x_2 x_1^{-4/3} \pm \hbar k_1 + \frac{1}{9} x_2^2 x_1^{-2/3} - \frac{5k_1}{3} x_2 x_1^{2/3} + \frac{3m_1}{8k_1} x_1^{2/3} + \frac{1}{2} x_1^{4/3} + \frac{k_1^2}{4} x_1^2 - m_1 x_2 + \frac{k_1}{9}(1 + 15k_1) x_2^2, \quad (40)$$

$$V^{(1,2)} = \frac{3\hbar^2}{4}x_1^{-2} \mp \hbar(k_1 x_1^{-2} + 2x_2) + 3x_2^2 x_1^2 + \frac{k_1^2}{4}x_1^{-2} + \frac{1}{2}x_1^4 + 4x_2^4 - \frac{1}{8}(12k^2 + m_2)x_1^2 - \frac{1}{2}(12k^2 + m_2)x_2^2 - \frac{km_2 + 6k^3 + 4k_1}{4}x_2. \tag{41}$$

Как видим, все выписанные выше потенциалы сингулярны на оси $0x_2$, поэтому, как и в случае лоренцевой метрики, отдельно следует изучить поведение волновых функции при $x_1 \to 0$. Сингулярные части для суперпартнеров $V^{(1)}, V^{(2)}$ в системах (37)–(40), совпадают и имеют вид: $V_{\text{sing}}^{(1,2)} = \hbar^2 d/x_1^2$, где константа d принимает разные значения в (37)–(40). Можно проверить, что только для потенциалов (37), (39), (40) дифференциальные операторы 4-го порядка $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ (см. (3)) сохраняют асимптотику и являются операторами симметрии. Для потенциалов (38) операторы $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ меняют асимтотику $\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}$ и являются поэтому только формальными операторами симметрии. Аналогичная ситуация возникает и для потенциалов (41).

3. Построение классических интегрируемых систем с помощью предела $\hbar \to 0$

Квантовые динамические симметрии, найденные в предыдущем параграфе методом сплетания, имеют естественные аналоги – интегралы движения – в соответствующих классических системах. Эти интегралы движения являются полиномами четвертой степени по импульсам. Как и в Разд. 2, отдельно рассмотрим классический предел для Лоренцевой и вырожденной метрики.

I. Для Лоренцевой метрики при переходе к классическому пределу $\hbar \to 0$ определим импульсы $p_\pm = -i\hbar\partial_\pm$ и классические функции суперзарядов:

$$q_{cl}^{\pm} = -4p_+p_- \pm i(C_-(x_-)p_+ + C_+(x_+)p_-) + B(x_-, x_+).$$

Из уравнений (8) и (3) в пределе $\hbar \to 0$ находим, что классический гамильтониан

$$h_{cl} = 2(p_+^2 + p_-^2) + V_{cl},$$

с потенциалом

$$V_{cl} = \frac{1}{8}(C_+^2 + C_-^2) + \frac{1}{4}[F_2(x_+ - x_-) - F_1(x_+ + x_-)], \tag{42}$$

имеет дополнительный интеграл движения

$$I = 16p_+^2p_-^2 + C_+^2p_-^2 + C_-^2p_+^2 - 2(F_1 + F_2)p_+p_- + B^2. \qquad (43)$$

Системы такого типа были рассмотрены в ряде работ (см. книгу [19] и список литературы в ней), в которых функциональное уравнение, обеспечивающее существование интегралов движения для соответствующих классических систем, в основном, решается методом представления Лакса. Из (42), (43), с учетом обозначений, принятых в [19], находим, что

$$v_1 \equiv \frac{C_+^2(x_1)}{8}, \quad v_2 \equiv \frac{C_-^2(x_2)}{8}, \quad v_3(x_1 - x_2) \equiv \frac{F_2(x_-)}{16},$$

$$v_4(x_1 + x_2) \equiv -\frac{F_1(x_+)}{16}, \qquad (44)$$

а функции v_k должны удовлетворять [19] определенному функциональному уравнению (см. ниже (47)). В следующем разделе мы покажем, что выражения (44), где $C_\pm, F_{1,2}$ являются решениями системы (6), (7), удовлетворяют и уравнению (47), а также найдем некоторые другие решения этого уравнения.

II. Исследуем, какие интегрируемые классические системы получаются в пределе $\hbar \to 0$ из суперсимметричной квантовой механики с вырожденной метрикой. Определяя импульсы $p_k = -i\hbar\partial_k$ и классические суперзаряды $q_{cl}^+ = (q_{cl}^-)^* = -p_1^2 + iC_k(\vec{x})p_k + B(\vec{x})$, находим, что гамильтониан

$$H_{cl} = p_k^2 + \frac{1}{2}x_2^2\partial_1^2F_1^2 - x_2(F_1G_1)' + K_1(x_1) + K_2(x_2) \qquad (45)$$

обладает интегралом движения четвертой степени по импульсам

$$I \equiv q_{cl}^+q_{cl}^- = p_1^4 + (C_1^2 - 2B)p_1^2 + C_2^2p_2^2 + 2C_1C_2p_1p_2 + B^2. \qquad (46)$$

Все функции, входящие в (45), (46), определены в предыдущем параграфе, при этом в них следует положить $\hbar = 0$.

Таким образом, в случае вырожденной метрики получаем следующие классические интегрируемые системы (для некотрых систем введены новые обозначения констант):

$$1)\ V = \frac{1}{2}(x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 + 8x_2^4) + m(x_1^2 + 4x_2^2) + lx_1^{-2},$$

$$I = p_1^4 + (6x_1^2x_2^2 + mx_1^2 + x_1^4 + 2lx_1^{-2})p_1^2 + x_1^4p_2^2 -$$

$$4x_1^3x_2p_1p_2 + (x_1^2x_2^2 + mx_1^2 + \frac{x_1^4}{2} + lx_1^{-2});$$

$$2)\ V = \frac{1}{2}(x_1^4 + 6x_1^2x_2^2 + 8x_2^4) + m(x_1^2 + 4x_2^2) +$$

$$\frac{k_1^2}{4}x_1^{-2} - (k_1 - 2mk - \frac{3}{2}k^3)x_2,$$

$$I = p_1^4 + (6x_1^2x_2^2 + 2(m + k^2)x_1^2 - 4k_1x_2 - 4k_1x_2 - 4kx_1^2x_2 +$$

$$\frac{k_1^2}{2}x_1^{-2} - kk_1)p_1^2 + x_1^4p_2^2 + 2x_1(k_1 - 2x_1^2x_2)p_1p_2 +$$

$$(x_1^2x_2^2 + (m + \frac{k^2}{2})x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^4 + k_1x_2 - \frac{k_1^2}{4}x_1^{-2} - \frac{kk_1}{2})^2;$$

$$3)\ V = \frac{1}{9}x_1^{-2/3}(\frac{9}{2}x_1^2 + x_2^2) + m(9x_1^2 + 4x_2^2) + kx_1^{2/3},$$

$$I = p_1^4 + (\frac{2}{9}x_2^2x_1^{-2/3} + 2kx_1^{2/3} + 18mx_1^2 + x_1^{4/3})p_1^2 + x_1^{4/3}p_2^2 -$$

$$\frac{4}{3}x_2x_1^{1/3}p_1p_2 + (\frac{1}{9}x_2^2x_1^{-2/3} - kx_1^{2/3} - 9mx_1^2 - \frac{1}{2}x_1^{4/3})^2;$$

$$4)\ V = -\frac{k_1k_2}{3}x_2x_1^{-2/3} + \frac{1}{4}(k_2^2 + \frac{3k_1m_1}{k_2})x_1^{2/3} - m_1x_2,$$

$$I = p_1^4 + [\frac{1}{2}(k_2^2 + \frac{3k_1m_1}{k_2})x_1^{2/3} - \frac{2k_1k_2}{3}x_2x_1^{-2/3} + k_1^2]p_1^2 + k_1^2p_2^2 +$$

$$2k_1k_2x_1^{1/3}p_1p_2 + [\frac{k_1k_2}{3}x_2x_1^{-2/3} + \frac{1}{4}(k_2^2 - \frac{3k_1m_1}{k_2})x_1^{2/3} - \frac{k_1^2}{2}]^2.$$

$$5)\ V = \frac{1}{9}x_1^{-2/3}(\frac{9}{2}x_1^2 + x_2^2) - \frac{5k}{3}x_2x_1^{2/3} + \frac{3m}{8k}x_1^{2/3} +$$

$$\frac{k^2}{4}x_1^2 - mx_2 + \frac{k}{9}(1 + 15k)x_2^2,$$

$$I = p_1^4 + (\frac{2}{9}x_2^2x_1^{-2/3} - \frac{10k_1}{3}x_2x_1^{2/3} + \frac{k_1^2}{2}x_1^2 + \frac{3m_1}{4k_1}x_1^{2/3} + x_1^{4/3})p_1^2$$

$$+x_1^{4/3}p_2^2 + 2x_1^{2/3}(-\frac{2}{3}x_2x_1^{-1/3} + k_1x_1)p_1p_2 +$$

$$(\frac{1}{9}x_2^2x_1^{-2/3}+k_1x_2x_1^{2/3}-\frac{3m_1}{8k_1}x_1^{2/3}-\frac{1}{2}x_1^{4/3}+\frac{k_1^2}{4}x_1^2)^2.$$

Данные потенциалы были найдены ранее другими методами в работах [21–23].

В заключение этого раздела сформулируем в терминах классической механики полученный рецепт построения интегралов движения для классических систем. Для всякого классического гамильтониана H_{cl} и комплексной функции $q_{cl}^+(\vec{x},\vec{p})=(q_{cl}^-)^*$, полиномиальной по импульсам, которые удовлетворяют соотношениям:

$$\{q_{cl}^+,H_{cl}\}=if(\vec{x},\vec{p})q_{cl}^+,\quad \{(q_{cl}^+)^*,H_{cl}\}=-if(\vec{x},\vec{p})(q_{cl}^+)^*;$$

(где $\{,\}$-скобки Пуассона, а $f(\vec{x},\vec{p})$ – произвольная вещественная функция), существует классический факторизуемый интеграл движения $I=q_{cl}^+q_{cl}^-$.

4. Потенциалы, связанные с представлением Лакса

Рассмотрим двумерные классические системы с потенциалами вида (см.[19]):

$$V(x_1,x_2)=v_1(x_1)+v_2(x_2)+v_3(x_1-x_2)+v_4(x_1+x_2).$$

Известно, что эти системы обладают дополнительным интегралом движения четвертого порядка по импульсам:

$$I=\frac{1}{2}p_1^2p_2^2+g_0p_1^2+g_1p_1p_2+g_2p_2^2+f,$$

если

$$g_0=v_2(x_2),\quad g_1=-v_3(x_1-x_2)+v_4(x_1+x_2),\quad g_2=v_1(x_1),$$

а функции v_1,v_2,v_3,v_4 удовлетворяют функциональному уравнению:

$$[v_4(x_1+x_2)-v_3(x_1-x_2)][v_2''(x_2)-v_1''(x_1)]+2[v_4''(x_1+x_2)-v_3''(x_1-x_2)]\cdot$$
$$[v_2(x_2)-v_1(x_1)]+3v_4'(x_1+x_2)[v_2'(x_2)-v_1'(x_1)]+$$
$$3v_3'(x_1-x_2)[v_2'(x_2)+v_1'(x_1)]=0. \tag{47}$$

В книге [19] приведен список известных частных решений уравнения (47).

Для дальнейшего исследования решений уравнения (47) полезно переписать его в эквивалентной форме:

$$\partial_2(vv_2' + 2v_2\partial_2 v) = \partial_1(vv_1' + 2v_1\partial_1 v), \tag{48}$$

где

$$v \equiv v_4(x_1 + x_2) - v_3(x_1 - x_2). \tag{49}$$

Общее решения уравнения (48) без учета условия (49) может быть записано в виде:

$$v = \left[G\left(\int \frac{dx_1}{\sqrt{v}_1} + \int \frac{dx_2}{\sqrt{v}_2}\right) + L\left(\int \frac{dx_1}{\sqrt{v}_1}) - \int \frac{dx_2}{\sqrt{v}_2}\right)\right]/\sqrt{v_1 v_2} \tag{50}$$

где G и L – произвольные функции своих аргументов. Таким образом, задача сводится к поиску функций v вида (50), удовлетворяющих условию

$$(\partial_1^2 - \partial_2^2)v = 0. \tag{51}$$

Легко, в частности, проверить, что все решения, полученные из суперсимметрии в классическом пределе $\hbar \to 0$ в Разд. 3 (см. соотношения (44)), являются решениями уравнения (44) и имеют вид (47) при $G \equiv 0$.

Опыт, преобретенный при исследовании системы уравнений (6), (7) в рамках суперсимметричной квантовой механики, позволяет найти ряд новых решений уравнения (48).

1) Предположим, что функция v факторизуема: $v = u_1(x_1) \cdot u_2(x_2)$, тогда уравнение (48) допускает разделение переменных, и его решения имеют вид:

$$v_k = \frac{n_k[a_k \exp(\sqrt{\lambda}x_k) + b_k \exp(-\sqrt{\lambda}x_k)] + l_k}{(a_k \exp(\sqrt{\lambda}x_k) - b_k \exp(-\sqrt{\lambda}x_k))^2}, \quad k = 1, 2.$$

$$v_3 = a_1 b_2 \exp(\sqrt{\lambda} \cdot (x_1 - x_2)) + a_2 b_1 \exp(-\sqrt{\lambda} \cdot (x_1 - x_2)).$$

$$v_4 = a_1 a_2 \exp(\sqrt{\lambda} \cdot (x_1 + x_2)) + b_1 b_2 \exp(-\sqrt{\lambda} \cdot (x_1 + x_2)),$$

где при $\lambda > 0$ все константы вещественны, а при $\lambda < 0$ константы n_k, l_k – вещественны, а $a_k = b_k^*$.

2) Перепишем (50) в терминах новых функций

$$v_1 \equiv (W_1')^{-2}, v_2 \equiv (W_2')^{-2}.$$

Тогда уравнение (51) означает, что

$$\left[\frac{W_1'''}{W_1'} - \frac{W_2'''}{W_2'}\right] + 3\left[(W_1'' - W_2'')G' + (W_1'' + W_2'')L'\right] +$$
$$({W_1'}^2 - {W_2'}^2)(G'' + L'') = 0, \tag{52}$$

где производные от функций G и L берутся по их аргументам. Построим некоторые частные решения уравнения (52).

2a)

$$W_{1,2} = \sigma_{1,2}\exp(\lambda x_{1,2}) + \delta_{1,2}\exp(-\lambda x_{1,2}), \tag{53}$$

где λ^2 – вещественная константа, а σ_k, δ_k могут быть комплексными. Подстановка выражений (53) в уравнение (52), при выполнении условия

$$\sigma_1\delta_1 = \sigma_2\delta_2, \tag{54}$$

приводит к уравнению с разделяющимися переменными, решением которого являются функции:

$$G(W_1 + W_2) = \frac{\alpha_1}{(W_1 + W_2)^2} + \alpha(W_1 + W_2)^2 + \beta_1; \tag{55}$$

$$L(W_1 - W_2) = \frac{\alpha_2}{(W_1 - W_2)^2} + \alpha(W_1 - W_2)^2 + \beta_2, \tag{56}$$

с произвольными константами $\alpha, \alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$.

Рассмотрим случай $\lambda^2 > 0$. Из вещественности функций $v_n(x_n) (n = 1, 2)$ следует, что константы σ_1, δ_1 либо обе вещественны, либо обе мнимые. Аналогично и для пары (σ_2, δ_2). Из условия (54) следует, что при вещественных (σ_i, δ_i), функции $W_{1,2}$ принимают вид:

$$W_1(x) = W_2(x) = k\cosh(\lambda x), \tag{57}$$

или

$$W_1(x) = W_2(x) = k\sinh(\lambda x), \quad k \in R, \tag{58}$$

а функция v вещественна при вещественных константах α, α_i, β_i $(i = 1, 2)$.

В случае, когда пара (σ_1, δ_1) – вещественные константы, а (σ_2, δ_2) – мнимые, находим, что:

$$W_1 = k\sinh(\lambda x_1), \quad W_2 = ik\cosh(\lambda x_2), \tag{59}$$

$$W_1 = k\cosh(\lambda x_1), \quad W_2 = ik\sinh(\lambda x_2), \quad k \in R. \tag{60}$$

Заметим, что в этом случае аргументы функций G и L комплексно сопряжены, и из вещественности функции v получаем:

$$L^*(W_1 + W_2) = -G(W_1 + W_2).$$

Отсюда находим, что в формулах (55), (56) константы должны удовлетворять условиям:

$$\alpha_2 = -\alpha_1^*; \quad \beta_2 = -\beta_1^*; \quad \alpha = \alpha^*.$$

2b)

$$W_1 = W_2 = gx^2; \quad g^2 \in R. \tag{61}$$

При этом из уравнения (52) следует, что:

$$G = a_0 + a_1(W_1 + W_2) + a(W_1 + W_2)^2;$$

$$L = b_0 - \frac{a}{4}(W_1 - W_2)^2 + \frac{b}{(W_1 + W_2)^2},$$

где все константы вещественные.

Приведем полученные вынажения для функций $v_n (n = 1, ..4)$, соответствующие перечисленным выше решениям (57)–(61), соответственно:

$$\begin{aligned} v_1(x) = &v_2(x) = \frac{k}{\sinh^2(\lambda x)}, \\ v_3(x) = &v_4(x) = \frac{k_1}{\sinh^2(\lambda x)} + \frac{k_2}{\sinh^2(\frac{\lambda x}{2})} + k_3 \cosh(2\lambda x) + k_4 \cosh(\lambda x); \end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned} v_1(x) &= v_2(x) = \frac{k}{\cosh^2(\lambda x)}, \\ v_3(x) &= \frac{k_1}{\sinh^2(\lambda x)} + \frac{k_2}{\sinh^2(\frac{\lambda x}{2})} + k_3 \cosh(2\lambda x) + k_4 \cosh(\lambda x); \\ v_4(x) &= \frac{k_1 + 4k_2}{\sinh^2(\lambda x)} - \frac{k_2}{\sinh^2(\frac{\lambda x}{2})} + k_3 \cosh(2\lambda x) - k_4 \cosh(\lambda x); \end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \frac{k}{\cosh^2(\lambda x)}, \quad v_2(x) = -\frac{k}{\sinh^2(\lambda x)}; \\ v_3(x) &= v_4(x) = \frac{k_1 + k_2 \sinh(\lambda x)}{\cosh^2(\lambda x)} + k_3 \cosh(2\lambda x) - k_4 \sinh(\lambda x); \end{aligned} \tag{64}$$

$$v_1(x) = \frac{k}{\sinh^2(\lambda x)}, \quad v_2(x) = -\frac{k}{\cosh^2(\lambda x)};$$
$$v_3(x) = \frac{k_1 + k_2 \sinh(\lambda x)}{\cosh^2(\lambda x)} + k_3 \cosh(2\lambda x) + k_4 \sinh(\lambda x); \tag{65}$$
$$v_4(x) = \frac{k_1 - k_2 \sinh(\lambda x)}{\cosh^2(\lambda x)} + k_3 \cosh(2\lambda x) - k_4 \sinh(\lambda x);$$

$$\begin{aligned} v_1(x) &= v_2(x) = kx^{-2}; \\ v_3(x) &= v_4(x) = k_1 x^{-2} + k_2 x^2 + k_3 x^4 + k_4 x^6, \end{aligned} \tag{66}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{g_1}{(\delta_1 \exp(\lambda x) - \sigma_1 \exp(-\lambda x))^2}, \\ v_2 &= \frac{g_2}{(\delta_2 \exp(\lambda x) - \sigma_2 \exp(-\lambda x))^2}; \end{aligned} \tag{67}$$

$$v_3(x) = k_1(\delta_1\sigma_2 \exp(\lambda x) + \sigma_1\delta_2 \exp(-\lambda x)) + k_2(\delta_1^2\sigma_2^2 \exp(2\lambda x) + \sigma_1^2\delta_2^2 \exp(-2\lambda x));$$
$$v_4(x) = k_1(\delta_1\delta_2 \exp(\lambda x) + \sigma_1\sigma_2 \exp(-\lambda x)) + k_2(\sigma_1^2\sigma_2^2 \exp(2\lambda x) + \delta_1^2\delta_2^2 \exp(-2\lambda x)).$$

В заключение отметим, что решения (63)–(65) отсутствуют в списке известных решений в книге [19], а решения (62) и (66) приведены лишь при положительных значениях параметров. Выражения (67) являются решениями (47) при произвольных значениях параметров (в [19] они приведены для $\sigma_1\delta_1 > 0$, $\sigma_2\delta_2 > 0$).

Литература

1. M. Olshanetsky, A. Perelomov, — Invent. Math., **37** (1976), 93.
2. M. Adler, — Comm. Math. Phys. **55** (1977), 195.
3. А. М. Переломов, — ЭЧАЯ **10** (1979), 850.
4. M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov, — Phys. Rep. **94** (1983), 313.
5. У. Миллер, *Симметрия и разделение переменных.* М., Мир, 1981.
6. В. Б. Кузнецов, А. В. Цыганов, — Зап. научн. семин. ЛОМИ **172** (1989), 88.
7. A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, D. N. Nishnianidze, — Phys. Lett. **A201** (1995), 103.
8. E. Witten, — Nucl. Phys. **B188** (1981), 513.
9. E. Witten, — Nucl.Phys. **B202** (1982), 253.
10. А. А. Андрианов, Н. В. Борисов, М. В. Иоффе, М. И. Эйдес, — ТМФ **61** (1984), 17.
11. A. Lahiri, P. K. Roy, B. Bagghi, — Int. J. Mod. Phys. **A5** (1990), 1383.
12. А. А. Андрианов, М. В. Иоффе, Д. Н. Нишнианидзе, — Зап. научн. семин. ПОМИ **224** (1995), 68.
13. A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, N. Cannata, and D. N. Nishnianidze, — J. Phys. **A30** (1997), 5037.

14. А. А. Андрианов, М. В. Иоффе, Д. Н. Нишнианидзе, — ТМФ **104** (1995), 463.
15. A. A. Andrianov, M. V. Ioffe, F. Cannata, J.-P. Dedonder, — Int. J. Mod. Phys. **A10** (1995), 2683.
16. V. I. Inozemzev, — Jour. Phys. **A17** (1984), 815.
17. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* Москва, 1961.
18. V. I. Inozemzev, — Phys. Scrip. **29** (1984), 518.
19. А. М. Переломов, *Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли.* М., Наука, 1990.
20. D. Levi, S. Wojciechowski, — Phys. Lett. **A103** (1984), 11.
21. J. Hietarinta, — Phys. Rev. **A28** (1983), 3670.
22. M. Wojciechowski, S. Wojciechowski, — Phys. Lett. **A105** (1984), 11.
23. B. Grammaticos, B. Dorizzi, A. Ramani, — Jour. Math. Phys. **24** (1983), 2289.

Andrianov A. A., Ioffe M. V., Nishnianidze D. N. New integrable systems generated by a deformed supersymmetric algebra.

New solutions of the intertwining relations for scalar quantum hamiltonians by the second order supercharges with the Lorentz and degenerate metrics are obtained. The symmetry operators for the components of the superhamiltonian are found which result in the integrability of the corresponding quantum systems. The expressions for the hamiltonians and symmetry operators in the classical limit are given. A new class of integrable classical two-dimensional systems possesing the integrals of motion which are of the fourth order in momenta.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 25 августа 1998 г.