Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 251, 1998 г.

А. И. Виноградов

БИНАРНЫЕ ЗАДАЧИ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОДХОД. III

§9. Спектральная функция $\widehat{\varphi}(r)$

Прежде чем начинать оценивать вклад от непрерывной и дискретной компонент правой части равенства (1.19), [5], надо исследовать поведение спектральной весовой функции $\widehat{\varphi}(r)$, которая входит в обе эти компоненты и явный вид которой приведен в равенстве (1.22), [5]. Она значительно сложнее спектральной функции $\widetilde{\varphi}(k-1)$ из §8, поэтому мы посвятим ей весь этот параграф.

Для наглядности повторим здесь равенство (2.22), [5]

$$\widehat{\varphi}(r) = \frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi r} \int_0^\infty \frac{J_{2ir}(x) - J_{-2ir}(x)}{2i} \cdot \varphi(x) \cdot \frac{dx}{x}. \tag{9.0}$$

Для преобразования этой функции к удобному виду мы снова воспользуемся интегральным представлением (8.7), II для бесселевой функции. Но прямо подставить (8.7), II в (9.0) нельзя, т.к. интеграл (8.7), II сходится абсолютно только для случая когда $\operatorname{Re} z > 0$, а в нашем случае $z = ir$, т.е. $\operatorname{Re} z = 0$. Но равенство (8.7), II можно аналитически продолжить по z на прямую $\operatorname{Re} z = 0$. Для того чтобы сделать это, будем сначала считать, что z лежит в полосе

$$0 < \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad \text{где} \quad \varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right] \tag{9.1}$$

и сдвинем контур (8.7) влево на прямую $\operatorname{Re} s = -\frac{1}{2}$. При этом мы пройдем полюс функции $\Gamma(s+z)$ в точке $s = -z$ и по теореме Коши о вычетах равенство (8.7), II преобразуется к новому виду:

$$J_{2z}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = -\frac{1+\varepsilon}{2}} (\,\cdot\,) ds + \Gamma^{-1}(s+2z) \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2z}, \tag{9.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант No. 96-01-00679, С.-Петербург, Россия.

где ядро $(\,\cdot\,)$ в (9.2) то же самое, что и в (8.7), II. Представление (9.2) уже можно продолжить по индексу z из полосы (9.1) в более широкую полосу:

$$-\frac{1}{2}+\varepsilon \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2}-\varepsilon, \quad \varepsilon \in \Big(0, \frac{1}{4}\,\Big]. \tag{9.3}$$

В полосе (9.3) лежит и нужная нам прямая $z = ir$, где $r \in \mathbb{R}$.

Следовательно, для параметра z из полосы (9.3) остается верным представление (9.2), если в нем поменять z на $-z$. Поэтому для разности функций Бесселя в полосе (9.3) получаем представление:

$$J_{2z}(x) - J_{-2z}(x) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = -\frac{1+\varepsilon}{2}} \Big[\frac{\Gamma(s+z)}{\Gamma(1-s+z)} - \frac{\Gamma(s-z)}{\Gamma(1-s-z)}\Big] \Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2s} ds +$$

$$+\Gamma^{-1}(1+2z)\cdot\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2z} - \Gamma^{-1}(1-2z)\cdot\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2z}. \tag{9.4}$$

Приводя разность отношений в ядре интеграла (9.4) к общему знаменателю и пользуясь функциональным уравнением для Γ-функции

$$\Gamma(w)\cdot\Gamma(1-w) = \frac{\pi}{\sin \pi w}$$

и формулой разности для синусов:

$$\sin A - \sin B = 2\cdot \sin\frac{A-B}{2}\cdot\cos\frac{A+B}{2}$$

получаем равенство

$$\frac{\Gamma(s+z)}{\Gamma(1-s+z)} - \frac{\Gamma(s-z)}{\Gamma(1-s-z)} = -\frac{2}{\pi}\cdot\sin \pi z\cdot\cos\pi s\cdot\Gamma(s+z)\cdot\Gamma(s-z). \tag{9.5}$$

Подставляя (9.5) в (9.4) и полагая $z = ir$, получаем представление:

$$\frac{J_{2ir}(x) - J_{-2ir}(x)}{2i} =$$

$$= -\frac{\operatorname{sh}\pi r}{\pi}\cdot\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = -\frac{1+\varepsilon}{2}} \cos\pi s\cdot\Gamma(s+ir)\cdot\Gamma(s-ir)\cdot\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2s} ds +$$

$$+\frac{\Gamma^{-1}(1+2ir)}{2i}\cdot\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2ir} - \frac{\Gamma^{-1}(1-2ir)}{2i}\cdot\Big(\frac{x}{2}\Big)^{-2ir}. \tag{9.6}$$

Подставляя (9.6) в (9.0) и производя необходимые вычисления с переменой порядков интегрирования (что законно) мы получим в ядре интеграла (9.6) уже знакомую нам функцию $J_s(\varphi)$ из равенства (8.10), II, и явный вид $\widehat{\varphi}(r)$:

$$\widehat{\varphi}(r) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}s=-\frac{1+\varepsilon}{2}} \cos\pi s\cdot\Gamma(s+ir)\cdot\Gamma(s-ir)\cdot J_s(\varphi)ds+$$

$$+\frac{\pi}{2i}\cdot\frac{\Gamma^{-1}(1+2ir}{\operatorname{sh}\pi r}\cdot J_{-ir}(\varphi) - \frac{\pi}{2i}\cdot\frac{\Gamma^{-1}(1-2ir}{\operatorname{sh}\pi r}\cdot J_{ir}(\varphi). \qquad (9.7)$$

Функция $J_s(\varphi)$ экспоненциально сходится на любой прямой $\operatorname{Im}s=$ const поэтому теперь нет проблемы для интеграла в (9.7) вернуть его контур в правую полуплоскость на прямую $\operatorname{Re}s=+\frac{1}{2}$. При этом мы пройдем два полюса в точках $s=\pm ir$ вычеты в которых погасят внеинтегральные члены правой части (9.7). В результате мы получим окончательное представление для функции $\widehat{\varphi}(r)$:

$$\widehat{\varphi}(r) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}} \cos\pi s\cdot\Gamma(s+ir)\cdot\Gamma(s-ir)\cdot J_s(\varphi)ds. \qquad (9.8)$$

Это представление регулярно по параметру $s_3=\frac{1+s_1+s_2}{2}$ в полуплоскости $\operatorname{Re}s_3>\frac{1}{2}$.

Но из представления (9.8) все еще трудно получить необходимую нам оценку функции $\widehat{\varphi}$ по спектральному параметру r:

$$\widehat{\varphi}(r) \ll |\, r\,|^{-2-\varepsilon}, \quad |\, r\,| \to \infty \qquad (9.9)$$

с некоторым фиксированным $\varepsilon>0$.

Для этого надо учесть интерференцию ядра (9.8), т.е. провести тяжелый счет по методу стационарной фазы. Чтобы обойти этот счет и в то же время получить оценку (9.9), надо заметить, что функция $\widehat{\varphi}(r)$ на самом деле зависит и от переменной $s_3=\frac{1+s_1+s_2}{2}$, которая входит в аргумент функции $J_s(\varphi)$ из (8.10), II, т.е. $\widehat{\varphi}(r)\equiv\widehat{\varphi}(r,s_3)$, а следовательно она зависит и от переменных интегрирования s_1 и s_2 в (7.9). Поэтому мы можем подправить ее определение, т.к. функция $\widehat{\varphi}(r)$ входит в ядро интеграла (7.8) как функция параметров интегрирования s_1 и s_2. Именно для этого и была выделена часть произведения в знаменателе правой части (6.5), II, чтобы передать его функции $\widehat{\varphi}(r)$, т.е. вместо $\widehat{\varphi}(r)$ рассматривать отношение

$$\frac{\widehat{\varphi}(r)}{\prod\limits_{i=1}^{c_2}(s_2+c_2+i)}. \tag{9.10}$$

Но этой поправки мало, надо еще подправить функцию $\widehat{\varphi}(r)$ и за счет переменной интегрирования s_1. Но здесь дело осложняется тем, что в знаменателе ядра (7.9) параметр s_1 входит в третьей степени s_1^3 и отдать все три степени этого параметра на улучшение оценки функции $\widehat{\varphi}(r)$ нельзя, т.к. ничего не останется для обеспечения абсолютной сходимости самого интеграла по s_1-контуру. Положение спасает присутствие в ядре (7.9) величины Y^{s_1}. Только сейчас становится понятным почему мы держали этот параметр, не сделав его сразу величиной N^2. Дело в том, что равенство (1.2), I, справедливо при любом $Y \geqslant N^2$:

$$G(N) = \sum_{m=N^2-X^2>0} \sum_{D\leqslant Y} \delta_D\,(m)\cdot\mu(D)\cdot\log^2\Bigl(\frac{Y}{D}\Bigr). \tag{9.11}$$

Поэтому мы можем многократно усреднять это равенство по параметру $Y \geqslant N^2$. Мы воспользуемся интегральным усреднением по Y и будем считать равенство (9.11) нулевым шагом итерации и соответственно положим $Y = Y_0 \geqslant N^2$.

На первом шаге итерации разделим левую и правую части равенства (9.11) на Y_0 и проинтегрируем полученное равенство по Y_0 в интервале $(Y_1 \leqslant Y_0 \leqslant eY_1)$, где $Y_1 \geqslant N^2$. e – Неперова константа – основание натуральных логарифмов.

Левая часть равенства (9.11) от Y_0 не зависит, поэтому там появляется коэффициент

$$\int\limits_{Y_1}^{e\cdot Y_1} \frac{dY_0}{Y_0} = 1, \tag{9.12}$$

т.е. левая часть не изменится.

В правой части (9.11) главный член проблемы тоже от Y_0 не зависит и поэтому при усреднении не изменится. Аналог малых дуг мы свели к интегралу (7.9) в ядре которого стоит величина

$Y_0^{s_1}$. Поэтому после усреднения она преобразуется к виду:

$$\int\limits_{Y_1}^{e\cdot Y_1} \frac{Y_0^{s_1}}{Y_0}\,dY_0 = \frac{(e^{s_1}-1)}{s_1}\cdot Y_1^{s_1}. \tag{9.13}$$

Проделав c_1 таких итерационных шагов, где $c_1 \geqslant 3$ – целое фиксированное число, мы получим в ядре (7.9) на месте $Y_0^{s_1}$ величину

$$\frac{(e^{s_1}-1)}{s_1^{c_1}}\cdot Y_{c_1}^{s_1}, \tag{9.14}$$

где $Y_{c_1} \geqslant N^2$ по прежнему произвольный параметр и мы снова можем вернуть ему обозначение Y.

В результате итерационных усреднений мы получим в знаменателе (9.14) множитель $s_1^{c_1}$ который мы так же отдадим на улучшение спектральной функции в знаменателе отношения (9.10). В результате получается улучшенная спектральная функция

$$\hat{\hat{\varphi}}(r) = \frac{\widehat{\varphi}(r)}{s_1^{c_1}\cdot\prod\limits_{i=1}^{c_2}(s_2+c_2+i)}. \tag{9.15}$$

Прежде чем запускать в работу эту улучшенную спектральную функцию, обратим внимание на одну тонкость, которая появилась после применения итерационного интегрирования по параметру Y.

В §5, II мы разбили на “ящики” интервал “малых дуг” ($N_1 < c \leqslant N^2$] при конкретном значении $Y = N^2$. Для того чтобы согласовать §5, II с итерационным интегрированием по параметру $Y = Y_0$ отметим, что сделав c_1 шагов итерационного интегрирования мы получим неравенства:

$$Y = Y_0 \leqslant Y_1\cdot e \leqslant Y_2\cdot e^2 \leqslant \ldots \leqslant Y_{c_1}\cdot e^{c_1}.$$

Определяя последний параметр Y_{c_1} с помощью равенства $Y_{c_1} = N^2$, получаем оценку для исходного параметра Y_0:

$$Y_0 \leqslant N^2\cdot e^{c_1} = \mathcal{M}_{k_2}.$$

Поэтому итерационное интегрирование будет согласовано с “ящечным” делением из §5, II если мы увеличим длину отрезка “малых дуг” до размера ($N_1 < c \leqslant \mathcal{M}_{k_2}$]. Количество “ящиков” при этом так же возрастет и станет равным k_2 вместо k_1.

Этот новый параметр мы определим так же как и k_1 с помощью равенства:

$$2^{k_2} \cdot N_1 = \mathcal{M}_{k_2},$$

сдвинув немного N_1, если потребуется, для того чтобы параметр k_2 был целым числом. Построение гладких функций $f_k(c)$ для каждого "ящика" остается тем же самым, что и в §5, II. Вторая поправочная сумма в (5.11), II будет теперь относиться к "ящику" с номером k_2, но ее свойство быть тождественным нулем на правом спуске: $(\mathcal{M}_k \leqslant c \leqslant \frac{5}{4}\mathcal{M}_k)$ функции $f_{k_2}(c)$ остается неизменным как и в случае функции f_{k_1}, поэтому ее так же можно отбросить. Это сразу же следует из разрывных свойств интеграла (0.8) I который равен нулю для всех $c \in (\mathcal{M}_k, \frac{5}{4}\mathcal{M}_k)$, т.к. при всех итерациях интегрирования по Y мы имеем нулевое ядро для таких c.

Для того чтобы устранить всякие недоразумения отметим, что с точки зрения арифметических свойств исходной суммы (9.11) фактического увеличения ее длины $= N^2$ не происходит при итерационном интегрировании, т.к. мы при этом добавляем к сумме пустоту. Но это интегрирование не тривиально с точки зрения интегрального представления (1.11), I этой суммы, т.к. там появляется новый комплексный параметр s_1.

После этого отступления снова вернемся к интегральному предствлению (9.8) и разобьем его на две части:

$$\widehat{\varphi}(r) = \widehat{\varphi}_1(r) + \widehat{\varphi}_2(r), \tag{9.16}$$

где

$$\widehat{\varphi}_1(r) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{s=\frac{1}{2}+it \\ |t|\leqslant\frac{1}{2}|r|}} \cos\pi s \cdot \Gamma(s+ir) \cdot \Gamma(s-ir) \cdot J_s(\varphi)\, ds \tag{9.17}$$

$$\widehat{\varphi}_2(r) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{s=\frac{1}{2}+it \\ |t|\geqslant\frac{1}{2}|r|}} (\,\cdot\,)\, ds. \tag{9.18}$$

Ядро $(\,\cdot\,)$ в (9.18) то же самое, что и в (9.17). Соответственно равенству (9.16) правая часть (9.15) так же распадается на две части

$$\hat{\hat{\varphi}}(r) = \hat{\hat{\varphi}}_1(r) + \hat{\hat{\varphi}}_2(r), \tag{9.19}$$

где
$$\hat{\hat{\varphi}}_i(r) = \widehat{\varphi}_i(r)/(\,\cdot\,), \quad i = 1, 2;$$
знаменатель $(\,\cdot\,)$ тот же самый, что и в (9.15). На контуре (9.17) справедлива оценка:
$$\cos\pi s \cdot \Gamma(s + ir) \cdot \Gamma(s - ir) \ll \exp\Big(-\frac{\pi}{2} \mid r \mid\Big).$$
Подставляя эту оценку в (9.17) получаем:
$$\widehat{\varphi}_1(r) \ll e^{-\frac{\pi}{2}|r|} \cdot \int\limits_{|t|\leqslant\frac{1}{2}|r|} \big| J_s(\varphi) \big|\, dt \leqslant e^{-\frac{\pi}{2}|r|} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big| J_s(\varphi) \big|\, dt.$$
Подставляя (8.10) II и (8.13) II в правую часть этого неравенства получаем оценку в области $\operatorname{Re} s_3 \geqslant \frac{1}{2}$:
$$\widehat{\varphi}_1(r) \ll X^{\sigma_3 - \frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}|r|}. \tag{9.20}$$
Подставляя (9.20) в (9.19) когда $i = 1$, получаем оценку в области $\operatorname{Re} s_1 \geqslant \frac{1}{2}$, когда $\operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}$:
$$\hat{\hat{\varphi}}_1(r) \ll X^{\sigma_3 - \frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}|r|}. \tag{9.21}$$
На контуре (9.18) справедлива оценка:
$$\cos\pi s \cdot \Gamma(s + ir) \cdot \Gamma(s - ir) \ll 1.$$
Подставляя ее в (9.18) получаем:
$$\widehat{\varphi}_2(r) \ll \int\limits_{|t|\geqslant\frac{1}{2}|r|} \big| J_{\frac{1}{2}+it}(\varphi) \big|\, dt. \tag{9.22}$$
Пусть $s_i = \sigma_i + it_i$, $i = 1, 2, 3$, тогда из равенства $s_3 = \frac{1+s_1+s_2}{2}$ следует, что $\sigma_3 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + \sigma_1)$, т.к. $\sigma_2 = -\frac{1}{2}$ и $t_3 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$.

Если $|\operatorname{Im} s_3| = |t_3| \leqslant \frac{1}{5}|r|$, тогда, подставляя равенство (8.10), II и оценку (8.13), II в (9.22), получаем:
$$\widehat{\varphi}_2(r) \ll X^{\sigma_3 - \frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}|r|}.$$
Подставляя это неравенство во второе слагаемое (9.19), получаем оценку:
$$\hat{\hat{\varphi}}_2(r) \ll X^{\sigma_3 - \frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}|r|}, \tag{9.23}$$

т.к. знаменатель в (9.15) всегда $\gg 1$, если $\sigma_1 \geqslant \frac{1}{2}$ и $\sigma_2 = -\frac{1}{2}$.

Если t_3 удовлетворяет обратному неравенству

$$|\, t_3 \,| > \frac{1}{5} \,|\, r \,|,$$

тогда из определяющего равенства $t_3 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ следует неравенство

$$|\, t_1 + t_2 \,| > \frac{2}{5} \,|\, r \,| \,.$$

Отсюда следует, что справедлива либо оценка

$$|\, t_1 \,| > \frac{1}{5} \,|\, r \,|,$$

либо оценка

$$|\, t_2 \,| > \frac{1}{5} \,|\, r \,| \,.$$

В первом случае, в области $\operatorname{Re} s_1 \geqslant \frac{1}{2}$, это эквивалентно оценке:

$$|\, s_1 \,|^{c_1} \gg \big(\,|\, r \,| + 1\big)^{c_1},$$

а во втором, на прямой $\operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}$, – оценке:

$$\prod_{i=1}^{c_1} (s_2 + c_2 + i) \gg \big(\,|\, r \,| + 1\big)^{c_2}.$$

Полагая $c_1 = c_2 = c \geqslant 3$, получаем, что в любом случае справедлива общая оценка

$$\frac{1}{s_1^{c_1} \cdot \prod\limits_{i=1}^{c_1} (s_2 + c_2 + i)} \ll \frac{1}{(|\, r \,| + 1)^c}, \tag{9.24}$$

где $c \geqslant 3$ – любое целое фиксированное число.

Кроме того, подставляя в (9.22) равенство (8.10), II и оценку (8.13), получаем неравенство

$$\widehat{\varphi}_2(r) \ll \frac{X^{\sigma_3 - \frac{1}{2}}}{(|\, r \,| + 1)^c}. \tag{9.26}$$

Сравнивая оценки (9.23) и (9.26) для областей $|\, t_3 \,| \leqslant \frac{1}{5} \,|\, r \,|$ и $|\, t_3 \,| > \frac{1}{5} \,|\, r \,|$ мы видим, что оценка (9.23) сильнее оценки (9.26) при $\mid r \mid\to\infty$. Поэтому оценка (9.26) справедлива и для случая $\mid t_3 \mid\leqslant \frac{1}{5}\mid r\mid$, т.е. она справедлива всегда.

То же самое можно сказать и при сравнении оценок (9.26) и (9.21). Поэтому для функции $\hat{\hat{\varphi}}(r)$, определенной равенством (9.19), всегда справедлива оценка

$$\hat{\hat{\varphi}}(r) \ll \frac{X^{\sigma_3-\frac{1}{2}}}{(\mid r\mid+1)^c}. \tag{9.27}$$

Под словом "всегда" мы подразумеваем область в $\mathbb{C}^2$, определенную условиями: $\sigma_1 \geqslant \frac{1}{2}$, $\sigma_2 = -\frac{1}{2}$; константа $c \geqslant 3$ в (9.27) – любое фиксированное целое число.

§10. Непрерывная компонента

Непрерывная спектральная компонента из правой части равенства (1.19), [5] в нашем случае имеет вид:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{m}{n}\right)^{-r}\overline{\varphi_{\alpha,\infty;m}\left(\frac{1}{2}+ir\right)}\cdot\varphi_{\alpha,\infty;n}\left(\frac{1}{2}+ir\right)\cdot\hat{\hat{\varphi}}(r)\,dr. \tag{10.1}$$

Мы заменили спектральную функцию $\widehat{\varphi}(r)$ на $\hat{\hat{\varphi}}(r)$, т.к. поправочный коэффициент в (9.15) от спектрального параметра r не зависит, поэтому такая замена вполне законна; тем более, что (10.1) мы рассматриваем как часть ядра двойного интеграла (7.9) параметры интегрирования которых и входят в поправочный коэффициент (9.15).

Для того чтобы устранить недоразумения относительно сходимости интегралов в (10.1) по спектральному параметру r с функцией $\widehat{\varphi}(r)$ в их ядре напомним, что у нас есть представление (9.7) для функции $\widehat{\varphi}(r)$ откуда следует оценка

$$\widehat{\varphi}(r) \ll\mid r\mid^{-2-\varepsilon}, \quad \mid r\mid\to\infty, \tag{10.2}$$

которая обеспечивает абсолютную сходимость интегралов в (10.1) по спектральному параметру r. Но оценка (10.2) не устраивает нас, т.к. "константа" в символе И. М. Виноградова "$\ll$" слишком грубо зависит от параметра X. Для того, чтобы сделать эту зависимость приемлемой для нас (как в оценке (9.27)) и была введена улучшенная спектральная функция $\hat{\hat{\varphi}}(r)$ из (9.15).

Возвращаясь к ядрам интегралов (10.1) напомним, что подробности о структуре коэффициентов Фурье рядов Эйзенштейна $\varphi_{\alpha,\beta;n}(w)$ приведены в [5]. Для нас важно как эти коэффициенты зависят от параметра n:

$$\varphi_{\alpha,\beta;n}(w) = \frac{\sigma_{1-2w}(n)}{\zeta(2w)} \cdot \varphi^*_{\alpha,\beta;\delta}(w),$$

где функция $\varphi^*_{\alpha,\beta;\delta}(w)$ зависит только от вершин α, β и конгруэнц-модуля δ. Подробности этой зависимости можно найти в [5].

Поэтому непрерывную компоненту (10.1) можно записать как явную функцию параметров m и n в виде

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\alpha}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{1-w}(m)\cdot\tau_w(n)}{\zeta(2-2w)\cdot\zeta(2w)}\varphi^*_{\alpha,\beta;\delta}(1-w)\cdot\varphi^*_{\alpha,\beta;\delta}(w)\hat{\hat{\varphi}}(r)\,dr, \tag{10.3}$$

где $w = \frac{1}{2} + ir$,

$$\tau_w(n) = n^{w-\frac{1}{2}} \cdot \sigma_{1-2w}(n), \tag{10.4}$$

$$\sigma_w(n) = \sum_{d|n} d^w. \tag{10.5}$$

Теперь напомним, что в ядре двойного интеграла (7.9), II есть весовая функция параметров m и n:

$$m^{1-s_3}\cdot n^{-s_3}, \quad s_3 = \frac{1+s_1+s_2}{2},$$

а в правой части равенства (3.21), I, указано, что суммирование по $m = N^2 - X^2 > 0$ конечно, а суммирование по $n \leqslant 1$ бесконечно с весом $\Lambda(n)$ – функций Мангольдта. Поэтому после усреднения непрерывной компоненты по m и n мы получим в ядре интеграла две суммы:

$$\sum_{m=N^2-\alpha^2>0} \tau_{1-w}(m)\cdot m^{1-s_3} \tag{10.6}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_w(n)\cdot\Lambda(n)\cdot n^{s_3}. \tag{10.7}$$

Сумма (10.6) конечна поэтому проблем с ее сходимостью нет.

Для ряда (10.7) справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{s_3}}\cdot\tau_w(n)=-\frac{\zeta'}{\zeta}\left(s_3+ir\right)-\frac{\zeta'}{\zeta}\left(s_3-ir\right)+$$

$$+\sum_p\frac{\log p}{p^{2s_3}}\Big(1+\frac{1}{p^{2ir}}-\frac{1}{p^{s_3+ir}}\Big). \tag{10.8}$$

Главным членом правой части (10.8) является сумма двух логарифмических производных классической ζ-функции Римана

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}\left(s_3-ir\right)-\frac{\zeta'}{\zeta}\left(s_3+ir\right). \tag{10.9}$$

Оставшаяся сумма в (10.8) абсолютно сходится в полуплоскости $\operatorname{Re}s_3>\frac{1}{2}$ и проблем с ее исследованием не возникает. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточим внимание на главном члене (10.9).

После подстановки непрерывной компоненты (10.1) в ядро двойного интеграла (7.9), II мы получим несколько тройных интегралов в количестве равном числу вершин фундаментальной области F_δ группы $\Gamma_0(\delta)$.

Все они исследуются одинаково, поэтому для конкретности мы рассмотрим интеграл для вершины $\alpha=\infty$.

Спектральная функция $\hat{\hat{\varphi}}(r)$, благодаря оценке (9.27), обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость внутреннего интеграла по спектральному параметру r. Два внешних интеграла (7.9) так же сходятся абсолютно и равномерно. Поэтому мы можем сделать спектральный интеграл внешним, а интегрирование по s_1 – внутренним. Затем сдвинем s_1-контур влево на прямую $\operatorname{Re}s_1=\frac{1}{2}+\varepsilon$ с любым фиксированным $\varepsilon>0$ из интервала $(0,\frac{1}{4}]$. Параметр $s_1=\frac{1+s_1+s_2}{2}$ переместится на прямую $\operatorname{Re}s_3=\sigma_3=\frac{1+\varepsilon}{2}$. Дальше напомним, что мы приняли гипотезу Римана в широком смысле подразумевая, что она верна и для $\zeta(s)$. Потому при сдвиге s_1-контура мы пройдем полюса первого и второго слагаемых (10.9) в точках $s_3=1\pm ir$. В этих полюсах спектральная функция $\hat{\hat{\varphi}}(r)$ имеет оценку:

$$\hat{\hat{\varphi}}(r)\big|_{S_3=1\pm ir}\ll\frac{\sqrt{X}}{(|r|+1)^c}. \tag{10.6}$$

На прямой $\operatorname{Re} s_3 = \frac{1+\varepsilon}{2}$ логарифмические производные (10.9), как это сдедует из гипотезы Римана, имеют оценку

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}\,(s_3 \pm ir) \ll \log^2\,\left(\,|\,s_3\,| + |\,r\,| + 1\right). \tag{10.11}$$

Спектральная функция на прямой $\sigma_3 = \operatorname{Re} s_3 = \frac{1+\varepsilon}{2}$, как это следует из (9.27), имеет оценку:

$$\hat{\hat{\varphi}}\,(r)\big|_{S_3=\frac{1+\varepsilon}{2}} \ll \frac{(\sqrt{X})^{\varepsilon}}{(|r|+1)^{c}}. \tag{10.12}$$

Главный вклад непрерывной компоненты идет от вычетов в полюсах $s_3 = 1 \pm ir$ с оценкой (10.10) для вычета спектральной функции.

Напомним, что перед двойным интегралом (7.9) стоит нормировочный коэффициент X^{-1}. Поэтому двойные интегралы-вычеты по r-контуру и s_2-контуру с условием $\operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}$ оцениваются величиной порядка

$$X^{-\frac{1}{2}} \cdot Y^{\frac{3}{2}} M_k^{-\frac{1}{2}} \cdot N \cdot \log^3 N. \tag{10.13}$$

При этом величина $Y^{3/2}$ появилась от степени Y^{s_1} в ядре (7.9) в точках $s_3 = 1 \pm ir$, что соответствует условию $\operatorname{Re} s_1 = \frac{3}{2}$. Величина $M_k^{-1/2}$ – от степени $M_k^{s_3}$ на контур $\operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}$. Величина $N \cdot \log^3 N$ – это оценка суммы (10.6) в полюсах $s_3 = 1 \pm ir$, т.к. в этом случае $\operatorname{Re}(1 - s_3) = 0$ и сумма (10.6) не больше суммы $\sum_{x \leqslant N} \sigma_0(N^2 - X^2) \ll N \cdot \log^3 N$.

Произвольный параметр Y мы ограничим условием $Y \leqslant c_0 \cdot N^2$, где $c_0 \geqslant e$ – любая сколь угодно большая, но фиксированная константа.

Кроме того, по условию $M_k \geqslant \sqrt[3]{N}$, поэтому $M_k^{-1/2} \cdot \log^3 N \ll 1$. Следовательно (10.13) по своему порядку не больше величины $X^{-1/2} \cdot N^4$.

Произвольный параметр $X \gg N^{10}$, поэтому

$$X^{-\frac{1}{2}} \cdot N^4 \ll N^{-1}.$$

Оценка вклада на контуре $\operatorname{Re} s_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon$, т.е. $\operatorname{Re} s_3 = \frac{1+\varepsilon}{2}$, имеет еще меньший порядок в связи с оценками (10.11) и (10.12).

Аналогично оценивается и вклад от остаточного ряда в правой части (10.8). Этот ряд регулярен в полуплоскости $\operatorname{Re} s_3 > \frac{1}{2}$, и на прямой $\mathrm{Re}\, s_3 = \frac{1+\varepsilon}{2}$ имеет порядок $O(1)$. Поэтому для него сдвиг s_1-контура влево на прямую $\mathrm{Re}\, s_1 = \frac{1+\varepsilon}{2}$ проходит без полюсов и вычетов и в результате мы снова можем воспользоваться оценкой (10.12). Правда, на контуре $\mathrm{Re}\, s_3 = \frac{1+\varepsilon}{2}$ немного ухудшится оценка конечной суммы (10.6) по сравнению с полюсами $s_3 = 1 \pm ir$ и станет величиной порядка $N^{2-\varepsilon} \cdot \log^3 N$ вместо $N \cdot \log^3 N$. Но этот рост будет компенсирован с большим запасом, уменьшением степени параметра X: на прмяой $\mathrm{Re}\, s_3 = \frac{1+\varepsilon}{2}$ она будет равна $X^{\varepsilon/2-1} \leqslant X^{-7/8} \ll N^{-8}$, т.к. по условию $\varepsilon \leqslant \frac{1}{4}$.

Поэтому весь вклад в общую оценку от непрерывной компоненты, после ее суммирований по всем вершинам α, всех конгруэнц-модулям δ и всем k-“ящикам”, количество которых $\ll \log N$, уходит в остаток с большим запасом по сравнению с главным членом в (1.22), I.

§11. Дискретная компонента

Дискретная компонента из правой части (1.19), [5], после замены спектральной функции $\widehat{\varphi}$ на $\hat{\hat{\varphi}}$ в ядре интеграла (7.9), II, примет вид:

$$\sum_{j\geqslant 1} \frac{\overline{\rho_j(m)} \cdot \rho_j(n)}{\operatorname{ch} \pi \varkappa_j} \cdot \hat{\hat{\varphi}}(\varkappa_j). \tag{11.1}$$

В оправдание замены $\widehat{\varphi}$ на $\hat{\hat{\varphi}}$ можно привести те же самые аргументы, которые уже были использованы в предыдущем параграфе для непрерывной компоненты.

Для упрощения символики мы опустим в (11.1) второй индекс у коэффициентов Фурье $\rho_{j,\infty}(n)$, т.к. вершина $\alpha = \infty$ считается традиционно основной и в ее коэффициентах Фурье второй индекс, указывающий вершину, обычно опускается если нет в сумме других вершин.

Ряд (11.1) и два интеграла в (7.9), II абсолютно и равномерно сходятся, поэтому мы можем поменять порядки суммирования (11.1) и интегрирования (7.9), II. После чего сделать суммирование по целым m и n внутренним, поместив эти суммы в ядре интеграла (7.9), II. Эта операция тоже законна, т.к. сумма по $m = N^2 - x^2 > 0$, конечна, а ряд по n абсолютно и равномерно сходится в любой области $\mathrm{Re}\, s_3 \geqslant 1 + \varepsilon$ с любым $\varepsilon > 0$; $s_3 = \frac{1+s_1+s_2}{2}$.

Но предварительно, как и в §8, II для конечно-мерных пространств, воспользуемся мультипликативностью коэффициентов

Фурье $\rho_j(n) = \rho_j(1) \cdot t_j(n)$, где $\rho_j(1)$ – нормировочный коэффициент, точное значение которого определяется равенством:

$$\iint\limits_{F_\delta} |\, f_j(z)\,|^2 \; d\mu(z) = 1, \tag{11.2}$$

$t_j(n)$ – собственное число оператора Гекке T_n функции $f_j(z)$. В результате сумма (11.1) примет вид:

$$\sum_{j\geqslant 1} \alpha_j \cdot t_j(m) \cdot t_j(n) \cdot \hat{\hat{\varphi}}(\varkappa_j), \tag{11.3}$$

где

$$\alpha_j = |\, \rho_j(1)\,|^2 \cdot (\operatorname{ch} \pi\varkappa_j)^{-1}. \tag{11.4}$$

Отметим, что для вершины ∞ операторы Гекке T_m эрмитовы для всех целых $m \geqslant 1$, включая и делители конгруэнц-модуля δ (см. по этому поводу [8]). Поэтому все их собственные числа $t_j(m)$ вещественны, что позволяет снять черту комплексного сопряжения у собственного числа $t_j(m)$ в сумме (11.3).

Но эта черта сохраняется у нормировочного коэффициента $\rho_j(1)$ в равенстве $\overline{\rho_j(m)} = \overline{\rho_j(1)} \cdot t_j(m)$, т.к. при тотально-вещественном базисе $f_j(z)$ для нечетных функций $f_j(z)$ нормировочный коэффициент $\rho_j(1)$ чисто мнимая величина, а для четных $f_j(z)$ – чисто вещественная (см. по этому поводу [8]).

В результате, после суммирования по "m" и "n" в ядре интеграла (7.9) появятся две суммы:

$$\sum_{m=N^2-x^2>0} t_j(m) \cdot m^{1-s_3}, \tag{11.5}$$

$$s_3 = \frac{1+s_1+s_2}{2}, \quad \operatorname{Re} s_3 \geqslant 1+\varepsilon$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \cdot t_j(n) \cdot n^{-s_3}. \tag{11.6}$$

Сумма (11.5) конечна, поэтому проблем с ее сходимостью не возникает.

Главной частью бесконечного ряда (11.6) является логарифмическая производная ряда Гекке $L_j(s)$, т.к. из его определения для $\mathrm{Re}\, s > 1$:

$$L_j(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_j(n)}{n^s} = \prod_p \Big(1 - \frac{t_j(p)}{p^s} = \frac{1}{p^{2s}}\Big)^{-1} \tag{11.7}$$

следует равенство

$$-\frac{L_j'}{L_j}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n) \cdot t_j(n)}{n^s} - \sum_p \frac{\log p}{p^s} \cdot \Big(1 - \frac{t_j(p)}{p^s} = \frac{1}{p^{2s}}\Big)^{-1}. \tag{11.8}$$

Это аналог равенства их §8, II для бесконечномерных гильбертовых пространств.

Из (11.8) видно, что разность между рядом (11.6) и логарифмической производной ряда $L_j(s)$ абсолютно сходится в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$ и проблем с ее исследованием не возникает, как и в §8. Поэтому в ядре интеграла (7.9) II мы заменим ряд (11.6) логарифмической производной

$$-\frac{L_j'}{L_j}(s_3). \tag{11.9}$$

Мы приняли гипотезу Римана для всех рядов Гекке всех конгруэнц-групп, поэтому функция (11.9) регулярна в полуплоскости $\mathrm{Re}\, s_3 > \frac{1}{2}$, а в области $\mathrm{Re}\, s_3 \geqslant \frac{1+\varepsilon}{2}$, при любом фиксированном $\varepsilon > 0$, имеет оценку:

$$\frac{L_j'}{L_j}(s_3) \ll \log^2 \big(\mid s_3 \mid + \mid \varkappa_j \mid + \delta \big), \tag{11.10}$$

где константа в символе И. М. Виноградова "$\ll$" зависит от ε гиперболически как величина $1/\varepsilon$.

Поэтому перенося s_1-контур в (7.9), II влево на прямую $\mathrm{Re}\, s_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon$ и следовательно $\mathrm{Re}\, s_3 = \frac{1+s_1+s_2}{2} = \frac{1+\varepsilon}{2}$, где $\varepsilon > 0$ – любое фиксированное, мы получаем, что порядок вклада компоненты в "k"-ом "ящике" §5, II оценивается величиной

$$X^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} \cdot Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \cdot M_k^{-\frac{1}{2}} \cdot N^2 \cdot \log^2 N. \tag{11.11}$$

При этом необходимую сходимость по спектральному параметру $\varkappa_j$ нам обеспечивает оценка (9.27) функции $\hat{\hat{\varphi}}(\varkappa_j)$ из §9. Она же, вместе с нормировочным множителем X^{-1}, дает нам в оценке (11.11) величину $X^{-1+\frac{\varepsilon}{2}}$. Величина $Y^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ – из оценки Y^{s_1} на прямой $\operatorname{Re} s_1 = \frac{1}{2} + \varepsilon$. Величина $M_k^{-\frac{1}{2}}$ – из оценки $M_k^{s_2}$ на прямой $\operatorname{Re} s_2 = -\frac{1}{2}$. Величина N^2 – из оценки конечной суммы (11.5) на прямой $\operatorname{Re} s_3 = \frac{1+\varepsilon}{2}$ методом большого решета Иванца–Дезуйе [5]. Величина $\log^2 N$ – из оценки (11.10).

С учетом оценки $Y \ll N^2$ и условия $M_k \geqslant \sqrt[3]{N}$, порядок величины (11.11) не больше

$$X^{-1+\frac{\varepsilon}{2}} \cdot N^{3+2\cdot\varepsilon}. \tag{11.12}$$

Вклад остаточного ряда из правой части (11.8) так же не больше величины (11.12).

Поэтому если взять $\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}$ и учесть, что $X \geqslant N^{10}$, то вклад дискретной компоненты в общую оценку после суммирования по всем "ящикам" из §5, II и всем модулям δ из §3, I, имеет порядок не больше величины $O(1)$.

Объединяя оценки §8, 10, 11 мы получаем общую оценку суммы (5.17) в среднем по всем "ящикам", всем $m = N^2 - x^2 > 0$, всем $n \geqslant 1$ и всем конгруэнц-модулям δ и делаем заключение, что общий вклад первый суммы (5.10), II, в бинарную проблему уходит в остаток по сравнению с главным членом в (1.22), I.

То же самое можно сказать и о сумме (5.18), II, т.е. о второй двойной сумме из (5.10), II. А т.к. вместе с первой суммой они дают "малые дуги" бинарной задачи, то тем самым проблема оценки "малых дуг" решена и асимптотика числа решений бинарной задачи получена.

§12. Заключение

Анализируя все выше сказанное можно заметить, что принятие гипотезы Римана существенно только в §8, II, для L-рядов Гекке конечно-мерных классических пространств. Для непрерывной и дискретной компонент в §10 и 11 гипотеза Римана не имеет значения, вполне достаточно правой границы – единичной полосы. Этот феномен объясняется более глубокими алгебро-арифметическими связями бинарных задач с классическими пространствами нежели с бесконечно-мерными гильбертовыми пространствами. Последние носят поправочный характер по отношению к первым.

Очень сильные оценки для непрерывной и дискретной компонент являются следствием большой гладкости весовых функций

$f_k(c)$ из §5, II, и большой длины X приближающей тэта-функции Харди-Литтлвуда в равенстве (3.10), I, для μ-функции Мёбиуса. К тому же все "плохие" и "неудобные" куски малых дуг, которые не умещались в гладкую схему, были оценены по пути традиционными методами в I-ой и II-ой частях этой работы. Они и дают главный остаток в бинарной проблеме.

Аналитический фактор, упомянутый выше, в меньшей степени затрагивает конечно-мерные пространства. Чтобы убедиться в этом, достаточно в части I, при записи μ-функции Мёбиуса в (3.10), воспользоваться сопряженной тэта-функцией Харди–Литтлвуда:

$$\mu(c) \cong \varepsilon \cdot \varphi(c) \cdot \overline{\vartheta_\varepsilon\left(\frac{d}{x}\right)}. \tag{12.1}$$

В этом случае суммы Клостермана $S_c(m,n)$ правой части равенства (3.22), I, будут заменены на $S_c(m,-n)$, т.е. на суммы Клостермана с параметрами разных знаков. Поэтому из работы [5] нам придется взять представление (1.20), [5], вместо (1.19), [5], которое не содержит конечно-мерных пространств и, соответственно, вместо спектральной функции $\widehat{\varphi}(r)$ из равенства (1.22), [5], надо взять $\check{\varphi}(r)$ из (1.23), [5]:

$$\check{\varphi}(r) = \frac{4}{\pi} \cdot \operatorname{ch} \pi r \int\limits_0^\infty K_{2ir}(x) \cdot \varphi(x) \cdot \frac{dx}{x} \tag{1.22}$$

с K-функцией Макдональда в ядре.

На первый взгляд кажется, что это явное упрощение ситуации по сравнению с равенством (1.19), [5].

Но на самом деле все наоборот. С помощью равенства (1.20), [5] нельзя получить оценку малых дуг части I. Точнее, если и удастся ее получить на этом пути, то со значительно большими техническими издержками нежели из равенства (1.19), [5].

Это связано с тем обстоятельством, что аналогом представления (9.8) для $\check{\varphi}(r)$ будет равенство:

$$\check{\varphi}(r) = \frac{4}{\pi} \frac{\operatorname{ch} \pi r}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}} \Gamma(s+ir) \cdot \Gamma(s-ir) \cdot J_s(\varphi)\, ds \tag{12.3}$$

с той же функцией $J_s(\varphi)$, что и в (8.10).

Прежде всего для функции $\check{\varphi}(r)$ уже нельзя получить аналога функции $\hat{\hat{\varphi}}(r)$ с оценкой (9.27). Эта трудность является следствием перехода $\cos \pi s$ из ядра интеграла (8.10) в коэффициент $\operatorname{ch} \pi r$ перед интегралом (12.3).

Кроме того, для обеспечения абсолютной сходимости дискретного спектра по $\varkappa_j$ надо сдвинуть контур (12.3) влево на прямую $\operatorname{Re} s = -\frac{1}{2} - \varepsilon$ с любым $\varepsilon > 0$. Но при таком сдвиге контура мы не получим запаса степени X в знаменателе даже с гипотезой Римана для всех спектральных L-рядов Гекке.

Поэтому остается метод прямого счета асимптотики интеграла (12.3) по стационарной фазе и затем усреднение по параметрам X и Y с надеждой получить необходимую сходимость по $\varkappa_j$ и запас степени X в знаменателе одновременно. Но счет очень тяжелый, т.к. нужна трехпараметрическая асимптотика с равномерными оценками остатков по трем параметрам сразу: (r, s_ε, X). К тому же не ясно, что нас ждет впереди пока счет не проведен.

Причина этих осложнений на пути равенства (12.1) понятна – конечно-мерные пространства в этом случае растворены в дискретном спектре правой части (1.20), [5]. Стоит их оттуда выделить, как, например, в равенстве (1.19), [5], так все сложности сразу же пропадают.

Возвращаясь к §8, II, заметим, что гипотеза Римана хотя и позволяет сравнительно просто оценить вклад конечно-мерных пространств в общую оценку "малых дуг", тем не менее она не по существу. Современной границы нулей и плотностных теорем достаточно для получения нетривиальной оценки. При этом параметр X надо взять существенно большого порядка:

$$X \geqslant \exp\left[(\log N)^2\right].$$

Хотя формально до сих пор никто не занимался переносом теорем Адамара–Валле–Пуссена и Линника–Бомбьери на L-ряды Гекке конечно-мерных пространств, но ясно, что сделать это можно. Тем более, что все предварительные оценки "большого решета" для их коэффициентов уже получены в работе [5]. Остается только перевести эти оценки в плотностные теоремы и границы нулей по известной схеме из [7].

В самом конце отметим, что из спектральной части этой работы видно, что оценки "малых дуг" слабо зависят от степени полинома, который мы рассматривали. Единственное серьезное требование – чтобы он не обращался в ноль на интервале суммирования. Поэтому общий случай распределения простых и почти-простых в полиномах любой степени получается точно так же в смысле оценок "малых дуг". Трудность в этом случае перемещается в исследование особого ряда проблемы.

Формально особый ряд легко выписать как ряд Дирихле с эйлеровским произведением, коэффициентами которого являются тригонометрические суммы А. Вейля от нашего полинома. И весь вопрос сводится к тому, когда этот ряд отличен от нуля, т.е. какая арифметическая зависимость должна существовать между его коэффициентами, или корнями, что бы это условие выполнялось.

Наиболее просто эти условия выглядят для бинарных задач высокой степени, т.е. для простых вида

$$p = x^n + 1, \quad n \geqslant 2;$$

для двоек простых вида

$$p_1 \cdot p_2 = x^n - 1, \quad n \geqslant 2;$$

для бинарной проблемы Харди-Литтлвуда:

$$N = p + x^n, \quad n \geqslant 2.$$

Но уже для троек простых вида:

$$p_1\, p_2\, p_3 = x(x + a_1) \cdot (x + a_2),$$

задача не тривиальна в смысле арифметической зависимости между корнями a_1 и $a_2 \in \mathbb{N}$, не говоря о более длинных цепочках простых.

Под конец отметим, что задачу Дирихле о простых в прогрессии: $p \equiv \ell \pmod{D}$, $(\ell, D) = 1$, можно трактовать со спектральной точки зрения, как задачу распределения простых в полиноме первой степени:

$$p = \ell + Dx$$

и получить классическую асимптотику:

$$\sum_{\substack{n \equiv \ell \pmod{D} \\ n \leqslant X}} \Lambda(n) \sim \frac{X}{\varphi(D)}$$

для всех модулей $D \leqslant X^{1-\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало, но фиксировано.

Литература

1. А. И. Виноградов, *Сравненение спектров II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997).

Vinogradov A. I. Binary problem. A spectral approach. III.

In this final part of the work the necessary estimates for the discrete and conditions components of the “small arcs” of the binary Goldbach equation are obtained. The estimate of all three parts (Part I in volume 245, and Part II in this volume) of the worke are summed up.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 5 января 1997