А.В.Цыганов

КЛАССИЧЕСКИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ И АВТОМОРФИЗМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ $SL(2)$

1. Введение

Внешние автоморфизмы бесконечномерных представлений алгебры Ли $sl(2)$ используются при построении матриц Лакса для интегрируемых гамильтоновых систем и дискретных интегрируемых отображений. Данный подход позволяет как воспроизвести известные результаты, так и построить новые примеры интегрируемых систем. Построены представления Лакса со спектральным параметром, соответствующие классические r-матрицы являются динамическими. Одно из достоинств этой схемы состоит в том, что построение представлений Лакса в методе классической r-матрицы позволяет достаточно легко перейти к рассмотрению квантовых систем и разделению переменных в квантовой механике [1].

2. Внешние автоморфизмы бесконечномерных представлений алгебры $sl(2)$

Пусть $\{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{h}\}$ есть базис в алгебре Ли $sl(2)$

$$[\mathbf{h},\mathbf{e}]=\mathbf{e}\,,\qquad [\mathbf{h},\mathbf{f}]=-\mathbf{f}\,,\qquad [\mathbf{e},\mathbf{f}]=2\mathbf{h}\,. \tag{2.1}$$

Элемент

$$\mathbf{\Delta}=\mathbf{h}^2+\frac{1}{2}(\mathbf{ef}+\mathbf{fe}) \tag{2.2}$$

обертывающей алгебры является оператором Лапласа на группе $SL(2)$.

Рассмотрим бесконечномерное представление $\mathcal{W}$ алгебры $sl(2)$ в линейном пространстве V так, что

$$\mathcal{W}:\ \{\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{h}\}\to\{e,f,h\}\in \mathrm{End}(V)\,.$$

Сопоставим данному представлению $\mathcal{W}$ матрицу

$$L=\begin{pmatrix} h & e\\ f & -h\end{pmatrix}\,,\qquad \{e,f,h\}\in\mathrm{End}(V)\,, \tag{2.3}$$

Если оператор e обратим в пространстве $\mathrm{End}(V)$, то отображения $\varrho_{1,2} : \mathcal{W} \to \mathcal{W}'$

$$\varrho_1 : \ L(e,f,h) \to L(e',f',h') = L + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda e^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \tag{2.4}$$

$$\varrho_2 : \ L(e,f,h) \to L(e',f',h') = L + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ -2\lambda h e^{-1} & -\lambda \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

являются внешними автоморфизмами пространства бесконечномерных представлений алгебры $sl(2)$ в пространстве V. Данные отображения $\varrho_{1,2}$ сдвигают спектр оператора Лапласа $\mathbf{\Delta}$ (2.2) по правилу

$$\Delta \to \Delta' = \Delta + \lambda\,, \qquad \text{или} \qquad \Delta \to \Delta' = \Delta + \lambda^2\,. \tag{2.6}$$

Данные автоморфизмы пространства представлений $sl(2)$ мы будем использовать при построении матриц Лакса для конечномерных гамильтоновых интегрируемых систем.

В качестве примера рассмотрим следующее представление $\mathcal{W}$ алгебры $sl(2)$ в классической механике

$$h = \frac{xp}{2}\,, \quad e = \frac{x^2}{2}\,, \quad f = -\frac{p^2}{2}\,, \quad \Delta = 0\,. \tag{2.7}$$

Здесь (x, p) - канонические координаты, так что $\{$p , x$\}$ = 1. В квантовом случае представление $\mathcal{W}$ с обратимым оператором e можно реализовать следующим образом

$$h = x\partial_x - l\,, \quad e = x\,, \quad f = x\partial_x^2 - 2l\partial_x + \frac{f}{x}\,, \quad \Delta' = l(l+1) + f\,. \tag{2.8}$$

Аналогичное представление для систем типа Калоджеро имеет вид

$$h = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{N}(x_k D_k + D_k x_k)\,, \quad e = 2\sum_{k=1}^{N} x_k^2\,, \quad f = -2\sum_{k=1}^{N} D_k^2\,,$$

где x_k - координаты, а D_k - операторы Данкла.

Теперь введем автоморфизмы самого представления $\mathcal{W}$ алгебры $sl(2)$ в форме

$$\tau : \ L(e,f,h) \to L(e',f',h') = M L(e,f,h) M^{-1}\,, \tag{2.9}$$

с подходящей матрицей

$$M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}(e,f,h)\,,\qquad \{e,f,h\}\in \mathrm{End\ V}\,,$$

элементы которой являются функциями операторов $\{e,f,h\}$. Очевидно, отображение τ (2.9) заведомо сохраняет значение оператора Лапласа $\mathbf{\Delta}$ (2.2) и должно сохранять коммутационные соотношения между генераторами $\{e,f,h\}$.

При α, β, γ, $\delta\in\mathbb{C}$ внутренние автоморфизмы представления $\mathcal{W}$ (2.7) отвечают следующей замене координат

$$\mathrm{x}'=\frac{1}{\det M}\left(\alpha\mathrm{x}+\beta\mathrm{p}\ \right),\qquad \mathrm{p}\ '=\frac{1}{\det M}\left(\gamma\mathrm{x}+\delta\mathrm{p}\ \right).\tag{2.10}$$

Для классических интегрируемых систем заданных на орбитах коприсоединенного представления алгебры $sl(2)$ (2.7) автоморфизм τ (2.9) задает интегрируемое отображение или интегрируемую систему с дискретным временем [2–4].

Внешние автоморфизмы бесконечномерного представления $\mathcal{W}$ (2.7) отвечают более сложным отображениям $\tau:\ (\mathrm{x},\mathrm{p}\ )\to(\mathrm{x}',\mathrm{p}\ ')$. Например, для матрицы M вида

$$M=\begin{pmatrix}0 & -1\\ \zeta & \pi\end{pmatrix},\tag{2.11}$$

отображение τ (2.9) является внешним автоморфизмом представления $\mathcal{W}$ (2.7), если

$$\begin{aligned}&\zeta=e\,,\qquad \pi=\lambda-\frac{eh}{2f}-\alpha\,ef^{-1}-\beta\,fe^{-1}\,,\\ &\zeta=h\,,\qquad \pi=\lambda-\alpha\,fh^{-1}-\beta\,hf^{-1}\,,\qquad \lambda\in\mathbb{C}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Более того, для представлений $\mathcal{W}$ с нулевым спином $\Delta=0$ (2.7), отображение τ (2.9) является внешним автоморфизмом при

$$\begin{aligned}&\zeta=e\,,\qquad \pi=\lambda-h\left(\alpha e^{-1}+\beta f^{-1}\right)-h^{-1}\left(\gamma e+\delta f\right)\,,\quad \lambda\in\mathbb{C},\\ &\zeta=h\,,\qquad \pi=\lambda-e\left(\alpha h^{-1}+\beta f^{-1}\right)-e^{-1}\left(\gamma h+\delta f\right)\,,\\ &\zeta=\alpha\,e^{-1}\,,\qquad \pi=\lambda-\frac{h}{2ef}\Big(\beta\,\ln(f)+\gamma\,\ln(e)\Big)\,,\qquad \alpha=\beta-\gamma\,,\\ &\zeta=\alpha\,he^{-1}\,,\qquad \pi=\lambda-\Big(\beta\,\ln(f)+\gamma\,\ln(e)\Big)\,,\qquad \alpha=\beta-\gamma\,.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Конечно, список внешних автоморфизмов представлений алгебры $sl(2)$ не исчерпывается данными автоморфизмами. Далее мы будем использовать внешние автоморфизмы τ вида (2.9) при построении представлений Лакса для интегрируемых систем с дискретным временем.

Заметим так же, что представления с нулевым спином $\Delta = 0$ используются в квантовой конформной теории поля [6] и могут быть связаны с динамическими решениями уравнений отражения для цепочек Тоды отвечающих корневым системам типа $\mathcal{D}_n$ [5, 7].

3. Интегрируемые гамильтоновы системы

Возьмем рациональную функцию вида

$$e(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^{m}(\lambda - \delta_k)}, \quad m \le n, \quad \delta_k \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

где $\{q_j\}$ - координаты в $\mathbb{R}^n$, а $\{\delta_k\}$ - набор произвольных констант. Следуя работе [8], введем диагональную метрику

$$g_{jj}(q_1, \dots, q_n) = \operatorname{Res}|_{\lambda=q_j} \frac{1}{e(\lambda)}, \tag{3.2}$$

и гамильтониан свободного движения

$$H = \sum_{j=1}^{n} g_{jj}(q_1, \dots, q_n) p_j^2 . \tag{3.3}$$

Здесь $\{p_j, q_j\}_{j=1}^{n}$ – набор канонических переменных в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической структурой $\Omega_n = \sum_{j=1}^{n} dp_j \wedge dq_j$ и скобками Пуассона $\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}$. Матрица Лакса $L(\lambda)$ для свободного движения (3.3)

$$L_x(\lambda) = \{H, L\} = [L, A], \tag{3.4}$$

выражается через функцию $e(\lambda)$ и две ее производные по времени $e_x = \{H, e\}$ и $e_{xx} = \{H, \{H, e\}\}$ по правилу

$$\begin{gathered} L(\lambda) = \begin{pmatrix} -e_x/2 & e \\ -e_{xx}/2 & e_x/2 \end{pmatrix}(\lambda) \equiv \begin{pmatrix} h(\lambda) & e(\lambda) \\ f(\lambda) & -h(\lambda) \end{pmatrix}, \\ A(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Спектральная кривая

$$\mathcal{C} = \det(yI - L(\lambda))\,, \qquad \mathcal{C}:\ y^2 = \prod_{k=1}^{2g+1}(\lambda - \lambda_k)$$

рода $g = [(n-1)/2]$ является минимально допустимой кривой для интегрируемых систем в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$. Это означает, что все параметры $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ кривой $\mathcal{C}$ отвечают значениям n независимых интегралов движения. В нашем случае в координатах $\{p_j, q_j\}_{j=1}^n$ интегралы движения равны

$$I_k = \sum_{j=1}^n c_{jk} p_j^2\,, \qquad I_1 = H\,, \tag{3.6}$$

где c_{jk} - элементы матрицы обратной к матрице Штеккеля [8].

Скобки Пуассона для матрицы $L(\lambda)$ (3.5) равны

$$\{\overset{1}{L}(\lambda), \overset{2}{L}(\mu)\} = [r_{12}(\lambda,\mu), \overset{1}{L}(\lambda)] - [r_{21}(\lambda,\mu), \overset{2}{L}(\mu)]\,. \tag{3.7}$$

Здесь $\overset{1}{L}(\lambda) = L(\lambda)\otimes I$ и $\overset{2}{L}(\mu) = I \otimes L(\mu)$ [9]. Для рациональной функции $e(\lambda)$ (3.1) матрицы r_{ij} в (3.7) совпадают с обычной рациональной r-матрицей на алгебре петель $\mathcal{L}(sl(2))$ [10]

$$r_{12}(\lambda,\mu) = \frac{\Pi}{\lambda - \mu}\,, \qquad r_{21}(\lambda,\mu) = \Pi\, r_{12}(\mu,\lambda)\,\Pi\,, \tag{3.8}$$

где Π – оператор перестановки [9].

В общем случае, функция $e(\lambda)$ мероморфна и полностью определяется своими нулями $\{q_j\}_{j=1}^n$, которые дают решение проблемы обращения отображения Абеля [8]. В этом случае r-матрицы в (3.7) являются тригонометрическими или эллиптическими [10].

Таким образом, представление Лакса (3.5) с полюсами в точках $\{\delta_k\}_{k=1}^m$ (3.1) для геодезического движения (3.3) можно отождествить с элементом пополненной алгебры петель $\mathcal{L}(sl(2))$ [10] в фундаментальном представлении. Это позволяет применять внешние автоморфизмы $\varrho_{1,2}$ (2.4)–(2.5) "подстилающей" алгебры Ли $sl(2)$ непосредственно к представлению (3.5) соответствующей алгебры петель.

Действительно, введем семейство матриц в соответствии с отображениями (2.4)–(2.5)

$$L(\lambda) \to L_N(\lambda) = L + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \left[\varphi(\lambda)e^{-1}(\lambda)\right]_N & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

$$L(\lambda) \to L_N(\lambda) = L + \begin{pmatrix} \Big[\varphi(\lambda)\Big]_N & 0 \\ -2\Big[\varphi(\lambda)h(\lambda)e^{-1}(\lambda)\Big]_N & -\Big[\varphi(\lambda)\Big]_N \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Здесь параметрическая функция $\varphi(\lambda)$ – произвольная функция спектрального параметра λ и $[z]_N$ – проекция элемента z на ad^*_R-инвариантные пуассоновы подпространства исходных r-скобок (3.7) [11, 5]. Для рациональной r-матрицы (3.8) данные проекции являются линейными комбинациями тейлоровских проекций

$$[z]_N = \left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} z_k \lambda^k\right]_N \equiv \sum_{k=0}^{N} z_k \lambda^k\,, \tag{3.11}$$

или лорановских проекций [10, 11].

Введем обозначения

$$\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и докажем

Предложение 1. *Отображения* (3.9)–(3.10) *являются автоморфизмами представлений двух r-матричных алгебр вида* (3.7). *При этом отображения $\varrho_{1,2}$* (3.9)–(3.10) *действуют на исходную r-матрицу по правилу*

$$r_{12}^{(N)} = r_{12} + \frac{\left(\Big[\varphi(\lambda)e^{-2}(\lambda)\Big]_N - \Big[\varphi(\mu)e^{-2}(\mu)\Big]_N\right)}{\lambda-\mu}\cdot \sigma_-\otimes\sigma_-\,, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} r_{12}^{(N)} &= r_{12} + \frac{\left(\Big[\varphi(\lambda)e^{-1}(\lambda)\Big]_N - \Big[\varphi(\mu)e^{-1}(\mu)\Big]_N\right)}{\lambda-\mu}\cdot \sigma_3\otimes\sigma_- \\ &\quad - 2\frac{\left(\Big[\varphi(\lambda)h(\lambda)e^{-2}(\lambda)\Big]_N - \Big[\varphi(\mu)h(\mu)e^{-2}(\mu)\Big]_N\right)}{\lambda-\mu}\cdot \sigma_-\otimes\sigma_- \\ r_{21}^{(N)}(\lambda,\mu) &= \Pi\, r_{12}^{(N)}(\mu,\lambda)\,\Pi\,. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Таким образом, интегрируемая система описывающая свободное движение отображается в семейство функционально независимых интегрируемых систем.

Для первого отображения ϱ_1 (3.9) данное утверждение доказано в работе [11]. При доказательстве используется ряд свойств лорановских ad^*_R-инвариантных пуассоновых подпространств для рациональных r-матриц. Общее для всех r-матриц доказательство неизвестно.

Как и прежде n параметров λ_j спектральной кривой $\mathcal{C}_N = \det(yI - L_N(\lambda))$ являются значениями интегралов движения

$$I_k \to I_k^{(N)} = I_k + \sum_{j=1}^{n} c_{jk} U_j(q_j, p_j)\,. \qquad (3.14)$$

Остальные параметры кривой $\mathcal{C}_N$ равны коэффициентам лорановского разложения функции $\varphi(\lambda)$, которые и определяют форму потенциалов U_j (3.14) [8].

Отображения (3.9)–(3.10) одного представления алгебры петель $\mathcal{L}(sl(2))$ в различные представления соответствующей универсальной обертывающей алгебры можно рассматривать как одевающую процедуру. Эта процедура позволяет создавать матрицы Лакса $L'_N(\lambda)$ для бесконечного семейства интегрируемых систем из одной известной матрицы Лакса для движения по геодезическим. При этом отображения (3.9)–(3.10) "одевают" исходную кривую $\mathcal{C}$ минимально допустимого рода $g = [(n-1/2)]$, задающую метрику, для всех потенциальных однородных систем типа Штеккеля на фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ [8]. Данные системы задаются гамильтонианами вида

$$H = \sum_{j=1}^{n} g_{jj}(q_1, \dots, q_n)\left[p_j^2 + U(q_j, p_j)\right]\,. \qquad (3.15)$$

При этом переменные $\{q_j\}_{j=1}^n$ образуют систему ортогональных криволинейных координат в пространстве $\mathbb{R}^n$ [12, 8]. Декартовы координаты $\{\mathrm{x}_j\}_{j=1}^n$ равны коэффициентам в лорановском разложении функции $\sqrt{e(\lambda)}$ [11]. В декартовых координатах гамильтониан (3.15) имеет вид

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{p}_j^2}{2} + V_N(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n, \mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_n)\,,$$

то есть отображения (3.9)–(3.10) сдвигают классический аналог оператора Лапласа $\Delta = \sum_{j=1}^n \mathrm{p}_j^2/2$ в $\mathbb{R}^{2n}$, так же как и в (2.6). Заметим, что автоморфизм ϱ_1 (2.4) приводит в потенциалу $V_N(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)$, который зависит только от координат [5, 8].

В качестве примера выпишем несколько стандартных криволинейных систем координат в плоском пространстве $\mathbb{R}^n$ [13]:

эллиптические координаты при $m = n$ в (3.1)

$$e(\lambda, q_1, \dots, q_n) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^{n}(\lambda - \delta_k)} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{x}_k^2}{\lambda - \delta_k} = \mathcal{B}^2(\lambda, \mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)$$

$$\delta_1 < \mathrm{x}_1 < \delta_2 \dots < \delta_n < \mathrm{x}_n$$

параболические координаты при $m = n - 1$ в (3.1)

$$e(\lambda, q_1, \dots, q_n) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^{n-1}(\lambda - \delta_k)} =$$

$$= \lambda - \mathrm{x}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{x}_k^2}{\lambda - \delta_k} = \mathcal{B}^2(\lambda, \mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n)$$

$$\mathrm{x}_1 < \delta_1 < \mathrm{x}_2 \dots < \delta_{n-1} < \mathrm{x}_n$$

сферические координаты при $m = n + 1$ в (3.1)

$$e(\lambda, q_0, \dots, q_n) = \frac{q_0 \prod_{j=1}^{n}(\lambda - q_j)}{\prod_{k=1}^{n+1}(\lambda - \delta_k)} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\mathrm{x}_k^2}{\lambda - \delta_k} = \mathcal{B}^2(\lambda, \mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_{n+1})$$

По своему определению криволинейные координаты $\{q_j\}$ являются нулями функции $e(\lambda)$, тогда как декартовы координаты $\{\mathrm{x}_j\}$ являются вычетами функции $e(\lambda)$ в полном соответствии с подходом, основанным на применении функции Бейкера–Ахиезера [1]. Все другие ортогональные криволинейные системы координат в плоском пространстве $\mathbb{R}^n$ могут быть получены предельными переходами из данных систем [13]. Более того, все интегрируемые системы с гамильтонианами натурального вида с рациональными потенциалами, допускающие точечное разделение переменных в стандартных криволинейных координатах, могут быть построены в рамках предложенного подхода [8, 14].

4. Интегрируемые отображения

Попробуем построить отображение сохраняющее симплектическую структуру в $\mathbb{R}^{2n}$

$$\tau_\lambda : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n} \tag{4.1}$$

такое что интегралы движения $I_k^{(N)}$ (3.14) будут инвариантны относительно действия τ_λ

$$I_k^{\tau\,(N)} = I_k^{(N)}\,, \qquad \{I_i^{(N)}, I_k^{(N)}\} = 0\,, \qquad i,k = 1,\ldots,n\,.$$

Здесь $f^\tau(z) = f(\tau(z))$ и $I_k^{(N)}$ – интегралы движения для гамильтоновой интегрируемой системы с матрицей Лакса $L_N(\lambda)$ (3.9)–(3.10). Так как $\{I_k^{(N)}\}$ – полный набор интегралов в инволюции, то отображение τ_λ будет описывать интегрируемую систему с дискретным временем. Вообще говоря, такого отображения может не существовать. Но даже если оно и существует, то найти его бывает совсем непросто.

Дискретное уравнение Лакса имеет вид

$$L_N^\tau(\lambda) = M\,L_N(\lambda)\,M^{-1}\,. \tag{4.2}$$

С точки зрения алгебраической геометрии отображение τ_λ задает набор сдвигов (многозначный сдвиг) на якобиане спектральной кривой $\mathcal{C}$ или на его абелевом подмногообразии [2].

С точки зрения теории представлений отображение τ_λ задает автоморфизм представления $L_N(\lambda)$ линейной r-матричной алгебры (рпои). Данный автоморфизм (4.2) сохраняет r-матрицы (3.12)–(3.13)

$$\tau(\lambda):\; r_{12}^{(N)} \to r_{12}^{\tau(N)} = r_{12}^{(N)}\,,$$

которые преобразуются по правилу

$$r_{12}^{\tau(N)} = \overset{1}{M}\,\overset{2}{M}\cdot\left(r_{12}^{(N)} - \{\overset{1}{M}{}^{-1}, \overset{2}{L}\}\overset{1}{M}{}^{-1} + \frac{1}{2}[\,U_{12}\,,\overset{2}{L}\,]\right)\cdot\overset{1}{M}{}^{-1}\,\overset{2}{M}{}^{-1}\,,$$
$$U_{12} = \{\overset{1}{M}{}^{-1}\,,\overset{2}{M}{}^{-1}\}\cdot\overset{1}{M}\,\overset{2}{M}\,. \tag{4.3}$$

Кроме этого, отображение τ_λ (4.2) должно сохранять структуру данного представления (3.5)–(3.9), (3.10).

Для примера рассмотрим интегрируемые системы разделяющиеся в эллиптических $m = n$ (3.1) и сферических координатах $m = n + 1$ (3.1). В декартовых координатах матрица Лакса $L(\lambda)$ (3.1) для свободного движения имеет вид

$$L(\lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda - \delta_j} \begin{pmatrix} -\mathrm{p}_{\,j}\mathrm{x}_j & \mathrm{x}_j^2 \\ -\mathrm{p}_{\,j}^{\,2} & \mathrm{p}_{\,j}\mathrm{x}_j \end{pmatrix} (\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{n} L^{(j)}(\lambda, \mathrm{x}_j, \mathrm{p}_{\,j}), \tag{4.4}$$

где $\epsilon = 1 + n - m = 0, 1$ соответственно. Очевидно, внутренние автоморфизмы (2.9) индуцируют отображения которые всегда сохраняют r-матрицу (3.8), но в общем случае нарушают структуру представления при $m \le n$. В то же время для сферических координат данные автоморфизмы индуцируют отображения типа (2.10).

Таким образом мы видим, что построение искомых интегрируемых отображений τ_λ (4.1) достаточно сложная процедура. Естественно предположить, что автоморфизмы τ_λ могут быть связаны с автоморфизмами τ (2.9) представлений "подстилающей" алгебры Ли $sl(2)$. В данной работе мы докажем, что автоморфизмы алгебры $sl(2)$ действительно позволяют находить интегрируемые системы с дискретным временем.

Подставив матрицу Лакса

$$L_N(\lambda) = \begin{pmatrix} h_N & e_N \\ f_N & -h_N \end{pmatrix} (\lambda)$$

и искомую вторую матрицу Лакса M вида (2.11) в уравнение (4.2) мы получим

$$e_N^\tau(\lambda) = -\zeta^{-1}(\lambda)\, f_N(\lambda).$$

Это эквивалентно отображению

$$\mathrm{x}_j^\tau = \pm\zeta^{-1/2}(\lambda)\,\mathrm{p}_{\,j}\,, \qquad \zeta(\lambda) = \left[\frac{\varphi(\lambda)}{e(\lambda)}\right]_N, \qquad \zeta(\lambda) = -2\left[\frac{\varphi(\lambda)h(\lambda)}{e(\lambda)}\right]_N. \tag{4.5}$$

Напомним, что матрица Лакса (4.4) для свободного движения является элементом пополненной алгебры петель вида $\oplus_{j=1}^n sl(2)$ в фундаментальном представлении. Более того, представления в каждом узле цепочки $L^{(j)}(\lambda, \mathrm{x}_j, \mathrm{p}_{\,j})$ имеют нулевой спин $\Delta = 0$. Поэтому, мы можем попробовать применить автоморфизмы типа (2.13) с подходящим элементом ζ.

В данной работе мы ограничимся изучением второго автоморфизма ϱ_2 (2.5)–(3.10) и еще более упростим выкладки используя свойства инвариантных тейлоровских подпространств (3.11).

Итак, пусть

$$L_1(\lambda)=L(\lambda)+\begin{pmatrix}-\lambda/2 & 0\\ \sum_{j=1}^n \mathrm{p}_j\mathrm{x}_j & \lambda/2\end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

где $L(\lambda)$ задано в (4.4). Данная матрица построена по правилу (3.10). Действительно, положим $\varphi(\lambda)=-\lambda/2$ в (3.10) и используем разложение Лорана в окрестности точки $\lambda=\infty$ отбросив все слагаемые с обратными степенями по λ

$$\begin{aligned}\Big[\varphi(\lambda)\Big]_1 &= \Big[-\lambda/2\Big]_1=-\lambda/2\,,\\ -2\left[\frac{\varphi(\lambda)h(\lambda)}{e(\lambda)}\right]_1 &= \left[\frac{\sum_{j=1}^n \mathrm{p}_j\mathrm{x}_j+O(\lambda^{-1})}{1+\sum_{j=1}^n \mathrm{x}_j^2\lambda^{-1}+O(\lambda^{-2})}\right]_1=\sum_{j=1}^n \mathrm{p}_j\mathrm{x}_j=\\ &= \left[\Big(\sum_{j=1}^n \mathrm{p}_j\mathrm{x}_j+O(\lambda^{-1})\Big)\right]_1=[\phi(\lambda)h(\lambda)]_1\,,\end{aligned}$$

где $\phi(\lambda)=\lambda^{1-n}\prod(\lambda-\delta_k)$. Таким образом, для данной проекции можно использовать более простые автоморфизмы вида (2.9)–(2.11) с элементом $\zeta=h$. Более того, для данной проекции r-матрица (3.13) не зависит от динамических переменных.

Например, при $\alpha=1$ и $\beta=0$ в (2.12) матрица $M_1(\lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned}M_1(\lambda)&=\begin{pmatrix}0 & -1\\ [\phi(\lambda)h(\lambda)]_1 & \left[\phi(\lambda)-\dfrac{f(\lambda)}{h(\lambda)}\right]_1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0 & -1\\ \sum_{j=1}^n \mathrm{p}_j\mathrm{x}_j & \lambda-\frac{\sum_{j=1}^n \mathrm{p}_j^2}{\sum_{j=1}^n \mathrm{p}_j\mathrm{x}_j}\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Дискретное уравнение Лакса (4.2) с матрицами $L_1(\lambda)$ (4.6) и $M_1(\lambda)$ (4.7) отвечает известным интегрируемым отображениям [3, 4]. Для случая эллиптических координат это отображение известно как дискретный аналог системы Гарнье [3, 4]. Для случая сферических координат это отображения является одним из дискретных аналогов задачи Неймана о движении точки на сфере под действием силы с квадратичным потенциалом [3]. Выпишем явно отображение τ_λ для случая эллиптических координат [4]

$$\tau_\lambda : q_j^\tau = \pm \mathrm{p}_j \cdot \left(\sum_{k=1}^n \mathrm{p}_k \mathrm{x}_k \right)^{-1/2},$$
$$\tau_\lambda : p_j^\tau = \mp \mathrm{x}_j \cdot \left(\sum_{k=1}^n \mathrm{p}_k \mathrm{x}_k \right)^{1/2} \pm \mathrm{p}_j \cdot \left(\sum_{k=1}^n \mathrm{p}_k \mathrm{x}_k \right)^{-1/2} \left(\lambda_j - \frac{\sum_{k=1}^n \mathrm{p}_k^2}{\sum_{k=1}^n \mathrm{p}_k \mathrm{x}_k} \right).$$

Заметим, что в работах [3, 4] рассматривалось обратное отображение τ_λ^{-1}. Кроме этого, в работе [3] используются подобные матрицы Лакса и, поэтому, соответствующие r-матрицы преобразуются по правилу (4.3) и зависят от динамических переменных.

Мы доказали, что известные классические интегрируемые отображения [3, 4] связаны с внешними автоморфизмами бесконечномерных представлений (2.9). Более того, используя данные автоморфизмы можно построить обобщения данных систем (2.12)–(2.13) и получить новые системы с дискретным временем. Для решения уравнений движения и в непрерывном, и в дискретном случае можно использовать метод разделения переменных или проинтегрировать задачу в θ-функциях, связанных с гиперэллиптической спектральной кривой $\mathcal{C}$.

Литература

1. E. K. Sklyanin , — *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, **118** (1995), 35–61 .
2. А. П. Веселов , — Успехи Мат. Наук **46** (1991), 3–45 .
3. O. Ragnisco , — Phys. Lett. **A198** (1995), 295–305 .
4. Z. Qiao and R. Zhou , — Phys. Lett. A. **235** (1997), 35–40 .
5. A. V. Tsiganov , *Automorphisms of sl(2) and dynamical r-matrices.* solv--int/9610003, 1996 .
6. L. N. Lipatov , — JETP Lett. **59** (1994), 596 .
7. A. V. Tsiganov , *Dynamical boundary conditions for integrable lattices.* solv--int/9801004, 1998 .
8. A. V. Tsiganov , *The Stäckel systems and algebraic curves.* solv-int/9712003, 1997 .
9. L. D. Faddeev and L. A. Takhtajan , *Hamiltonian methods in the theory of solitons.* Springer, Berlin, 1987 .
10. A. G. Reyman and M. A. Semenov-Tian Shansky , *Group Theoretical Methods in the theory of Finite-Dimensional Integrable systems.*. In V. I. Arnold and S. P. Novikov, editors, *Dynamical systems VII*, volume EMS 16, Berlin, 1993. Springer .
11. P. P Kulish, S. Rauch-Wojciechowski, and A. V. Tsiganov , — J. Math. Phys. **37** (1995), 3365 .
12. J. C. Eilbeck, V. Z. Enolskii, V. B. Kuznetsov, and A. V. Tsiganov , — J. Phys. **A27** (1994), 567–578 .

13. E. G. Kalnins , *Separation of Variables for Riemann Spaces of Constant Curvature.* Longman Scientific & Technical, Pitman Monographs and Surveys in pure and Applied Mathematics, New York, 1986 .
14. E. G. Kalnins, S. Benenti and W. Miller, Jr. , — J.Math.Phys. **38** (1997), 2345 .

Tsiganov A. V. Classical integrable systems amd automorphisms of representations of $SL(2)$.

Outer automorphisms of infinite-dimensional representations of $sl(2)$ algebra are applied to produce some classical integrable systems with continuous and discrete time. The associated Lax pairs and r-matrix algebras are constructed.

Научно-исследовательский
институт физики,
Санкт-Петербургский
Государственный Университет

Поступило 15 октября 1998 г.