Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 251, 1998 г.

Е. Ш. Гутшабаш

МЕТОД ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛИ КУЛОНОВСКОЙ ПЛАЗМЫ ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

1. Введение и постановка задачи

Данная работа посвящена исследованию и построению точных решений нелинейного эллиптического уравнения -sh-Гордон:

$$\triangle u = -4 \mathrm{sh}\, u, \tag{1.1}$$

где $\triangle$ – двумерный оператор Лапласа

Оно представляет как чисто математический интерес, описывая вложение поверхности отрицательной кривизны в трехмерное евклидово пространство [1], так имеет и ряд физических приложений. В частности, оно возникает как модель двумерной кулоновской системы частиц при отрицательных температурах [2, 3].

Понятие отрицательных температур было впервые введено, по-видимому, Л. Онзагером в 1949 году в связи с задачей описания вихревых линий. Как оказалось в дальнейшем, оно связано с так называемыми аномальными системами, состоящими из слабо взаимодействующих частиц, спинов и т.п. (см., например, [4]), в которых энергетический спектр ограничен сверху и существует некоторое максимальное значение энергии. В этом случае статистическая сумма системы $\sum_i g(E_i)\exp(-E_i/T)$ в предположении, что $g(E_i) \sim \exp(-aE_i), E_i \to \infty, a > 0$, где $g(E_i)$-плотность числа состояний, E_i-энергетический уровень, может сходиться как при $T > 0$, так и при $T < 0$ (T – абсолютная температура). Предполагая тогда, что $a = \infty$ и, следовательно, $g(E_i) = 0$ при $E_i > E_{\max}$, нетрудно видеть, что статистическая сумма превращается в конечный ряд и имеет конечное значение при $T \in (-\infty, \infty)$.

Очевидно, далее, что заселенность энергетических уровней, пропорциональная больцмановскому фактору $\exp(-E_i/T)$, при $T > 0$ падает с увеличением энергии. В частности, при $T \to \infty$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-01063).

$\exp(-E_i/T) \to 1$, т.е. все уровни оказываются заселенными равномерно. Иная картина при $T \in (-\infty, 0)$ – в этом случае больцмановский фактор является возрастающей функцией E_i и возникает явление инверсии заселенностей уровней, при котором заселенность на верхних энергетических уровнях в среднем становится больше, чем на нижних. Очевидно, что уравнение (1.1), в правой части которого стоит разность больцмановских факторов для однозарядных ионов и электронов (система Больцмана–Пуассона), как раз и соответствует описанной ситуации с отрицательной температурой.

Перейдем к постановке граничной задачи. Будем предполагать, что функция $u(x, y)$ определена на полуплоскости $R^2_+ = \{(x, y) : x \in (-\infty, \infty), y \geqslant 0\}$, вещественнозначная и достаточно гладкая, $u(x, 0), u_y(x, 0)$ – граничные значения искомой функции и ее нормальной производной – таковы, что считается заданным одно из них, при этом они связаны между собой некоторым условием, сформулированным ниже (нелинейным аналогом граничного условия 3-го рода). Кроме того, будем предполагать, что

$$u(x, 0) \to 0, |x| \to \infty \tag{1.2}$$

Уравнение (1.1) является интегрируемым и представляется в виде условия совместности линейной матричной системы:

$$\Psi_x(x, y, \lambda) = U(x, y, \lambda)\Psi(x, y, \lambda) \tag{1.3a}$$

$$\Psi_y(x, y, \lambda) = V(x, y, \lambda)\Psi(x, y, \lambda) \tag{1.3b}$$

Здесь $\Psi(x, y, \lambda)$ – матричнозначная (2×2) функция, λ – комплексный спектральный параметр, а U и V имеют вид:

$$U(\lambda) \equiv U(x, y, \lambda) = i[\frac{2}{\lambda^2 - 1} + \frac{\lambda + 1}{2(\lambda - 1)}(\operatorname{ch} u - 1)]\sigma_3 +$$

$$+\frac{\lambda + 1}{2(\lambda - 1)}\operatorname{sh} u e^{-2ix\sigma_3}\sigma_2 + \frac{u_z}{2}e^{-2ix\sigma_3}\sigma_1$$

$$V(\lambda) \equiv V(x, y, \lambda) = [\frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1} + \frac{\lambda + 1}{2(\lambda - 1)}(\operatorname{ch} u - 1)]\sigma_3 +$$

$$+\frac{i(\lambda + 1)}{2(\lambda - 1)}\operatorname{sh} u e^{-2ix\sigma_3}\sigma_2 + \frac{iu_z}{2}e^{-2ix\sigma_3}\sigma_1$$

Заметим, что такой несколько необычный и сложный вид калибровки пары связан с доказанной ранее калибровочной эквивалентностью уравнения (1.1) и двумерного изотропного ферромагнетика Гейзенберга [5, 6], а выбор в качестве полюсов ± 1 обусловлен необходимостью получения удобной системы контуров при решении обратной задачи (см. ниже).

2. Ассоциированная линейная задача

Введем $\Psi^{\pm}(x,\lambda)$ – решения Йоста системы (1.3), удовлетворяющие условиям ($k(\lambda) = 2/(\lambda^2-1)$):

$$\Psi^{\pm}(x,\lambda) \to \exp(ik(\lambda)x\sigma_3)(1+o(1)), x \to \pm\infty \tag{2.1}$$

и определим матрицу перехода $T(\lambda) \equiv T(\lambda, y)(\lambda^2 = \bar{\lambda}^2)$:

$$\Psi^{-}(x,\lambda) = \Psi^{+}(x,\lambda)T(\lambda), T(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Матрица $T(\lambda)$ является унимодулярной: $\det T(\lambda) = 1$. Полагая $\phi^{\pm}(x,\lambda) = \Psi^{\pm}(x,\lambda)\exp(-ik(\lambda)x\sigma_3)$, из (1.3а) получим:

$$\phi^{\pm}(\lambda) = e^{-ix\sigma_3}e^{(u/2)\sigma_1}\sigma_2 e^{-ix\sigma_3}\bar{\phi}^{\pm}(-\bar{\lambda})\sigma_2,\ \lambda^2 = \bar{\lambda}^2, \tag{2.3}$$

$$\phi^{\pm}(\lambda) = e^{-2ix\sigma_3}\sigma_1\phi^{\pm}(\frac{1}{\lambda})e^{-2ix\sigma_3}\sigma_1\lambda^2 = \bar{\lambda}^2 \tag{2.4}$$

Из этих соотношений с учетом определения матрицы перехода следуют соотношения симметрии:

$$T(\lambda) = \sigma_2\bar{T}(-\bar{\lambda})\sigma_2,\ \lambda^2 = \bar{\lambda}^2, \tag{2.5}$$

$$T(\lambda) = \sigma_1 T(\frac{1}{\lambda})\sigma_1 \tag{2.6}$$

Отсюда имеем:

$$T(\lambda) = \sigma_3\bar{T}(-\frac{1}{\bar{\lambda}})\sigma_3,\ \lambda^2 = \bar{\lambda}^2 \tag{2.7}$$

Найдем завимсимость данных рассеяния от переменной y. Для этого обратимся к системе (1.3б). Выполнив стандартные действия и полагая $l(\lambda) = 2\lambda/(\lambda^2-1) = \lambda k(\lambda)$, получим:

$$a(\lambda,0) = a(\lambda,y),\ b(\lambda,y) = b(\lambda,0)e^{2l(\lambda)y} \tag{2.8}$$

$$c(\lambda, y) = c(\lambda, 0)e^{-2l(\lambda)y}, \ d(\lambda, 0) = d(\lambda, y) \tag{2.9}$$

Из этих соотношений вытекает, что коэффициенты $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ "подозрительны" на роль производящих функционалов "интегралов движения", а из требования конечности коэффициентов $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$ следует, что $b(\lambda, 0)$ следует занулить при

$$\lambda > 1, -1 < \lambda < 0, \tag{2.10}$$

а $c(\lambda, 0)$ – при

$$0 < \lambda < 1, \lambda < -1. \tag{2.11}$$

Эти неравенства определяют границы лакун в спектре оператора ассоциированной линейной задачи, а областями на вещественной оси, дополнительными к лакунам, является сам непрерывный спектр. При $\lambda = -\bar{\lambda}$ подобных ограничений нет, поэтому непрерывный спектр может располагаться на мнимой оси.

Полагая $U(x, y, \lambda) = ik(\lambda)\sigma_3 + Q(x, y, \lambda)$, где

$$Q(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}\frac{\lambda+1}{\lambda-1}(\operatorname{ch} u - 1) & (-\frac{i}{2}\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\operatorname{sh} u + \frac{u_z}{2})e^{-2ix} \\ (\frac{i}{2}\frac{\lambda+1}{\lambda-1}\operatorname{sh} u + \frac{u_z}{2})e^{2ix} & -\frac{i}{2}\frac{\lambda+1}{\lambda-1}(\operatorname{ch} u - 1) \end{pmatrix},$$

а также вводя столбцы $\phi_1^{\pm}, \phi_2^{\pm}$ матрицы $\phi^{\pm}$, из (1.3а) получим вольтерровы интегральные уравнения прямой задачи:

$$\phi_1^-(x, \lambda) = e_1 + \int d\xi g_1^-(x - \xi, \lambda)Q(\xi, \lambda)\phi_1^-(\xi, \lambda), \tag{2.12}$$

$$\phi_2^-(x, \lambda) = e_2 + \int d\xi g_2^-(x - \xi, \lambda)Q(\xi, \lambda)\phi_2^-(\xi, \lambda) \tag{2.13}$$

В этих уравнениях $e_1 = (1, 0)^T, e_2 = (0, 1)^T$, а $g_{1,2}^-(x, \lambda)$ - затравочные функции Грина, имеющие вид:

$$g_1^-(x, \lambda) = \theta(x)\operatorname{diag}(1, e^{-2ik(\lambda)x}), \ g_2^-(x, \lambda) = \theta(x)\operatorname{diag}(e^{2ik(\lambda)x}, 1) \tag{2.14}$$

Из (2.12)–(2.13) следует, что

$$\phi_1^-(x, \lambda) \in H(\Omega_1 \cup \Omega_3), \ \phi_2^-(x, \lambda) \in H(\Omega_2 \cup \Omega_4), \tag{2.15}$$

где $H(\Omega_i)$ – класс функций ($\Omega_i = \{\lambda : (i-1)\pi/2 < \arg\lambda < i\pi/2\}, i = 1, ...4$), аналитичных в области Ω_i. Совершенно аналогично можно показать, что

$$\phi_1^+(x, \lambda) \in H(\Omega_2 \cup \Omega_4), \ \phi_2^+(x, \lambda) \in H(\Omega_1 \cup \Omega_3), \tag{2.16}$$

Исходя из (2.12)–(2.13), нетрудно получить интегральные представления для данных рассеяния:

$$a(\lambda) = 1 + \int d\xi [Q_{11}(\xi,\lambda)\phi^{-}_{11}(\xi,\lambda) + Q_{12}(\xi,\lambda)\phi^{-}_{21}(\xi,\lambda)], \qquad (2.17)$$

$$b(\lambda) = \int d\xi [Q_{11}(\xi,\lambda)\phi^{-}_{12}(\xi,\lambda) + Q_{12}(\xi,\lambda)\phi^{-}_{22}(\xi,\lambda)] e^{-2ik(\lambda)\xi}, \qquad (2.18)$$

и, следовательно

$$a(\lambda) \in H(\Omega_1 \cup \Omega_3) \qquad (2.19)$$

Из (2.18) и аналогичного соотношения для $c(\lambda)$ следует, что $b(\lambda)$ и $c(\lambda)$, вообще говоря, не допускают аналитического продолжения с вещественной и мнимой оси. Полагая в (2.18) $y = 0$, в соответствии с (2.10) получим равенство:

$$\int d\xi [Q_{11}(\xi,0,\lambda)\phi^{-}_{12}(\xi,0,\lambda) + Q_{12}(\xi,0,\lambda)\phi^{-}_{22}(\xi,0,\lambda)] e^{-2ik(\lambda)\xi} = 0, \qquad (2.20)$$

которое связывает между собой граничные значения искомой функции и ее нормальной производной и играет роль граничного условия (в спектральном представлении).

Введем важную для дальнейшего матричную комплекснозначную функцию $\Omega = \Omega(x,y)$, которую определим следующим образом:

$$\Omega(x,y) = \lim \Psi^{-}(x,y,\lambda), |\lambda| \to \infty. \qquad (2.21)$$

Из (2.21), (2.3) следует, что выполняется соотношение:

$$\Omega = e^{-ix\sigma_3} e^{\frac{u}{2}\sigma_1} \sigma_2 e^{-ix\sigma_3} \bar{\Omega} \sigma_2, \qquad (2.22)$$

которое существенно будет использовано ниже.

Матрица Ω удовлетворяет уравнению:

$$\Omega_x = U(x,y,\infty)\Omega, \qquad (2.23)$$

и, кроме того, $\det \Omega(x,y) = 1$. Будем также предполагать, что она имеет асимптотики:

$$\Omega_0 = \lim \Omega(x) = (-1)^N e^{\frac{i\alpha_0}{2}\sigma_3},\ x \to +\infty, \qquad (2.24)$$

$$\lim \Omega(x) = I,\ x \to -\infty, \qquad (2.25)$$

где α_0 – некоторый параметр, $\alpha_0 \not\equiv 0$, а смысл целого числа N будет выяснен в дальнейшем. Такой выбор асимптотик согласуется с (1.3а), (2.23) и диктуется указанной ранее калибровочной эквивалентностью граничных задач.

Из (2.2), (2.23), (2.24) имеем:

$$T(\infty) = (-1)^N \exp\left(\frac{i\alpha_0}{2}\sigma_3\right),\ T(0) = (-1)^N \exp\left(-\frac{i\alpha_0}{2}\sigma_3\right), \qquad (2.26)$$

а из (2.10) и аналогичного выражения для $c(\lambda)$ следует, что

$$b(\pm 1 - 0) = c(\pm 1 - 0) = 0. \qquad (2.27)$$

3. Дисперсионные соотношения и тождества следов

Результаты, полученные в предыдущем параграфе, позволяют выписать дисперсионные соотношения, а также получить тождества следов.

Из (2.17) имеем:

$$a(\lambda) = (-1)^N e^{\frac{i\alpha_0}{2}}[1 + O(\frac{1}{|\lambda|})], |\lambda| \to \infty, \lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_3. \qquad (3.1)$$

Аналогично можно показать, что

$$d(\lambda) = (-1)^N e^{-\frac{i\alpha_0}{2}}[1 + O(\frac{1}{|\lambda|})], |\lambda| \to \infty, \lambda \in \Omega_2 \cup \Omega_4. \qquad (3.2)$$

Предположим теперь, что коэффициент $a(\lambda)$ имеет конечное число простых нулей в областях Ω_1 и Ω_3, причем количество этих нулей в обеих областях одинаково и равно N, а сами нули не лежат на непрерывном спектре (разве, что в лакунах-формула (2.10). Кроме того, будем считать, что $a(\lambda) = a_s(\lambda)a_c(\lambda)$, где $a_s(\lambda)$ соответствует вкладу дискретного спектра ("солитонная" часть), а $a_c(\lambda)$-непрерывного. Принимая во внимание (2.2), (2.10)–(2.11) и равенство $|a_s(\lambda)|^2 = 1$ при $\lambda = \bar{\lambda}$, будем иметь

$$\ln a_c(\lambda) + \ln d_c(\lambda) = 0, \lambda = \bar{\lambda},$$

$$\ln a_c(\lambda) + \ln d_c(\lambda) = \ln(1 - |b(\lambda)|^2), \lambda = -\bar{\lambda}.$$

Эти равенства задают скачки кусочно-аналитических функций $\ln a_c(\lambda)$ и $\ln d_c(\lambda)$ на непрерывном спектре. Применив к функции

$\ln a_c(\lambda) \in H(\Omega_1 \cup \Omega_3)$ формулу Коши и учитывая (2.26) и два предыдущих соотношения, получим:

$$\ln a_c(\lambda) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{\ln(1-|b(i\mu)|^2)}{\mu + i\lambda} \mathrm{sign}\,(\mu). \tag{3.3}$$

Рассмотрим "солитонную" часть коэффициента $a(\lambda)$: $a_s(\lambda)$. Пусть $a_s(\lambda_n) = 0$, где $\lambda_n \in \Omega_1$. Тогда в силу соотношения $\bar{a}(\lambda_n) = a(-1/\bar{\lambda}_n)e^{i\alpha_0}$ будем иметь: $a(-1/\bar{\lambda}) = 0$, $-\bar{\lambda}^{-1} \in \Omega_3$. Отсюда с учетом (2.6) найдем выражение для $a_s(\lambda)$:

$$a_s(\lambda) = (-1)^N e^{\frac{i\alpha_0}{2}} \prod_{n=1}^{N} \frac{(\lambda-\lambda_n)(\lambda+\frac{1}{\bar{\lambda}_n})}{\lambda+\bar{\lambda}_n)(\lambda-\frac{1}{\lambda_n})}. \tag{3.4}$$

Объединив (3.3) и (3.4), получим окончательно

$$\begin{aligned} a(\lambda) = (-1)^N e^{\frac{i\alpha_0}{2}} \prod_{n=1}^{N} \frac{(\lambda-\lambda_n)(\lambda+\frac{1}{\bar{\lambda}_n})}{\lambda+\bar{\lambda}_n)(\lambda-\frac{1}{\lambda_n})} \times \\ \times \exp\,[-\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{\ln(1-|b(i\mu)|^2)}{\mu+i\lambda} \mathrm{sign}\,(\mu)]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Из последнего равенства с учетом (2.26) следует:

$$e^{-i\alpha_0} = \prod_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n^2}{\bar{\lambda}_n^2} \exp\,[-\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{\ln(1-|b(i\mu)|^2)}{\mu}]. \tag{3.6}$$

В частности, при $b(\mu) = 0$, т.е. в "солитонном" секторе задачи

$$e^{-i\alpha_0} = \prod_{n=1}^{N} \frac{\lambda_n^2}{\bar{\lambda}_n^2}. \tag{3.7}$$

При $\alpha_0 = 0$ и $N = 1$ отсюда имеем, что либо $\lambda_1 = \bar{\lambda}_1$, либо $\lambda = -\bar{\lambda}_1$. В первом случае собственная функция будет делокализованной, а решение не будет удовлетворять асимтотике (2.1). Во втором случае ($\lambda_1 = -\bar{\lambda}_1$): $a_s(\lambda_1) = 1$ – дискретное собственное значение находится на непрерывном спектре – ситуация, которую мы не рассматриваем. Следовательно, при $\alpha_0 = 0$ минимально допустимое значение N в безотражательном случае равно двум. Отсюда понятна причина введения параметра α_0 в (2.24).

Полагая в (3.7) $\lambda_n = \rho_n e^{i\theta_n}$, $\rho_n > 0$, $\theta_n \in (0, \pi/2)$, получим $\sum_{i=1}^{N} \theta_n = -\alpha_0/4 + \pi n/2$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; в частности, при $N = 1$ $\theta_1 = -\alpha_0/4 + \pi k/2$, где k таково, что выполняется неравенство $0 < -\alpha_0/4 + \pi k/2 < \pi/2$.

Пусть $a_s(\lambda) = 1$, т.е. дискретный спектр в системе отсутствует. В этом случае из (3.6) имеем:

$$\alpha_0 = -\int_0^{\infty} \frac{d\mu}{\pi} \frac{\ln(1 - |b(i\mu)|^2)}{\mu}. \tag{3.8}$$

Из (3.5) и (3.8) следует, что

$$T(\pm 1) = 1. \tag{3.9}$$

Заметим, что выражение типа (3.5) справедливо и для коэффициента $d(\lambda)$ – здесь мы на этом останавливаться не будем.

Перейдем к выводу тождества следов. Ввиду того, что матрица Ω (соотношение (2.23)) явно не определяется, эти тождества в точках нуль и бесконечность получены быть не могут (мы не знаем решений уравнений Риккати в этих случаях). Поэтому ограничимся соотношениями в окрестностях точек дивизоров полюсов.

Полагая $\ln a(\lambda) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p^{(\pm 1)} (\lambda \pm 1)^p$, $\lambda \to \pm 1$, из (3.5) будем иметь: $a_p^{(1)} = -a_p^{(-1)}$, p – четное и $a_p^{(1)} = \bar{a}_p^{(-1)}$, p – нечетное. Эти равенства, являющиеся следствием спектральной структуры задачи, позволяют контролировать правильность промежуточных вычислений и окончательных результатов.

Из (1.3а) стандартным образом можно получить уравнение Риккати для функции $F(x, \lambda) = \phi_{21}^{-}(x, \lambda)/\phi_{11}^{-}(x, \lambda)$:

$$F_x + Q_{12} F^2 = (Q_{22} - Q_{11} - 2ik(\lambda))F + Q_{21}. \tag{3.10}$$

Кроме того, из уравнения на ϕ_1^- с учетом (2.2) следует, что

$$\ln a(\lambda) = \int_{\infty}^{\infty} dx [Q_{11}(x, \lambda) + Q_{12}(x, \lambda) F(x, \lambda)]. \tag{3.11}$$

Используя явный вид матричных элементов Q_{ij}, в окрестности точки $\lambda = -1$ получим $(F(x, \lambda) = \sum_{s=1}^{\infty} F_s^{(-1)} (\lambda + 1)^s))$: $F_1^{(-1)} =$

$(iu_z/2)e^{2ix}$, откуда согласно (3.11) $\ln a(\lambda) = 0, \lambda \to -1$, что согласуется с (3.9). В следующем порядке ($\sim (\lambda+1)$), учитывая (3.10), (3.11), (3.5), будем иметь:

$$1 + \frac{\rho_1^2 - 1}{\rho_1^2 + 2\rho_1 cos\theta_1 + 1} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{(\mu^2 - 1)\ln(1 - |b(i\mu)|^2)}{(\mu^2 - 1)^2 + 4\mu^2} \mathrm{sign}\,(\mu) =$$

$$= \frac{1}{16} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx u_x(x,0) u_y(x,0), \tag{3.12}$$

$$-\frac{\rho_1 sin\theta_1}{\rho_1^2 + 2\rho_1 cos\theta_1 + 1} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{2\pi} \frac{\mu \ln(1 - |b(i\mu)|^2)}{(\mu^2 - 1)^2 + 4\mu^2} \mathrm{sign}\,(\mu) =$$

$$= -\frac{1}{4} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx [(\mathrm{ch}\, u(x,0) - 1) - \frac{1}{8}(u_x^2(x,0) - u_y^2(x,0))], \tag{3.13}$$

где $\lambda_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $\theta_1 \in (0, \pi/2)$. Таким образом, непрерывный спектр задачи вносит вклад в левые части тождеств следов. Следует отметить, также, что аналогичный характер эти тождества приобретут и в окрестности точки $\lambda = 1$.

4. Уравнения обратной задачи и формулы восстановления

Из анализа свойств спектра оператора ассоциированной линейной задачи, а также аналитических свойств решений Йоста, выполненного выше, следует, что непрерывный спектр задачи лежит на “кресте”: $\{\lambda : \lambda_R = 0 \cup \lambda_I = 0\}$, а столбцы матриц этих решений допускают аналитические продолжения в определенные области на плоскости комплексного спектрального параметра λ. Это дает возможность использовать метод задачи Римана. Однако здесь возникает дополнительная трудность: из (2.21) и определения матрицы ϕ^- вытекает, что $\phi^-(x,\infty) = \Psi(x,\infty) = \Omega(x,y)$, причем матрица $\Omega(x,y)$ является неизвестной. Это приводит к тому, что локальная задача Римана об аналитической факторизации оказывается в этом случае с неканонической нормировкой на бесконечности. Кроме того, определенные трудности возникают здесь и при нахождении формул восстановления потенциала. Этим задачам и посвящен данный параграф.

В качестве метода решения обратной задачи выберем метод векторной задачи Римана. Из (2.2) и связи матриц $\Psi^{\pm}$ и $\phi^{\pm}$ получим:

$$\phi^{-}(x,\lambda)=\phi^{+}(x,\lambda)T_1(x,\lambda), \tag{4.1}$$

где

$$T_1(x,\lambda)=\exp(ik(\lambda)x\sigma_3)T(\lambda)\exp(-ik(\lambda)x\sigma_3).$$

Воспользуемся одним из равенств, следующих из (4.1):

$$\frac{\phi_1^{+}(x,\lambda)}{d(\lambda)}=\phi_1^{-}(x,\lambda)-\phi_2^{-}(x,\lambda)\frac{c(\lambda)}{d(\lambda)}e^{-2ik(\lambda)x}. \tag{4.2}$$

Предположим, что $\lambda_n\in\Omega_1$ таково, что $a(\lambda_n)=0$, при этом $-1/\bar\lambda_n\in\Omega_3$ и $a(-1/\bar\lambda_n)=0$. Тогда в этих точках вектор-функции $\Psi_1^{-}(x,\lambda)$ и $\Psi_2^{+}(x,\lambda)$ оказываются линейно зависимыми, откуда имеем:

$$\phi_1^{-}(x,\lambda_n)=-\frac{1}{b_n}\phi_2^{+}(x,\lambda_n)e^{-2ik(\lambda_n)x}, \tag{4.3}$$

$$\phi_1^{-}(x,-\frac{1}{\bar\lambda_n})=\frac{1}{\bar b_n}\phi_2^{+}(x,-\frac{1}{\bar\lambda_n})e^{-2ik(-\frac{1}{\bar\lambda_n})x}, \tag{4.4}$$

где $\phi_1^{-}(\lambda_n),\phi_2^{+}(\lambda_n),\phi_1^{-}(-\bar\lambda_n^{-1}),\phi_2^{+}(-\bar\lambda_n^{-1})$ – собственные функции дискретного спектра, b_n – соответствующие коэффициенты перехода.

Учитывая, что $\phi_1^{-}(\lambda)\to\Omega_1^1(x,y),|\lambda|\to\infty,\lambda\in\Omega_1\cup\Omega_3$, а $\phi_1^{+}(\lambda)/d(\lambda)\to\Omega_1^1(x,y),\lambda\in\Omega_2\cup\Omega_4$, где $\Omega_1^1=\Omega(x,y)e_1$, применяя формулу Коши к вектор-столбцу $(\phi_1^{-}-\Omega_1^1)$, аналитичному в области Ω_1 и используя (4.2)–(4.4), получим равенство:

$$\phi_1^{-}(\lambda)=\Omega_1^1-i\sum_{n=1}^{N}\frac{\beta_n}{\lambda_n^2(\lambda-\frac{1}{\lambda_n})}e^{-2ik(\frac{1}{\lambda_n})x}\chi(x)\bar\phi_1^{-}(-\frac{1}{\bar\lambda_n})+$$

$$+i\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar\beta_n}{\lambda+\bar\lambda_n}\chi(x)\bar\phi_1^{-}(\lambda_n)+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu}{2\pi}\frac{\bar b(\mu)}{\bar a(\mu)}\frac{\chi(x)}{\mu+\lambda}e^{-2ik(\mu)x}\bar\phi_1^{-}(\mu)\operatorname{sign}(\mu)-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu}{2\pi}\frac{\bar b(i\mu)}{\bar a(i\mu)}\frac{\chi(x)}{\mu+i\lambda}e^{-2ik(i\mu)x}\bar\phi_1^{-}(i\mu)\operatorname{sign}(\mu), \tag{4.5}$$

где $\chi(x) = e^{-ix\sigma_3}\sigma_2 e^{-u/2\sigma_1} e^{-ix\sigma_3}$, $\beta_n(y) = b_n/a'(\lambda_n) = \beta_n(0)e^{2l(\lambda_n)y}$. Это уравнение еще не является замкнутым уравнением на столбец $\phi_1^-(\lambda)$, поскольку содержит неизвестную вектор-функцию Ω_1^1. Поэтому для получения искомого уравнения воспользуемся (2.22), переписанном в виде:

$$\Omega^{-1} e^{-ix\sigma_3}\sigma_2 e^{-\frac{u}{2}\sigma_1} e^{-ix\sigma_3}\bar{\Omega} = \sigma_2. \tag{4.6}$$

Подставляя (4.6) в (4.5) и полагая

$$\phi_1^-(\lambda) = \Omega(x,y)\tilde{\phi}_1^-(\lambda), \tag{4.7}$$

получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений на функцию $\tilde{\phi}_1^-(\lambda)$:

$$\tilde{\phi}_1^-(\lambda) = e_1 + i\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{\beta}_n e^{-2ik(\bar{\lambda}_n)x}}{\lambda+\bar{\lambda}_n}\sigma_2\bar{\tilde{\phi}}_1^-(\bar{\lambda}_n)$$

$$-i\sum_{n=1}^{N}\frac{\beta_n e^{-2ik(\frac{1}{\lambda_n})x}}{\lambda_n^2(\lambda-\frac{1}{\lambda_n})}\sigma_2\bar{\tilde{\phi}}_1^-(-\frac{1}{\bar{\lambda}_n}) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu}{2\pi}\frac{\bar{b}(\mu)}{\bar{a}(\mu)}\frac{e^{-2ik(\mu)x}}{\mu+\lambda}\sigma_2\bar{\tilde{\phi}}_1^-(\mu)\mathrm{sign}\,(\mu) -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu}{2\pi}\frac{\bar{b}(i\mu)}{\bar{a}(i\mu)}\frac{e^{-2ik(i\mu)x}}{\mu+i\lambda}\sigma_2\bar{\tilde{\phi}}_1^-(i\mu)\mathrm{sign}\,(\mu), \tag{4.8}$$

$$\tilde{\phi}_1^-(\lambda_p) = e_1 + i\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{\beta}_n e^{-2ik(\bar{\lambda}_n)x}}{\lambda_p+\bar{\lambda}_n}\sigma_2\bar{\tilde{\phi}}_1^-(\bar{\lambda}_n) -$$

$$-i\sum_{n=1}^{N}\frac{\beta_n e^{-2ik(\frac{1}{\lambda_n})x}}{\lambda_n^2(\lambda_p-\frac{1}{\lambda_n})}\sigma_2\bar{\tilde{\phi}}_1^-(-\frac{1}{\bar{\lambda}_n}) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu}{2\pi}\frac{\bar{b}(\mu)}{\bar{a}(\mu)}\frac{e^{-2ik(\mu)x}}{\mu+\lambda_p}\sigma_2\bar{\tilde{\phi}}_1^-(\mu)\mathrm{sign}\,(\mu) -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu}{2\pi}\frac{\bar{b}(i\mu)}{\bar{a}(i\mu)}\frac{e^{-2ik(i\mu)x}}{\mu+i\lambda_p}\sigma_2\bar{\tilde{\phi}}_1^-(i\mu)\mathrm{sign}\,(\mu), \tag{4.9}$$

$$\tilde{\phi}_1^-(-\frac{1}{\bar{\lambda}_p}) = e_1 + i\sum_{n=1}^{N}\frac{\bar{\beta}_n e^{-2ik(\bar{\lambda}_n)x}}{\bar{\lambda}_n - 1/\bar{\lambda}_p}\sigma_2\bar{\tilde{\phi}}_1^-(\bar{\lambda}_n) +$$

$$+i\sum_{n=1}^{N}\frac{\beta_n e^{-2ik(\frac{1}{\lambda_n})x}}{\lambda_n^2(\frac{1}{\bar{\lambda}_p}+\frac{1}{\lambda_n})}\sigma_2\bar{\tilde{\phi}}_1^-(-\frac{1}{\bar{\lambda}_n}) + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu}{2\pi}\frac{\bar{b}(\mu)}{\bar{a}(\mu)}\frac{e^{-2ik(\mu)x}}{\mu-\frac{1}{\bar{\lambda}_p}}\sigma_2\bar{\tilde{\phi}}_1^-(\mu)\mathrm{sign}\,(\mu) -$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu}{2\pi}\frac{\bar{b}(i\mu)}{\bar{a}(i\mu)}\frac{e^{-2ik(i\mu)x}}{\mu-i\frac{1}{\lambda_p}}\sigma_2\bar{\tilde{\phi}}_1^-(i\mu)\mathrm{sign}\,(\mu). \qquad (4.10)$$

Уравнения (4.9), (4.10) получены из (4.8) при $\lambda=\lambda_p$ и $\lambda=-1/\bar{\lambda}_p$ соответственно. В правых частях всех трех уравнений, точнее в первых интегральных членах необходимо учитывать наличие лакун (2.10).

Система (4.8)–(4.10) является системой уравнений обратной задачи на собственные функции непрерывного и дискретного спектров. Ввиду того, что она написана для "откалиброванных" вектор-функций, то формулы восстановления потенциала, которыми ее необходимо дополнить, должны быть записаны в терминах этих же функций.

Используя (1.3а) и (4.7), получим дифференциальное уравнение на матрицу $\tilde{\phi}^-\equiv\tilde{\phi}^-(x,\lambda)$:

$$\tilde{\phi}_x^-=-ik(\lambda)\tilde{\phi}^-\sigma_3+\frac{1}{\lambda-1}\Omega^{-1}[i(\mathrm{ch}\,u-1)\sigma_3+\mathrm{sh}\,ue^{-2ix\sigma_3}\sigma_2]\Omega\tilde{\phi}^-+$$
$$+ik(\lambda)\Omega^{-1}\sigma_3\Omega\tilde{\phi}^-. \qquad (4.11)$$

В окрестности точки $\lambda=1$, полагая $\tilde{\phi}^-=\sum_{k=0}^{k=\infty}\tilde{\phi}_k(\lambda-1)^k$ ($\tilde{\phi}_0^-\to I,\ x\to-\infty$), найдем:

$$\tilde{\phi}_0^-=\Omega^{-1}\begin{pmatrix}1 & th\frac{u}{2}e^{-2ix}\\ th\frac{u}{2}e^{2ix} & 1\end{pmatrix}. \qquad (4.12)$$

Параметризуем теперь неизвестную матрицу Ω четырьмя комплекснозначными функциями переменных x,y:

$$\Omega(x,y)=\begin{pmatrix}\alpha(x,y) & \beta(x,y)\\ \gamma(x,y) & \delta(x,y)\end{pmatrix}. \qquad (4.13)$$

Тогда соотношение (4.6) приводит к четырем алгебраическим связям:

$$\alpha=\bar{\delta}\mathrm{ch}\,\frac{u}{2}-\bar{\beta}\mathrm{sh}\,\frac{u}{2}e^{-2ix},\quad \beta=\bar{\alpha}\mathrm{sh}\,\frac{u}{2}e^{-2ix}-\bar{\gamma}\mathrm{ch}\,\frac{u}{2},$$
$$\gamma=-\bar{\beta}\mathrm{ch}\,\frac{u}{2}+\bar{\delta}\mathrm{sh}\,\frac{u}{2}e^{2ix},\quad \delta=\bar{\alpha}\mathrm{ch}\,\frac{u}{2}-\bar{\gamma}\mathrm{sh}\,\frac{u}{2}e^{2ix}.$$

С учетом этих соотношений из (4.12) получим ($\tilde{\phi}^0=\tilde{\phi}_0^-$):

$$\tilde{\phi}^0=\frac{1}{\mathrm{ch}\,\frac{u}{2}}\bar{\Omega}^T, \qquad (4.14)$$

причем $\det \tilde{\phi}^0 = (\operatorname{ch} \frac{u}{2})^{-2}$. Комбинируя (4.12), (4.14) и (4.6), будем иметь:

$$\operatorname{ch} \frac{u(x,y)}{2} = [|\tilde{\phi}^0_{11}|^2 + |\tilde{\phi}^0_{21}|^2]^{-1} = [|\tilde{\phi}^0_{12}|^2 + |\tilde{\phi}^0_{22}|^2]^{-1}, \tag{4.15}$$

или

$$\operatorname{ch} \frac{u(x,y)}{2} = [\langle \tilde{\phi}^{0\,T}_1, \bar{\tilde{\phi}}^0_1 \rangle_2]^{-1} = [\langle \tilde{\phi}^{0\,T}_2, \bar{\tilde{\phi}}^0_2 \rangle_2]^{-1}, \tag{4.16}$$

где символ $\langle , \rangle_2$ означает скалярное произведение векторов в C^2. Другая запись (4.16) дает

$$\operatorname{ch} \frac{u(x,y)}{2} = \{\frac{1}{2} Tr(\tilde{\phi}^{0\,T} \bar{\tilde{\phi}}^0)\}^{-1}. \tag{4.17}$$

Совершенно аналогично можно получить еще одну формулу восстановления:

$$\operatorname{sh} \frac{u(x,y)}{2} = \frac{2\tilde{A} e^{-2ix}}{1 + \sqrt{1 - 4\tilde{A}^2 e^{-4ix}}}, \tag{4.18}$$

где $\tilde{A} = \langle ((((\bar{\phi}^-)^0)_1)^T, (((\phi^-))^0)_2 \rangle_2$, причем $\tilde{A} \to 0$ при $|x| \to \infty$, а требование вещественности потенциала приводит к тому, что величина $\tilde{A} e^{-2ix}$ должна быть вещественной. Последнее нетрудно доказать, используя (4.14) и определение $\tilde{A}$. Кроме того, с помощью элементарных преобразований показывается, что (4.18) эквивалентно (4.16).

Из (4.15), (4.18) следует, что решение задачи (1.1), (1.2) имеет несингулярный характер.

В "солитонном" секторе модели ($b(\lambda) = 0$) для формул восстановления можно найти выражение через собственные функции дискретного спектра. Для этого разложим правую часть (4.8) при $\lambda \to 1$ и, приравняв ее $\tilde{\phi}^0_1$, из (4.15) получим:

$$u(x,y) = 2 \ln \frac{1 - \sqrt{1 - (|\xi|^2 + |\eta|^2)^2}}{|\xi|^2 + |\eta|^2}, \tag{4.19}$$

где

$$\xi = \xi(x,y) = \sum_{n=1}^{2N} \frac{\bar{\beta}_n e^{-2ik(\bar{\lambda}_n)x}}{\bar{\lambda}_n + 1} \bar{\tilde{\phi}}^-{}_{11}(\lambda_n),$$

$$\eta = \eta(x,y) = 1 + \sum_{n=1}^{2N} \frac{\bar{\beta}_n e^{-2ik(\bar{\lambda}_n)x}}{\bar{\lambda}_n + 1} \bar{\tilde{\phi}}^-{}_{21}(\lambda_n),$$

$$\lambda_{n+N} = -\frac{1}{\bar{\lambda}_n},\ \beta_{n+N} = -\frac{\bar{\beta}_n}{\bar{\lambda}_n^{\,2}},\ n = 1, 2, ...N.$$

Функции $\tilde{\phi}^{-}_{11}(x, \lambda_n)$, $\tilde{\phi}^{-}_{21}(x, \lambda_n)$, входящие в (4.19), нетрудно найти из системы линейных алгебраических уравнений (4.9)–(4.11). Тогда:

$$\xi = \langle \bar{\Lambda}\bar{E}, R^{-1}E\rangle_{2n},\ \eta = 1 - \langle \bar{\Lambda}\bar{E}, R^{-1}A\bar{E}\rangle_{2n}, \tag{4.20}$$

где обозначено: $A = A_{mn}$, $A_{mn} = E_m\bar{E}_n/(\lambda_m + \bar{\lambda}_n), E_m = \beta_m^{1/2}e^{ik(\lambda_m)x}$, $\Lambda = \mathrm{diag}((\lambda_1+1)^{-1}, ...(\lambda_{2N}+1)^{-1})$, $m, n = 1, ...2N$, $E = (E_1, ...E_{2N})$, $R = I + A\bar{A}$.

N – "солитонное" решение, описываемое (4.19), (4.20) является точным решением исходной граничной задачи. Однако даже в простейшем случае ($N = 1$) оно является весьма громоздким и здесь мы приводить его не будем.

Отметим, что асимптотика решения для непрерывного спектра вычислена в [6] исходя из калибровочной эквивалентности данной граничной задачи и граничной задачи для ферромагнетика Гейзенберга, при этом существенно использовался метод работы [7].

5. Приложение к модели однозарядной плазмы при отрицательных температурах

К рассмотренной модели, как уже указывалось приводит модель равновесной системы заряженных частиц (вихрей) на плоскости [2, 3], обобщающая классическую модель Дебая–Хюккеля [8] для плазмы или раствора электролита на случай нетривиального статистического распределения "фона".

Следуя [2, 3], предположим, что у нас имеется кулоновская система N_0^+ частиц с зарядом $+e$ и N_0^- частиц ц зарядом $-e$, заключенных в некоторый конечный объем $V = L^2$ (где L – линейный масштаб). Кроме того, будем считать, что температуры ионных и электронных компонент совпадают и равны T (постоянная Больцмана считается равной единице). Используя цепочку ББГКИ, удобно рассматривать скалярный потенциал $\Phi = \Phi(x, y)$:

$$e\Phi(x, y) = n_0 \int dxdy\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}'),\ \mathbf{r} = (x, y), \tag{5.1}$$

где n_0 – средняя плотность заряженных частиц, $\phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ – двухчастичное кулоновское взаимодействие, $\rho(\mathbf{r})$ – разность плотностей ионов и электронов. Тогда с помощью достаточно строгой процедуры обрыва и расцепления упомянутой цепочки, можно получить уравнение:

$$\triangle\Phi = \frac{4\pi n_0 c}{l^0}[\exp(\frac{e\Phi}{T}) - \exp(\frac{-e\Phi}{T})], \tag{5.2}$$

где l^0 – характерная длина, причем

$$c = \frac{V}{\int dxdy[\exp[\frac{n_0}{T}\int dx\prime dy\prime \phi(\mathbf{r}-\mathbf{r}\prime)\rho(\mathbf{r}\prime)]}.$$

Полагая в (5.2) $u = \frac{e\Phi}{T}$ и $\tilde{\triangle} = (4\lambda_D^2/c)\triangle$, $\lambda_D^2 = l^0|T|/(8\pi n_0 e^2)$ – дебаевский радиус, найдем:

$$\mathrm{sign}\,(T)\tilde{\triangle} u = 4\mathrm{sh}\, u. \tag{5.3}$$

Из этого уравнения при $T < 0$ имеем уравнение (1.1) (случай $T > 0$ рассмотрен в [9, 10]).

Согласно описанной выше постановке задачи, уравнение (5.3), справедливое для R_+^2, следует дополнить заданным значением поля и связанным с ним значением производной поля на границе ∂R_+^2, причем $\Phi(x,0) \to 0, |x| \to \infty$.

Обсудим некоторые физические аспекты полученных в предыдущих параграфах результатов, считая, что $n_0 = N_0^{\pm}/V = \mathrm{const}$, т.е. в термодинамическом пределе. Для этого, прежде всего, выясним качественные особенности поведения решения (4.19). Полная энергия конечной системы дискретных изолированных зарядов в двумерном случае дается выражением [2, 3]:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}(N_{0_i}^+ - N_{0_i}^-)\Phi_{ij}(N_{0_j}^+ - N_{0_j}^-), \tag{5.4}$$

где $N_0^+ = \sum_i N_{0_i}^+$, $N_0^- = \sum_j N_{0_j}^-, \Phi_{ij} = -(2e^2/l^0)\ln|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ – кулоновский потенциал взаимодействия между частицами i-го и j-го кластеров, $\mathbf{r}_i$ и $\mathbf{r}_j$ их радиус-векторы. Сравнивая выражение для Φ_{ij} с (4.19), мы видим, что они имеют одинаковый функциональный вид. Пусть $B = |\xi|^2 + |\eta|^2$, причем в силу вещественности потенциала $0 \leqslant B \leqslant 1$. Тогда из (4.19) следует, что при $B \to 0$ $u(x,y) \simeq 2\ln(B/2) \to -\infty$, а при $B \to 1$ $u(x,y) \to 0$. В терминах собственных функций дискретного спектра и величин ξ, η, первое условие означает, что $\xi, \eta \to 0$, откуда $\sum_{n=1}^{2N}[\bar{\beta}_n \exp(-2ik(\bar{\lambda}_n)x)/(\bar{\lambda}_n + 1)]\tilde{\phi}_{21}^-(\lambda_n) \to -1$, что возможно в случае конечных r. Второе условие может быть выполнено, в частности, при $\xi \to 0$, $\eta \to 1$, т.е. при $r \to \infty$.

Таким образом, мы имеем следующую качественную картину. Предположим, что вначале внешнего поля нет ($u(x,0) = u_y(x,0) = 0$) и из заряженных частиц на плоскости можно образовать кластеры частиц одинакового заряда. После включения внешнего поля, имеющееся пространственное распределение перестраивается и переходит в некоторое другое, установившееся состояние. В любой точке $(x,y) \in R^2_+$ потенциал складывается из потенциала, создаваемого границей ∂R^2_+ и собственного потенциала самой системы заряженных частиц, т.е. в итоге образуется некоторое самосогласованное поле. Его потенциал описывается выражением $Tu(x,y)/e$, где $u(x,y) = u(B)$, а функция $B = B(x,y)$ играет роль "передаточной" функции среды. При этом минимальному значению B соответствует при некоторых конечных x, y локальный и глубокий минимум потенциала, причем в окрестности такого минимума $u < 0$. С учетом того, что $T < 0$, величина Φ оказывается большой и положительной, что свидетельствует о локальной концентрации частиц одного знака. Ввиду несингулярного характера ответа (4.19), Φ в то же время остается ограниченной сверху и, тем самым, ограниченным является энергетический спектр системы. Таким образом, мы имеем дело с аномальной системой, в которой наблюдается инверсия заселенностей уровней: положительная определенность энергии в совокупности с отрицательностью температур приводит к тому, что наиболее выгодным становится занять высокие энергетические уровни, чем низкие; кроме того происходит большее, по сравнению с первоначальным распределением, распределение зарядов на кластеры с одноименными зарядами.

Максимальному значению B соответствует $r \to \infty$ и $u(B) \to 0$, т.е. по мере удаления от границы, поле, создаваемое сосредоточенным на ней зарядом, за счет взаимодействия с собственным полем среды затухает. Подобное затухание происходит медленнее, чем в аналогичной ситуации с положительными температурами [9, 10]. Это нетрудно видеть, сопоставив решения соответствующих линеаризованных задач:

$$\triangle u = \pm 4u, \ u \to 0, \ \ r \to \infty, \tag{5.5}$$

где знак "+" соответствует системе с $T > 0$, а "−" – с $T < 0$. В первом случае функция Грина граничной задачи пропорциональна функции Макдональда нулевого индекса и имеет асимптотику $\sim (e^{-x}/\sqrt{x})[1+O(1/x)]$, $x \to \infty$, а во втором – функции Неймана нулевого индекса, которая ведет себя как $(sin(x-\pi/4)/\sqrt{x})[1+O(1/x)]$, $x \to \infty$. Поэтому более медленный характер затухания поля при $T < 0$, можно объяснить, по-видимому, более слабой экранировкой границы за счет чередования областей с одинаково заряженными частицами.

Описанная выше картина справедлива всюду на полуплоскости, за исключением некоторых явно определяемых направлений. В этих случаях B принимает промежуточные значения: $B \in [\epsilon, 1-\epsilon]$, $\epsilon > 0$, и, как нетрудно показать, на этих направлениях потенциал является осциллирующей функцией - в среде наблюдается дальний порядок, т.е. возникает когерентная структура распределения электрического поля и плотностей распределения плазмы с еще большим, чем на других направлениях, разделением зарядов.

Автор благодарен В. Д. Липовскому за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. А. И. Бобенко, — УМН **46, No. 4** (1991), 3.
2. G. Goyce, D. Montgomeri, — J. Plasma Phys. **10,** No. **1** (1973), 10.
3. D. Montgomeri, G. Goyce, — Phys. Fluids **17,** No. **6** (1974), 1139.
4. Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин, Термодинамика, статистическая физика и кинетика, М.,Наука, 1977.
5.. Е. Ш. Гутшабаш, Вестник ЛГУ, сер.физика, химия, No. 4 (1990), 84.
6. Г. Г. Варзугин, Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, ТМФ, **104**, No. 3 (1995), 513.
7. P. Deift, X. Zhou, Ann. of Math., **137**, No. 2 (1993), 295.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика. М. Наука, 1982.
9. В. Д. Липовский, С. С. Никуличев, Вестник ЛГУ, сер. физика, химия, No. 4 (1989), 61.
10. Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, С. С. Никуличев, ТМФ **115**, No. 3 (1998), 323.

Gutshabash E. Sh. Inverse scattering transform for the Coulomb's plasma with the negative temperature.

The boundary problem for two-dimensional elliptycal equation sh-Gordon is investigated. Their exact solutions are found and the identities of traces are proposed. The application of this problem to the model of the Coulomb's plasma with the negative temperature is considered.

НИИ Физики
Санкт-Петербургского
государственного университета

Поступило 15 июня 1998 г.