Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

В. А. Залгаллер

РАЗДЕЛЯЮЩИЙ ШАРОВОЙ СЛОЙ С МАКСИМАЛЬНЫМ ОТНОШЕНИЕМ РАДИУСОВ

§1

Пусть в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, фиксированы компакт A, содержащий более одной точки, и непустой компакт B. Точку $x \in \mathbb{R}^n$ назовем *допустимой*, если наименьший содержащий A замкнутый n-мерный шар $d(x)$ с центром x не содержит точек компакта B. Предполагается, что A и B таковы, что множество M допустимых точек непусто. Если $x \in M$, то существует наибольшая сфера $Q(x)$ с центром x, внутри которой нет точек B. Сфера $Q(x)$ и граничная сфера $q(x)$ шара $d(x)$ ограничивают шаровой слой, разделяющий компакты A и B, причем на $q(x)$ и $Q(x)$ имеются соответственно точки из A и из B. Такой шаровой слой $K(x)$ назовем *допустимым*. Радиусы $r(x)$ и $R(x)$ его граничных сфер различны, и $R(x)/r(x) > 1$. Допустимый шаровой слой $K(x_0)$ назовем *экстремальным*, если для него отношение радиусов максимально:

$$\frac{R(x_0)}{r(x_0)} = \sup_{x \in M} \frac{R(x)}{r(x)}.$$

Ниже, в теореме 2, дан необходимый и достаточный признак экстремального шарового слоя. Настоящая статья отвечает на вопрос, поставленный (при $n = 2$) перед автором А. Ю. Солыниным.

Теорема 1. *В $\mathbb{R}^n$ при непустом множестве M допустимых точек экстремальный шаровой слой существует и единственен.*

Справедливость теоремы вытекает из следующих четырех утверждений. 1) *Множество M выпукло и открыто.* 2) *Функция $R(x)/r(x)$ непрерывна на M.* 3) *Если существует $x_1 \in M$ с $R(x_1)/r(x_1) = t$, то множество $E(t) = \{x \in M \mid R(x)/r(x) \geqslant t\}$ компактно.* 4) *Если для двух различных точек $x_1, x_2 \in M$ значения*

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96-01-681.

$R(x_1)/r(x_1)$ и $R(x_2)/r(x_2)$ одинаковы (обозначим их t), то для любой внутренней точки отрезка x_1x_2 значение $R(x)/r(x) > t$.

Докажем последовательно эти четыре утверждения.

1) Пусть $x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$. Шары $d(x_1)$ и $d(x_2)$ имеют непустое пересечение: они оба содержат A. Кроме того один из этих шаров не может содержаться строго внутри другого. Поэтому пересекаются и сферы $q(x_1)$, $q(x_2)$. Пересечение последних будет некоторой сферой S^{n-2}. Для любой точки x открытого отрезка (x_1, x_2) сфера $S^{n-1}(x)$ с центром x, проходящая через S^{n-2}, охватывает компакт A, отделяя его от B. Поэтому $x \in M$, значит M выпукло. Пусть $x_0 \in M$ и $R(x_0) - r(x_0) = 3\varepsilon > 0$. Тогда при $|x - x_0| < \varepsilon$ сфера с центром x и рудиусом $\rho = (R(x_0) + r(x_0))/2$ строго разделяет A и B. Значит ε-окрестность точки x_0 принадлежит M, и M открыто. $\square$

2) Обозначим $\varphi : M \to \mathbb{R}$ функцию, определенную равенством $\varphi(x) = R(x)/r(x) > 1$. Пусть $1 < t_1 < t_2$. Легко проверить, что прообраз $\varphi^{-1}(t_1, t_2)$ либо пуст, либо открыт в M. Значит функция φ непрерывна. $\square$

3) Пусть $x_1 \in M$, $R(x_1)/r(x_1) = t > 1$. Зафиксируем сферу S_1^{n-1} с центром x_1 столь большого радиуса ρ_1, что она охватывает и A, и B. Затем выберем другую сферу S_2^{n-1} с тем же центром x_1 настолько большого радиуса ρ_2, что отношение

$$\frac{y + \rho_1}{y - \rho_1} < t \quad \text{при} \quad y > \rho_2.$$

Тогда ни одна точка множества $E(t)$ не может лежать вне области, охваченной сферой S_2^{n-1}. Значит $E(t)$ ограничено. Кроме того оно, ввиду 2), замкнуто. Поэтому $E(t)$-компакт. $\square$

4) Пусть $x_1, x_2 \in M$, $x_1 \neq x_2$, $R(x_1)/r(x_1) = R(x_2)/r(x_2) = t > 1$, и пусть для определенности $r(x_1) = r_1 \leqslant r_2 = r(x_2)$. Шары $d(x_1)$ и $d(x_2)$ пересекаются, причем включение $d(x_1) \subset d(x_2)$ невозможно: иначе на $Q(x_1)$ не было бы точек из B. Значит сфера $S_1^{n-2} = q(x_1) \cap q(x_2)$ имеет ненулевой радиус. Сфера $Q(x_1)$ не может лежать строго внутри $Q(x_2)$, поэтому $Q(x_1) \cap Q(x_2)$ есть некоторая сфера S_2^{n-2} (возможно нулевого радиуса).

Проведем через точки x_1, x_2 двумерную плоскость P и рассмотрим в плоскости P точки $C_1 \in q(x_1) \cap q(x_2) \cap P$ и $C_2 \in Q(x_1) \cap Q(x_2) \cap P$, рис. 1. Для точек C_1, C_2 точки x_1, x_2 лежат на "окружности Аполлония" Γ, составленной из всех точек $x \in P$, для которых $C_2x/C_1x = t$. Окружность Γ ограничивает строго выпуклый круг, внутри которого $C_2x/C_1x > t$. Поэтому шаровой слой с центром x, произвольно выбранным внутри отрезка x_1x_2, и радиусами xC_1, xC_2 разделяет компакты A и B. Для него $C_2x/C_1x > t$. Тем более для допустимого шарового слоя с этим центром x будет $R(x)/r(x) > t$. □

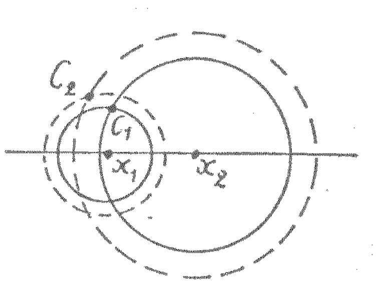

Рис. 1.

Утверждение теоремы 1 о существовании экстремального шарового слоя следует из 2) и 3), а его единственность – из 4). □

Теорема 2. *Для того, чтобы в $\mathbb{R}^n$ шаровой слой $K(x_0)$ был экстремальным для компактов A, B, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных набора точек $A' \subset (q(x_0) \cap A)$ и $B' \subset (Q(x_0) \cap B)$, каждый из не более чем $n+1$ точек, такие, что $K(x_0)$ экстремальный слой для компактов A', B'.*

1. Достаточность. Пусть слой $K(x_0)$ допустимый для A, B и экстремальный для A', B'. При переходе от A', B' к более широким A, B множество M допустимых точек разве лишь сокращается, а для каждой точки $x \in M$, оставшейся допустимой, отношение $R(x)/r(x)$ разве лишь уменьшается. □

2. Необходимость мы докажем сначала для компактов A, B, состоящих каждый лишь из конечного числа точек. При этом станут геометрически ясными свойства тех "небогатых" множеств A', B', о которых идет речь в теореме 2. Затем будет использован предельный переход.

3. Когда фиксировано отношение $R/r > 1$, то для каждых двух точек $a, b \in \mathbb{R}^n$ геометрическим место точек x, для которых

$$\frac{|x-b|}{|x-a|} = \frac{R}{r}$$

является сфера. Точка a лежит внутри нее. Будем обозначать ограниченный этой сферой n-мерный открытый шар $D(a, b)$, а его замыкание $\bar{D}(a, b)$. В $D(a, b)$ отношение $|x-b|/|x-a|$ больше, чем R/r.

4. Пусть компакты A, B состоят каждый из конечного числа точек, и шаровой слой $K(x_0)$ экстремален для A, B. Пересечение $q(x_0) \cap A$ состоит из конечного множества точек $\{a_i\}$, а пересечение $Q(x_0) \cap B$ – из конечного множества точек $\{b_j\}$.

Для каждой пары a_i, b_j рассмотрим свой шар $D(a_i, b_j)$, на границе которого расстояние до b_j относится к расстоянию до a_i как $R(x_0)/r(x_0)$. Границы всех этих шаров проходят через центр x_0 слоя $K(x_0)$.

Пересечение открытых шаров $D(a_i, b_j)$ по всем парам a_i, b_j обязано быть пустым. Действительно, если бы существовала точка $p \in \bigcap_{i,j} D(a_i, b_j)$, то каждому из шаров $D(a_i, b_j)$, в силу его выпуклости, принадлежал бы открытый отрезок (x_0, p). Тогда, сдвигая центр шарового слоя $K(x)$ ничтожно мало из точки x_0 в направлении точки p, мы получили бы допустимый слой $K(x)$, у которого $R(x)/r(x) > R(x_0)/r(x_0)$, что противоречит экстремальности $K(x_0)$. (В возможности такого сдвига играет роль конечность числа точек в A и B.)

5. Выберем из шаров $D(a_i, b_j)$ наименьший по количеству набор шаров $D(a_{i_k}, b_{j_k})$, для которого $\bigcap_k D(a_{i_k}, b_{j_k}) = \varnothing$. Количество шаров в этом наборе не менее двух, но и не более $n+1$. Действительно, если бы шаров было не менее $n+1$ и каждый набор из $n+1$ шара имел общую точку, то согласно теореме Хелли [1, стр. 11], общая точка была бы и у всех шаров $D(a_i, b_j)$, что исключено. (Здесь снова играет роль конечность множеств A и B и выпуклость шаров.)

Включим в множество A' только точки a_{i_k}. Некоторые из них могли участвовать не в одной паре a_{i_k}, b_{j_k}, поэтому их может быть даже меньше, чем пар i_k, j_k. Аналогично B' образуем из точек b_{j_k}, их тоже разве лишь меньше, чем пар i_k, j_k. Экстремальный для A, B слой $K(x_0)$ остается допустимым для A', B'.

6. Убедимся, что слой $K(x_0)$ экстремален и для A', B'. Действительно, каждая точка $x \in M(A', B')$, отличная от x_0, лежит строго вне замыкания одного из шаров $D(a_{i_k}, b_{j_k})$. Тогда для соответствующих этому шару точек a_{i_k}, b_{j_k} и радиусов $R(x)$, $r(x)$ допустимого для A', B' слоя с центром x имеем

$$\frac{R(x)}{r(x)} \leqslant \frac{|x - b_{j_k}|}{|x - a_{i_k}|} < \frac{R(x_0)}{r(x_0)}.$$

Теорема 2 доказана для любых компактов A, B с конечным числом точек.

7. Обратимся к общему случаю, когда в A, B может быть бесконечно много точек. Рассмотрим последовательность разбиений пространства $\mathbb{R}^n$ на кубы с ребром 2^{-m} $(m = 1, 2, \ldots)$. При каждом m выберем в A и B конечные подмножества A_m, B_m так, что в каждом замкнутом кубе W m-го разбиения с непустым $W \cap A$ есть хоть одна точка из A_m, и в каждом W с непустым $W \cap B$ есть хоть одна точка из B_m, причем $A_{m+1} \supset A_m$, $B_{m+1} \supset B_m$. Экстремальные шаровые слои K_m для пар A_m, B_m будут сходиться к экстремальному шаровому слою для A, B.

Применяя теорему 2 к парам конечных компактов A_m, B_m, заключаем, что при каждом m существует не более $n+1$ точек $\{a_i^m\} = A'_m \subset A_m$ и точек $\{b_j^m\} = B'_m \subset B_m$ таких, что K_m есть экстремальный шаровой слой для A'_m, B'_m.

8. Пусть $l \leqslant n+1$ наименьшее число, при котором среди пар A'_m, B'_m есть бесконечная подпоследовательность таких, что для каждой из них существует набор из l шаров $D(a_{i_k}^m, b_{j_k}^m)$ с пустым пересечением. Из этой подпоследовательности можно выбрать подпоследовательность, для которой при $m \to \infty$ существуют предельные точки $a_{i_k}^m \to a_{i_k}$, $b_{j_k}^m \to b_{j_k}$. Тогда для A, B существуют утверждаемые в теореме 2 множества $A' \subset \{a_{i_k}\}$, $B' = \{b_{j_k}\}$ из не более чем $l \leqslant n+1$ точек каждое.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Множество A' обязано содержать не менее двух точек. Действительно, если $A' = a$, то пересечение всех шаров $D(a, b_j)$ не может быть пустым: всем им принадлежит точка a.

Пример. В качестве простейшего примера найдем центр x_0 экстремального шарового слоя в случае предельно бедных множеств A и B, т.е. когда A состоит всего из двух точек a_1, a_2, а B – из одной точки b.

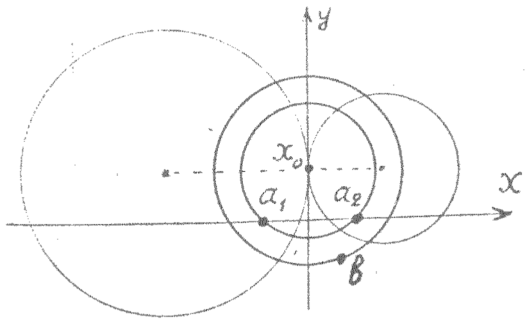

Рис. 2.

Если точка b принадлежит отрезку $[a_1, a_2]$, то множество M допустимых точек пусто. Если b лежит на прямой a_1a_2 вне $[a_1, a_2]$, то центр x_0 лежит в середине отрезка $[a_1, a_2]$. Если b лежит вне прямой a_1, a_2, то точки a_1, a_2, b лежат в некоторой двумерной плоскости P. Введем на P декартовы координаты (x, y) так, что координаты этих точек $a_1(-u, 0)$, $a_2(u, 0)$, $b(v, -w)$, $u > 0$, $v \geqslant 0$, $w > 0$, рис. 2. Центр x_0 обязан лежать на оси y, притом в верхней полуплоскости. Его координата $y > 0$ находится из требования $R^2/r^2 = \max$, т.е.

$$\frac{(y+w)^2 + v^2}{y^2 + u^2} = \max,$$

откуда

$$y = \frac{v^2 + w^2 - u^2}{2w} + \sqrt{\left(\frac{v^2 + w^2 - u^2}{2w}\right)^2 + u^2},$$

Рис. 2 соответствует случаю $u = 5$, $v = 3$, $w = 4$. В этом случае $y = 5$, $R^2 = 90$, $r^2 = 50$. На рис. 2, кроме кругов с центром x_0 и радиусами $R(x_0)$, $r(x_0)$, изображены тонкой линией две проходящие через x_0 и касающиеся в этом экстремальном случае внешним образом окружности, являющиеся границами кругов $D(a_1, b) \cap P$ и $D(a_2, b) \cap P$.

§2

Обратимся к вопросу о разделяющем шаровом слое с максимальным отношением радиусов для компактов A, B в пространстве Лобачевского H^n и в сферическом пространстве S^n. Как и выше считаем, что компакт A содержит не менее двух точек, компакт B непуст, и множество M допустимых разделяющих шаровых слоев непусто.

Предварительно надо изучить аналоги окружности Аполлония в H^2 и S^2. Это сделано в работе [2]. Как там доказано аналог Γ окружности Аполлония на плоскости Лобачевского всегда является аналитической строго выпуклой кривой. Поэтому верна

Теорема 3. *Для компактов $A, B \subset H^2$ справедливы доказанные выше для компактов в $\mathbb{R}^n$ теоремы* 1 *и* 2.

Доказательства не требует изменений. Только шары $D(a_i, b_j)$ заменяются на области, ограниченные поверхностью вращения соответствующей кривой Γ, построенной в плоскости H^2, которая проведена через точки a_i, b_j, x_0.

В пространстве S^n ситуация существенно иная.

Начнем с замечания, что у каждого шара в пространстве S^n есть два (диаметрально противоположные в S^n) центра. Для разделяющих компакты A и B шаровых слоев мы всегда имеем в виду тот из центров, при котором A лежит внутри шара. И именно от этого центра x отсчитываются радиусы $r(x)$ и $R(x)$.

Главная особенность связана со следующим обстоятельством. Пусть на сфере S^2 радиуса ρ фиксированы точки a, b на расстоянии $p\rho$ друг от друга, $0 < p < \pi$, и фиксировано число $t > 1$. Кривая Γ, состоящая из точек $x \in S^2$, для которых $|bx|/|ax| = t$, лежит в открытой полусфере, охватывает в этой полусфере точку a, но при некоторых значениях p и t может ограничивать в этой полусфере, как показано в [2], невыпуклое множество $D(a, b, t)$. В связи с этим не проходят рассуждения, использованные при доказательстве теорем 1 и 2. И это не случайно. Как показано в [2] *для некоторых компактов $A, B \subset S^n$ могут существовать два различных экстремальных разделяющих шаровых слоя с разными центрами x_1, x_2 и одинаковыми максимальными отношениями $R(x_1)/r(x_1) = R(x_2)/r(x_2)$.*

Однако, при $t \geqslant 2$ области $D(a, b, t)$, как доказано в [2], обязательно строго выпуклы. Это позволяет доказать следующее.

Теорема 4. *Если в пространстве S^n для рассматриваемых компактов A, B существует хотя бы один допустимый разделяющий шаровой слой с отношением радиусов $R(x)/r(x) \geqslant 2$, то для этих компактов верны утверждения теорем 1 и 2.*

Доказательство существования экстремального слоя упрощается компактностью пространства S^n. Единственность экстремального слоя, как и при доказательстве теоремы 1, вытекает из выпуклости кривой Γ при $t \geqslant 2$.

При доказательстве аналога теоремы 2 нельзя механически повторить доказательство этой теоремы в $\mathbb{R}^n$, поскольку в S^n не имеет места теорема Хелли. Кроме того на S^2 кривая $\Gamma(a,b,t)$, вообще говоря аналитическая, при особом значении $t = \frac{\pi}{\pi - p}$ приобретает одну единственную точку, в которой нарушается аналитичность. Эта точка оказывается угловой на Γ и лежит на S^2 диаметрально противоположно точке b.

Поэтому доказательство аналога теоремы 2 приходится несколько изменить в его пунктах 4 и 5. На этот раз для каждой пары точек $a_i \in q(x_0) \cap A$, $b_j \in Q(x_0) \cap B$ аналогом шара $D(a_i, b_i)$ является область в S^n, ограниченная "поверхностью вращения" соответствующей кривой Γ, построенной для точек a_i, b_j и $t = R(x_0)/r(x_0)$ на сфере S^2, проходящей через точки a_i, b_j, x_0. Каждая из этих "поверхностей вращения" (для разных пар a_i, b_j) проходит через точку x_0. Пучку геодезических, идущих из x_0 внутрь такой области $D(a_i, b_j)$ соответствует в (евклидовом) пространстве $T_{x_0}S^n$ пучок лучей, заполняющих либо открытое полупространство, если точка x_0 была точкой аналитичности на $\Gamma(a_i, b_j, t)$, либо – открытый выпуклый конус, если t было особым, а x_0 – угловой на Γ. А в пространстве $T_{x_0}S^n$ верна теорема Хелли, и проходят рассуждения, приведенные в пунктах 4 и 5 доказательства теоремы 2. $\square$

Литература

1. Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, *Теорема Хелли и ее применения*. М, Мир, 1968.
2. В. А. Залгаллер, О. М. Меркулова, *Аналог окружности Аполлония на плоскости Лобачевского и на сфере*. Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998).

Zalgaller V. A. A separating spherical belt with maximal radius ratio.

For compacta A, B^n_R, given are the necessary and sufficient conditions for the spherical belt separating A and B and having the maximal ratio of the exterior and interior radii.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 12 февраля 1998 г.