Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

В. А. Залгаллер

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ ВЫПУКЛЫХ ТЕЛ

Семейство выпуклых компактов $\Phi(\Lambda)$ в $\mathbb{R}^n$, зависящих от параметра Λ, который принимает значения в выпуклом множестве линейного пространства, называется *вогнутым семейством* (см. [1], п. 24), если для любых Λ_1, Λ_2 и любого $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ выполняется включение

$$\Phi((1-\theta)\Lambda_1 + \theta\Lambda_2) \supset (1-\theta)\Phi(\Lambda_1) + \theta\Phi(\Lambda_2).$$

Теорема. *Пусть в $\mathbb{R}^n$ фиксированы два непустых выпуклых компакта K_0, K_1. Будем подвергать компакт K_1 параллельным переносам на вектора $r \in \mathbb{R}^n$. Тогда множество D тех $r \in \mathbb{R}^n$, для которых пересечение $\Phi(r) := K_0 \cap (K_1 + r)$ непусто, есть выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$, а семейство выпуклых компактов $\Phi(r)$, зависящих от параметра $r \in D$, является вогнутым семейством.*

Доказательство. 1. Пусть $r_1, r_2 \in D$. Тогда существуют точки

$$x \in \Phi(r_1) = K_0 \cap (K_1 + r_1), \qquad y \in \Phi(r_2) = K_0 \cap (K_1 + r_2).$$

При этом $x = x_1 + r_1$, $y = y_1 + r_2$, где $x_1, y_1 \in K_1$. Тогда при любом $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ непусто множество $\Phi((1-\theta)r_1 + \theta r_2)$, поскольку ему заведомо принадлежит точка $z = (1-\theta)x + \theta y$. Действительно, $z \in K_0$ по выпуклости K_0 и $z \in K_1 + (1-\theta)r_1 + \theta r_2$ ввиду $z = z_1 + (1-\theta)r_1 + \theta r_2$, где $z_1 := (1-\theta)x_1 + \theta x_2 \in K_1$ по выпуклости K_1. Это доказывает выпуклость множества D.

2. Пусть $r_1, r_2 \in D$ и пусть фиксировано $\theta \in [0,1]$. Рассмотрим множество $(1-\theta)\Phi(r_1) + \theta\Phi(r_2)$. Каждая его точка z по определению сложения выпуклых множеств представима в виде $z = (1-\theta)x + \theta y$, где $x \in \Phi(r_1)$, $y \in \Phi(r_2)$. По только что доказанному такая точка $z \in \Phi((1-\theta)r_1 + \theta r_2)$. Поэтому

$$\Phi((1-\theta)r_1 + \theta r_2) \supset (1-\theta)\Phi(r_1) + \theta\Phi(r_2),$$

что доказывает вогнутость семейства $\Phi(r)$ при изменении параметра r в множестве D. $\square$

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96-01-681.

Доказанная теорема интересна своими следствиями.

Следствие 1. Ввиду неравенства Брунна–Минковского (см. [1] п. 48) при любых $r_1, r_2 \in D$ для тела

$$\Phi_\theta := (1-\theta)\Phi(r_1) + \theta\Phi(r_2)$$

справедливо

$$\sqrt[n]{\operatorname{Vol}\Phi_\theta} \geqslant (1-\theta)\sqrt[n]{\operatorname{Vol}\Phi(r_1)} + \theta\sqrt[n]{\operatorname{Vol}\Phi(r_2)}, \tag{1}$$

где в случае $\dim\Phi(r_1) = \dim\Phi(r_2) = n$ равенство наступает только тогда, когда $\Phi(r_1)$ и $\Phi(r_2)$ гомотетичны. Но согласно нашей теореме

$$\Phi((1-\theta)r_1 + \theta r_2) \supset \Phi_\theta, \tag{2}$$

поэтому *функция* $\sqrt[n]{\operatorname{Vol}\Phi(r)}$ *есть вогнутая функция в* D. Отсюда следует, что множества

$$E(t) := \{r \in D \mid \operatorname{Vol}\Phi(r) \geqslant t\}$$

выпуклы (или пусты). В частности, в случае $\dim K_0 = \dim K_1 = n$ выпукло непустое множество $d \subset D$ тех r, при которых $\operatorname{Vol}\Phi(r)$ достигает максимума. *В этом случае для всех* $r \in d$ *тела* $\Phi(r)$ *одинаковы с точностью до параллельного переноса.* Последнее вытекает из условия равенства в (1). Пример, когда множество d не сводится к одной точке: случай, когда тело K_1 свободно переносимо параллельно внутри тела K_0; другой пример, когда K_0 – выпуклая n-мерная плитка больших размеров и небольшой толщины 1, а K_1 – шар диаметра 2.

Следствие 2. Ввиду доказанного А. Д. Александровым (см. [2] § 4) обобщения неравенства Брунна–Минковского, для любого $1 \leqslant \nu \leqslant n-2$ и любых непустых выпуклых множеств $C_1, \ldots, C_\nu$ имеет место неравенство для смешанных объемов:

$$\begin{aligned}\sqrt[n-\nu]{V(\Phi_\theta, \ldots, \Phi_\theta, C_1, \ldots, C_\nu)} &\geqslant \\ \geqslant (1-\theta)\sqrt[n-\nu]{V(\Phi(r_1), \ldots, \Phi(r_1), C_1, \ldots, C_\nu)} &+ \\ + \theta\sqrt[n-\nu]{V(\Phi(r_2), \ldots, \Phi(r_2), C_1, \ldots, C_\nu)}&. \end{aligned} \tag{3}$$

При $\nu = n-1$ в (3) всегда имеет место равенство из-за линейности смешанного объема по одному отдельному аргументу.

Ввиду включения (2) и монотонности смешанного объема по включению отсюда следует, что функция

$$f(r) = \sqrt[n-\nu]{V(\Phi(r),\ldots,\Phi(r),C_1,\ldots,C_\nu)}$$

является в D вогнутой функцией при каждом $\nu = 1,\ldots,n-1$. В частности, когда каждое из множеств $C_1,\ldots,C_\nu$ есть стандартный единичный шар в $\mathbb{R}^n$, то функция $f^{n-\nu}(r)$ это не что иное, как ν-ая интегральная поперечная мера $W_\nu(r)$ компакта $\Phi(r)$.

Из вогнутости $f(r)$ следует, что множества

$$E(t) := \{r \in D \mid f^{n-\nu}(r) \geqslant (t)\}$$

выпуклы (или пусты). Но тогда у функции $f^{n-\nu}(r)$ локальный максимум является и глобальным, и множество d тех $r \in D$, при которых этот максимум достигается, выпукло. Однако на этот раз для различных $r_1, r_2 \in d$ тела $\Phi(r_1)$ и $\Phi(r_2)$ не обязаны отличаться только параллельным переносом.

Следствие 3. Какой бы из характеристик пересечения $K_0 \cap (K_1 + r) = \Phi(r)$: объему, $(n-1)$-площади $A(r) = nW_1(r)$ границы, любой интегральной поперечной мере $W_\nu(r)$, упомянутому выше смешанному объему $f^{n-\nu}(r)$ мы бы ни хотели придать максимум за счет выбора параллельного переноса r компакта K_1, можно пользоваться тем, что каждая стационарная точка этой функции от r является точкой ее глобального максимума, и потому его численный поиск можно вести градиентными методами, не опасаясь придти к точке, отличной от точки абсолютного максимума.

Примеры. 1. Пусть K_0, K_1 – равносторонние треугольники, рис. 1. Максимум площади пересечения $\Phi(r) = K_0 \cap (K_1 + r)$ достигается в единственном положении: при совмещении центров тяжести треугольников K_0, K_1 максимум периметра фигуры $\Phi(r)$ достигается в этом и во многих других положениях, при которых форма $\Phi(r)$ различна, а периметры одинаковы.
2. Пусть K_0, K_1 – вытянутые равнобедренные треугольники, рис. 2. На этот раз максимум площади фигуры $\Phi(r)$ тоже достигается только при совмещении центров тяжести треугольников K_0, K_1, а максимум периметра $\Phi(r)$ – в единственном, но совсем другом положении: при совмещении высот треугольников.

Обобщение на случай нескольких тел. Пусть в $\mathbb{R}^n$ фиксированы выпуклые компакты $K_0, K_1, \ldots, K_m$, и мы, сохраняя K_0

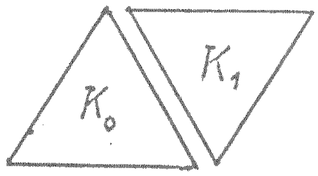

Рис. 1

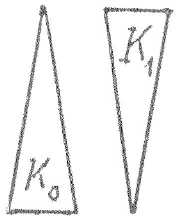

Рис. 2.

на месте, подвергаем компакты $K_1, \dots, K_m$ независимым параллельным переносам на вектора $r_1, \dots, r_m$. Каждый упорядоченный набор $r_1, \dots, r_m$ будем рассматривать как единый вектор $\rho = (r_1, \dots, r_m)$ линейного пространства $\mathbb{R}^{nm} = \mathbb{R}^n_1 \times \ldots \times \mathbb{R}^n_m$. Обозначим $\Phi(\rho) := K_0 \bigcap\limits_{i=1}^{m} (K_i + r_i)$.

Теорема. *Множество $D \subset \mathbb{R}^{mn}$ тех ρ, для которых $\Phi(\rho)$ непусто, выпукло в $\mathbb{R}^{mn}$. Семейство выпуклых компактов $\Phi(\rho)$, зависящих от параметра $\rho \in D$, является вогнутым семейством. Значения $\sqrt[n]{\operatorname{Vol}\Phi(\rho)}$ являются вогнутой функцией в D.*

Доказательство. Пусть $\rho_1 = (r_{11}, \dots, r_{m1}) \in D$ и $\rho_2 = (r_{12}, \dots, r_{m2}) \in D$. Тогда существуют точки $x, y \in K_0$, допускающие представления

$$x = x_i + r_{i1}, \quad y = y_i + r_{i2}; \quad x_i, y_i \in K_i; \quad i = 1, \dots, m.$$

Ввиду выпуклости компакта K_0 ему при любом $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ принадлежит точка $z = (1-\theta)x + \theta y$, допускающая представления

$$z = z_i + (1-\theta)r_{i1} + \theta r_{i2},$$

где $z_i = (1-\theta)x_i + \theta y_i \in K_i$, а $(1-\theta)r_{i1} + \theta r_{i2}$ суть составляющие вектора $(1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2 \in \mathbb{R}^{nm}$. Это доказывает выпуклость D в $\mathbb{R}^{nm}$. Из доказанного следует также, что

$$\Phi((1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2) \supset (1-\theta)\Phi(\rho_1) + \theta\Phi(\rho_2), \tag{4}$$

т.е. вогнутость семейства $\Phi(\rho)$, $\rho \in D$.

Наконец, из теоремы Брунна–Минковского следует вогнутость функции $\sqrt[n]{\operatorname{Vol}\Phi(\rho)}$ в D. $\square$

Из вогнутости $\sqrt[n]{\operatorname{Vol}\Phi(\rho)}$ в D следует, что либо $\operatorname{Vol}\Phi(\rho)\equiv 0$ в D, либо $\operatorname{Vol}\Phi(\rho)>0$ в $\operatorname{int}D$. Если каждый из выпуклых компактов K_i, $i=0,\dots,m$, был n-мерным, то возможна только вторая альтернатива. В этом случае множество $d\subset D$ тех ρ, при которых достигается $\max\operatorname{Vol}\Phi(\rho)$, выпукло, а все $\Phi(\rho)$ при $\rho\in d$ одинаковы с точностью до параллельного переноса. Верно и следствие 2: в частности, при $1\leqslant\nu\leqslant n-1$ для каждой интегральной поперечной меры W_ν функция $\sqrt[n-\nu]{W_\nu(\Phi(\rho))}$ вогнута в D. Каждая из функций $W_\nu(\Phi(\rho))$ достигает максимума на своем выпуклом множестве $d_\nu\subset D$, но формы компактов $\Phi(\rho)$ при $\rho\subset d_\nu$ могут быть различными, но для W_ν только в случае $\nu=n-1$.

Вырождение по размерности. Если хоть один из компактов K_i (мы, конечно, считаем их непустыми) имел пониженную размерность, то $\operatorname{Vol}_n\Phi(\rho)\equiv 0$. Обозначим $k=\max\dim\Phi(\rho)$ по всем $\rho\in D$; $k\leqslant\min\dim K_i$. Случай $k=0$ не интересен, и мы далее считаем $k\geqslant 1$.

Обозначим D_k множество тех $\rho\in D$, для которых $\dim\Phi(\rho)=k$. Для всех $\rho\in D_k$ аффинные оболочки $\operatorname{aff}\Phi(\rho)$ суть k-мерные плоскости в $\mathbb{R}^n$, параллельные одному и тому же подпространству $\mathbb{R}^k\subset\mathbb{R}^n$. Действительно, если бы при $\rho_1,\rho_2\in D_k$ аффинные оболочки $\Phi(\rho_1)$ и $\Phi(\rho_2)$ не были параллельны, то в силу (4) у $\Phi\left(\frac{1}{2}\rho_1+\frac{1}{2}\rho_2\right)$ была бы размерность $>k$, что противоречит выбору k.

Пусть $\pi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ ортогональная проекция. При $\rho\in D_k$ проектирование $\Phi(\rho)\to\pi(\Phi(\rho))$ является параллельным переносом выпуклого компакта $\Phi(\rho)$, не влияющим ни на его объем, ни на интегральные поперечные меры, ни на смешанные объемы с участием $\Phi(\rho)$. Множество D_k выпукло, а семейство $\pi(\Phi(\rho))$ – вогнутое семейство k-мерных выпуклых тел в $\mathbb{R}^k$, зависящее от параметра $\rho\in D_k$.

Для семейства $\pi(\Phi(\rho))$, $\rho\in D_k$ в $\mathbb{R}^k$ верны все утверждения предыдущего пункта с заменой n на k. В частности, $\sqrt[k]{\operatorname{Vol}_k\pi(\Phi(\rho))}=\sqrt[k]{\operatorname{Vol}_k\Phi(\rho)}$ есть вогнутая функция в D_k, и те $\Phi(\rho)$, для которых $\operatorname{Vol}_k\Phi(\rho)$ достигает максимума, различаются друг от друга только параллельным переносом. Область $D_k=\operatorname{int}D$. В случае $k>1$ при любом $1\leqslant\nu\leqslant k-1$ вогнута в D функция $\sqrt[k-\nu]{W_\nu(\Phi(\rho))}$; здесь W_ν есть ν-я интегральная поперечная мера тела $\Phi(\rho)$ в $\operatorname{aff}\Phi(\rho)$.

Литература

1. T. Bonnesen, W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*. Berlin, Springer, 1934.
2. А. Д. Александров, *К теории смешанных объемов выпуклых тел. II. Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения.* — Матем. сб. **2, No. 6** (1937), 1205–1238.

Zalgaller V. A. On intersections of convex bodies.

Let $K_0, K_1, \dots, K_m$ be nonempty convex bodies in $\mathbb{R}^n$. Let $r_1, \dots, r_m$ be vectors in $\mathbb{R}^n$, $\rho = (r_1, \dots, r_m) \in \mathbb{R}^{nm}$. Then the set $D = \{\rho \mid \Phi(\rho) = K_0 \cap \bigcap_{i=1}^{m} (K_i + r_i) \neq \varnothing\}$ is convex in $\mathbb{R}^{nm}$, and the family of sets $\{\Phi(\rho) \mid \rho \in D\}$ is concave. Let $k = \max_{\rho} \dim \Phi(\rho) \geqslant 1$. Then for the volume $\operatorname{Vol}_k \Phi(\rho) = W_0(\Phi(\rho))$ and for all mean cross-sectional measures $W_\nu(\Phi(\rho))$, $\nu = 0, 1, \dots, k-1$, the function $\sqrt[k-\nu]{W_\nu(\Phi(\rho))}$ is concave on the set D.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 2 марта 1998 г.