Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

В. А. Залгаллер, О. М. Меркулова

АНАЛОГ ОКРУЖНОСТИ АПОЛЛОНИЯ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО И НА СФЕРЕ

На евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ при фиксированных точках A, B с расстоянием $a > 0$ между ними и фиксированном числе $k > 1$ множество Γ тех точек M, для которых одинаково отношение $MB/MA = k$, является окружностью. Ее называют окружностью Аполлония (см. [1], стр. 276). Эта окружность имеет диаметр P_1P_2 на прямой AB, рис. 1, и охватывает точку A, причем $AP_1 = \frac{a}{k+1}$, $AP_2 = \frac{a}{k-1}$.

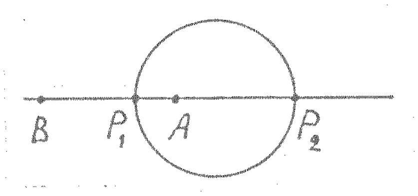

Рис. 1.

Теорема 1. *На плоскости Лобачевского H^2 при фиксированных точках A, B с расстоянием $a > 0$ и $k > 1$ множество Γ тех точек M, для которых $MB/MA = k$, является аналитической замкнутой кривой. При этом Γ ограничивает в H^2 содержащее точку A строго выпуклое множество.*

Доказательство. 1. Не нарушая общности, можно считать, что плоскость H^2 имеет кривизну $K = 1$. Тогда, при обозначениях рис. 2, по "теореме косинусов" для треугольников на плоскости Лобачевского (см. [2], стр. 194) из рассмотрения треугольника ABM имеем для кривой Γ уравнение в полярных координатах r, φ:

$$\operatorname{ch} kr = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} r + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} r \cos\varphi.$$

На Γ значения r изменяются в пределах

$$\frac{a}{k+1} \leqslant r \leqslant \frac{a}{k-1},$$

причем значению $r = \frac{a}{k+1}$ отвечает точка P_1 и $\varphi = \pi$, а значению $r = \frac{a}{k-1}$ точка P_2 и $\varphi = 0$.

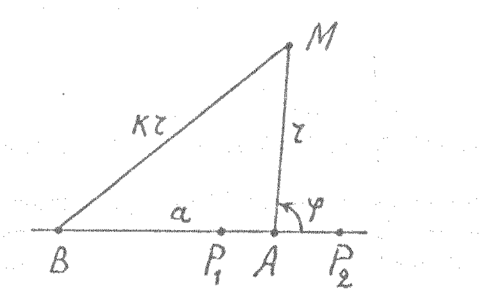

Рис. 2.

2. Обозначим $\Phi(r,\varphi) = \mathrm{ch}\,kr - \mathrm{ch}\,a\,\mathrm{ch}\,r - \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,r\cos\varphi$. Чтобы убедиться, что кривая Γ с уравнением $\Phi(r,\varphi) = 0$ аналитическая, достаточно убедиться, что в каждой ее точке либо $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \neq 0$, либо $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \neq 0$. Ввиду симметрии кривой Γ относительно прямой AB достаточно ограничиться той ее частью, где $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

При $0 < \varphi < \pi$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \mathrm{sh}\,a\,\mathrm{sh}\,r\sin\varphi > 0.$$

Для оставшихся двух точек $\varphi = \pi$ и $\varphi = 0$ рассмотрим $\frac{\partial\Phi}{\partial r}$. При $\varphi = \pi$, $r = \frac{a}{k+1}$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = k\,\mathrm{sh}\frac{ka}{k+1} + \mathrm{sh}\Big(a - \frac{a}{k+1}\Big) = (k+1)\mathrm{sh}\frac{ka}{k+1} > 0.$$

При $\varphi = 0$, $r = \frac{a}{k-1}$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = k\,\mathrm{sh}\frac{ka}{k-1} - \mathrm{sh}\Big(a + \frac{a}{k-1}\Big) = (k-1)\mathrm{sh}\frac{ka}{k-1} > 0.$$

Итак, Γ – аналитическая кривая, имеющая в каждой точке касательную.

3. Чтобы доказать, что замкнутая кривая Γ ограничивает на плоскости H^2 *строго выпуклую* область $D = D(A,B,k)$, убедимся, что при малых сдвигах из точки $M \in \Gamma$ по касательной к Γ мы направляемся во вне области D. Внутри D отношение расстояния до B к расстоянию до A больше k, а вне $\overline{D}$ – меньше k.

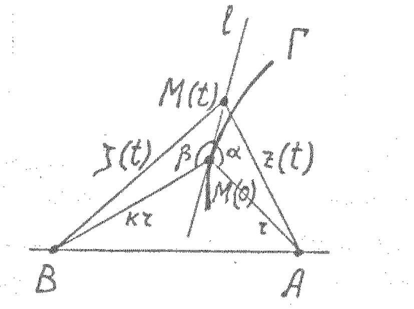

Рис. 3.

Пусть $M(0) \in \Gamma$, рис. 3, и l – касательная к Γ в точке $M(0)$. Будем сдвигаться по l из точки $M(0)$ на малое расстояние t. В точке $M(0)$ расстояния до A и B были r и kr. Для сдвинутой точки $M(t)$ расстояния до A и B обозначим соответственно $z(t)$ и $\zeta(t)$. Для треугольника $AM(0)M(t)$, рис. 3, имеем

$$\operatorname{ch} z(t) = \operatorname{ch} r \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} r \operatorname{sh} t \cos\alpha,$$

откуда находим

$$z(0) = r, \quad z'(0) = \frac{dz(0)}{dt} = -\cos\alpha, \quad z''(0) = \frac{d^2 z(0)}{dt^2} = \sin^2\alpha \operatorname{cth} r.$$

Поэтому

$$z(t) = r - \cos\alpha \cdot t + \frac{1}{2}\sin^2\alpha \operatorname{cth} r \cdot t^2 + o(t^2).$$

Аналогично из треугольника $BM(0)M(t)$ находим

$$\zeta(t) = kr - \cos\beta \cdot t + \frac{1}{2}\sin^2\beta \operatorname{cth} kr \cdot t^2 + o(t^2).$$

Но из того, что прямая l касательная к кривой Γ, на которой отношение расстояний до B и A постоянно, следует, что отношение $\zeta(t)$ к $z(t)$ при $t = 0$ стационарно. Поэтому

$$\cos\beta = k\cos\alpha.$$

Обратимся к отношению

$$\frac{\xi(t)}{z(t)} = \frac{kr - k\cos\alpha \cdot t + \frac{1}{2}(1 - k^2\cos^2\alpha)\operatorname{cth} kr \cdot t^2 + o(t^2)}{r - \cos\alpha \cdot t + \frac{1}{2}(1 - \cos^2\alpha)\operatorname{cth} r \cdot t^2 + o(t^2)}.$$

Оно при достаточно малом $|t| > 0$ будет меньше k из-за неравенства

$$\left(1 - k^2 \cos^2 \alpha\right) \operatorname{cth} kr < k \left(1 - \cos^2 \alpha\right) \operatorname{cth} r,$$

справедливого ввиду $1 < k$, $0 \leqslant \sin^2 \beta = 1 - k^2 \cos^2 \alpha < 1 - \cos^2 \alpha$, $0 \leqslant \operatorname{cth} kr < \operatorname{cth} r$.

Значит, малый сдвиг из $M(0)$ в направлении l ведет строго вовне $\overline{D}$, и потому область D строго выпукла. $\square$

Теорема 2. *На сфере S^2 радиуса ρ при фиксированных точках A, B с расстоянием $AB = a\rho > 0$, $0 < a \leqslant \pi$, и фиксированном $k > 1$ множество Γ тех точек M, для которых $MB/MA = k$, лежит в одной открытой полусфере, ограничивает в этой полусфере область $D = D(A, B, k)$, содержащую точку A, и является при $k \neq \frac{\pi}{\pi - a}$ аналитической кривой. Случай $k = \frac{\pi}{\pi - a}$ отличается тем, что аналитичность кривой Γ нарушается в одной точке. Эта точка B' диаметрально противоположна на S^2 точке B. На Γ точка B' угловая с углом сектора (со стороны области D) равным $2 \arccos \frac{\pi - a}{\pi}$.*

При некоторых соотношениях a и k область D невыпукла.

Доказательство. 1. Не нарушая общности, считаем, что радиус сферы $\rho = 1$. Проходящую через точки A и B большую окружность сферы называем экватором. Если через середину дуги AB экватора провести полный меридиан, то он разделит S^2 на две полусферы. В той из открытых полусфер, где лежит точка A, содержатся и все точки множества Γ.

2. Случай $a = \pi$ тривиален. Поэтому далее считаем $0 < a < \pi$. Будем рассматривать на S^2 окружность $S(A, r)$ с центром A и радиусом r и аналогичную окружность $S(B, kr)$. Искомая кривая Γ есть множество точек пересечения этих двух окружностей при различных r. При весьма малых $r > 0$ эти окружности не пересекаются. С непрерывным увеличением r при $r_{\min} = \frac{a}{k+1}$ у $S(A, r)$ и $S(B, kr)$ появляется единственная общая точка P_1, лежащая на дуге AB. С дальнейшим увеличением r эти окружности начнут пересекаться в двух точках, симметричных относительно экватора. Но при некотором $r_{\max}$ эти окружности снова будут иметь единственную общую точку P_2, лежащую на экваторе, а затем – перестанут пересекаться. (Наконец, $S(B, kr)$ исчезнет, при $r > \pi/k$.)

Если $k \geqslant \frac{\pi}{\pi - a}$, то $r_{\max} = \frac{a}{k-1}$.

При $k = \frac{\pi}{\pi - a}$ точка P_2 попадает в точку B', диаметрально противоположную B, и вся окружность $S(B, kr_{\max})$ вырождается в точку B'.

Если $1 < k < \frac{\pi}{\pi - a}$, то $r_{\max} = \frac{2\pi - a}{k+1}$, рис. 4

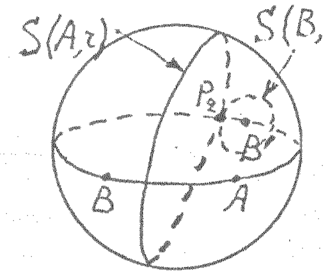

Рис. 4

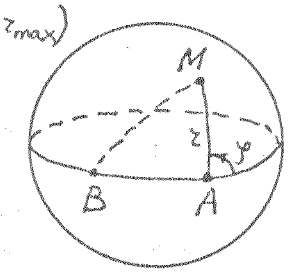

Рис. 5.

3. В полярных координатах r, φ, рис. 5, уравнение Γ имеет вид

$$\Phi(r, \varphi) = \cos a \cos r - \sin a \sin r \cos \varphi - \cos kr = 0, \qquad (*)$$

причем $k > 1$, $0 < a < \pi$,

$$0 < \frac{a}{k+1} \leqslant r \leqslant \frac{a}{k-1} \leqslant \frac{\pi}{k} \quad \text{при} \quad k \geqslant \frac{\pi}{\pi - a}$$

$$0 < \frac{a}{k+1} \leqslant r \leqslant \frac{2\pi - a}{k+1} < \frac{\pi}{k} \quad \text{при} \quad 1 < k < \frac{\pi}{\pi - a}.$$

Ввиду симметрии Γ относительно экватора считаем $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$.

Величина

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \sin a \sin r \sin \varphi$$

обращается в ноль только при $\varphi = \pi$ и $\varphi = 0$, т.е. в точках P_1 и P_2 с минимальным и максимальным значением r. Рассмотрим в этих точках $\frac{\partial \Phi}{\partial r}$.

В точке P_1 имеем $\varphi = \pi$, $r = \frac{a}{k+1}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \sin\Big(a - \frac{a}{k+1}\Big) + k \sin \frac{kr}{k+1} = (k+1) \sin \frac{kr}{k+1} > 0.$$

Для точки P_2 возможны три случая

1) $\varphi = 0$, $r = \frac{a}{k-1}$, $k > \frac{\pi}{\pi - a}$. Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\sin\left(a + \frac{a}{k-1}\right) + k \sin\frac{ka}{k-1} = (k-1)\sin\frac{ka}{k-1} > 0.$$

2) $\varphi = 0$, $r = \frac{a}{k-1}$, $k = \frac{\pi}{\pi - a}$. Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = (k-1)\sin\frac{ka}{k-1} = (k-1)\sin\pi = 0.$$

3) $\varphi = 0$, $r = \frac{2\pi - a}{k+1}$, $1 < k < \frac{\pi}{\pi - a}$. Тогда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -\sin\left(\frac{2\pi - a}{k+1} + a\right) + k \sin\frac{k(2\pi - a)}{k+1} = (k-1)\sin\frac{k(2\pi - a)}{k+1} > 0.$$

Последнее неравенство следует из того, что положительный аргумент $\frac{k(2\pi-a)}{k+1}$ растет с ростом k и достигает π при $k = \frac{\pi}{\pi-a}$, но $k < \frac{\pi}{\pi-a}$.

Итак, при $k \neq \frac{\pi}{\pi-a}$ во всех точках Γ либо $\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \neq 0$, либо $\frac{\partial\Phi}{\partial r} \neq 0$. Значит Γ – аналитическая кривая.

4. При $k = \frac{\pi}{\pi-a}$ точка P_2 лежит от A на расстоянии $r = \frac{a}{k-1}$, а от точки B на расстоянии $\frac{ka}{k-1} = \pi$, т.е. $P_2 = B'$. Обратимся к строению Γ при $k = \frac{\pi}{\pi-a}$ вблизи точки B'. Пусть M близкая к B' точка на той ветви кривой Γ, которая лежит выше экватора, рис. 6.

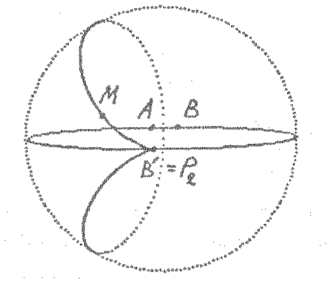

Рис. 6.

В точке B' расстояние d до точки B равнялось π. При переходе в точку M это расстояние изменилось на $\Delta d = -B'M$, а расстояние до A на $\Delta r \approx -B'M \cos\gamma(M)$, где $\gamma(M)$ – угол между кратчайшими дугами $B'M$ и $B'A$. Но $\Delta d = k\Delta r$. Поэтому $\cos\gamma(M)$ при $M \to B'$ стремится к $\frac{1}{k} = \frac{\pi - a}{\pi}$. Отсюда следует, что рассматриваемая ветвь кривой Γ имеет в точке B' полукасательную и она образует с экватором угол $\gamma = \arccos\frac{\pi-a}{\pi}$. Симметрия кривой Γ относительно экватора позволяет утверждать, что B' угловая точка на Γ с углом сектора $2\arccos\frac{\pi-a}{\pi}$.

5. В качестве примера, когда кривая $\Gamma(A, B, k)$ невыпукла, рассмотрим на единичной сфере S^2 точки A, B, находящиеся на расстоянии 0,1 рад., и выберем "особое" $k_0 = \frac{\pi}{\pi - 0{,}1} \approx 1.0328775$. В этом случае расстояния $r = MA$ точек M кривой Γ до A изменяются в пределах от $0{,}1/(k_0+1)$ до $\pi - 0{,}1$. Придавая r последовательность значений r_i в этих пределах (с шагом 0.1) находим из уравнения $(*)$ соответствующие значения φ_i. В таблице 1 приведены (для краткости с округлением) кроме значений r_i, φ_i вычисленные по ним "географические" координаты u_i, v_i соответствующих точек M_i кривой Γ, где u_i – (северная) широта, а v_i – долгота, отсчитанная от "начального" меридиана, проходящего через точку A. По этим данным построены на компьютере график рис. 7 зависимости u_i от v_i и, а рис. 6 изображал расположение всех точек M_i и проведенную по ним кривую Γ на сфере именно при выбранных параметрах $a = 0{,}1$, $k_0 = \pi/(\pi - 0{,}1)$.

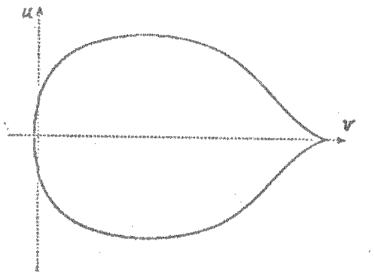

Рис. 7.

Эти рисунки в достаточной мере подтверждают невыпуклость рассмотренной кривой Γ. (Эту невыпуклость можно подтвердить вычислением в соответствующих точках (r_i, φ_i) кривой Γ, заданной уравнением $(*)$, геодезической кривизны этой кривой на сфере, используя линейный элемент $ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\varphi^2$ сферы в координатах r, φ. Полученные при этом значения геодезической кривизны τ приведены в последнем столбце таблицы 1. Отрицательные значения τ указывают на вогнутость Γ.)

На рис. 8 укрупненно изображен вид участка рассматриваемой кривой Γ вблизи точки B', а рядом изображены участки кривых $\Gamma(A, B, k_1)$ и $\Gamma(A, B, k_2)$ при $k_1 = k_0 + 0,002$ и $k_2 = k_0 - 0,002$.

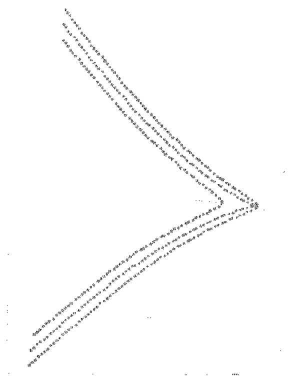

Рис. 8.

Теорема 2 доказана полностью.

В работе [3] для двух компактов A, $B \subset \mathbb{R}^2$, из которых A содержит не менее двух точек, а B – непуст, доказано, что если есть хоть один шаровой слой (слой между двумя концентрическими сферами), разделяющий A и B так, что A лежит в замкнутом шаре, ограниченном внутренней сферой, а B лежит вне открытого шара, ограниченного внешней сферой, то существует и единственен *экстремальный* разделяющий шаровой слой с максимальным значением отношения R/r радиусов внешней и внутренней сфер. Доказательство этой теоремы опиралось на выпуклость окружности Аполлония на плоскости.

С нарушением упомянутой выпуклости для кривых Γ на сфере связан следующий результат.

Таблица 1

	r	φ	v	u	τ
1.	0.05	3.14	−0.05	0.00	39.98
2.	0.15	1.86	−0.04	0.14	19.27
3.	0.25	1.68	−0.03	0.25	6.18
4.	0.35	1.59	−0.01	0.35	3.24
5.	0.45	1.52	0.02	0.45	2.13
6.	0.55	1.47	0.06	0.55	1.58
7.	0.65	1.42	0.11	0.64	1.24
8.	0.75	1.37	0.18	0.73	1.00
9.	0.85	1.33	0.27	0.82	0.81
10.	0.95	1.29	0.37	0.90	0.66
11.	1.05	1.24	0.51	0.96	0.52
12.	1.15	1.20	0.68	1.02	0.40
13.	1.25	1.16	0.87	1.06	0.28
14.	1.35	1.12	1.09	1.07	0.17
15.	1.45	1.08	1.32	1.07	0.05
16.	1.55	1.04	1.53	1.04	−0.06
17.	1.65	0.99	1.71	0.99	−0.18
18.	1.75	0.95	1.87	0.93	−0.30
19.	1.85	0.91	2.00	0.86	−0.43
20.	1.95	0.86	2.12	0.78	−0.57
21.	2.05	0.81	2.22	0.70	−0.73
22.	2.15	0.76	2.30	0.63	−0.90
23.	2.25	0.71	2.39	0.53	−1.11
24.	2.35	0.66	2.46	0.45	−1.36
25.	2.45	0.60	2.54	0.37	−1.68
26.	2.55	0.53	2.63	0.29	−2.11
27.	2.66	0.46	2.69	0.21	−2.74
28.	2.75	0.39	2.78	0.14	−3.76
29.	2.85	0.29	2.86	0.08	−5.75
30.	2.95	0.17	2.95	0.03	−11.20
31.	3.05	0.02	3.05	0.00	−0.54

Теорема 3. *В пространстве S^n, $n \geqslant 2$ существуют компакты A и B, из которых A содержит не менее двух точек, а B – не пуст, для которых экстремальный разделяющий шаровой слой существует,*

но не единственен.

Доказательством может служить следующий пример. Пусть $\Gamma_1 = \Gamma(a_1, b_1, k)$ – невыпуклая "окружность Аполлония" на сфере S^2, и пусть l – окружность большого круга сферы S^2, опорная к Γ_1 в двух точках x_1, x_2. Условно это изображено на рис. 9.

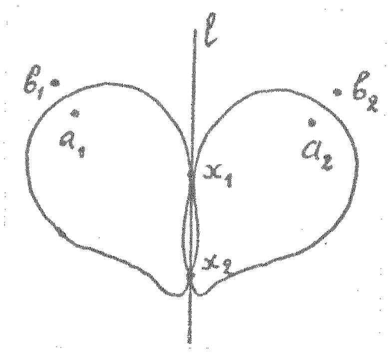

Рис. 9.

Отразим кривую Γ_1 и точки a_1, b_1 относительно плоскости окружности l. Получим на S^2 новую кривую Γ_2 и новую пару точек a_2, b_2, рис. 9. Пусть компакты $A = \{a_1, a_2\}$, $B = \{b_1, b_2\}$; тогда точки x_1 и x_2 будут каждая центром экстремального разделяющего шарового слоя для компактов A и B. (В случае, если число $k = \frac{\pi}{\pi - a_1 b_1}$, т.е. было взято особым для a_1, b_1, то точки b_1 и b_2 совпадут, а точка x_2 будет диаметрально противоположной для b_1.) $\square$

Теорема 4 (Достаточный признак выпуклости Γ). *Если в условиях теоремы* 2 *выполняется хотя бы одно из следующих требований:* 1) $k \geqslant 2$; 2) $1 < k < 2$, $a \leqslant \frac{k-1}{2}\pi$; 3) $1 < k < 2$, $a \geqslant \frac{3-k}{2}\pi$, *то кривая* Γ *ограничивает на сфере строго выпуклую область* $D(A, B, k)$, *содержащую точку* A.

Доказательство. Используем подход, примененный при доказательстве теоремы 1 для установления выпуклости области $D(A, B, k)$ на плоскости Лобачевского. Обратимся к рис. 3, предполагая на этот раз, что все происходит на S^2, а не на H^2, и что l – касательная к Γ большая окружность сферы S^2. Тогда для треугольника $AM(0)M(t)$ имеем

$$\cos z(t) = \cos r \cos t + \sin r \sin t \cos \alpha,$$

откуда находим

$$z(0) = r, \quad z'(0) = -\cos\alpha, \quad z''(0) = \sin^2 \alpha \mathrm{ctg} r,$$

$$z(t) = r - \cos\alpha \cdot t + \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \mathrm{ctg} r \cdot t + o(t^2).$$

Аналогично,

$$\zeta(t) = kr - \cos\beta \cdot t + \frac{1}{2} \sin^2 \beta \mathrm{ctg} kr \cdot t^2 + o(t^2),$$

причем снова $\cos\beta = k\cos\alpha$.

Отношение

$$\frac{\zeta(t)}{z(t)} = \frac{kr - k\cos\alpha \cdot t + \frac{1}{2}(1 - k^2\cos^2\alpha)\mathrm{ctg} kr \cdot t^2 + o(t^2)}{r - \cos\alpha \cdot t + \frac{1}{2}(1 - \cos^2\alpha)\mathrm{ctg} r \cdot t^2 + o(t^2)}$$

заведомо будет при малых $|t| > 0$ меньше k, если выполняется неравенство

$$\left(1 - k^2 \cos^2 \alpha\right) \mathrm{ctg} kr < k \left(1 - \cos^2 \alpha\right) \mathrm{ctg} r, \tag{$*$}$$

которое, вообще говоря, не обязано соблюдаться. Но неравенство $(*)$ выполняется в случае $\mathrm{ctg} r > 0$, поскольку тогда $1 < k$, $0 \leqslant \sin^2\beta = 1 - k^2\cos^2\alpha < 1 - \cos^2\alpha$, $\mathrm{ctg} kr < \mathrm{ctg} r$. Т.е. $(*)$ соблюдается при $r < \pi/2$.

1) если $k > 2$, то для любой точки $M \in \Gamma$ расстояние $MB = kr \leqslant \pi$, и $r < \pi/2$. Если $k = 2$, то либо $MB = 2r < \pi$, либо на Γ найдется точка M_1, для которой $M_1 B = 2r = \pi$. Но тогда $M_1 = B'$ – единственная угловая точка на Γ и в ней угол сектора со стороны $D(A, B, 2)$ равен $2 \arccos \frac{1}{2} < \pi$, так что и это – точка строгой выпуклости.

2) Пусть $1 < k < 2$ и $a < \frac{k-1}{2}\pi$. Тогда $ka < 2a < k\pi - \pi$, откуда $k > \frac{\pi}{\pi - a}$. Но тогда на Γ имеем $r_{\max} = \frac{a}{k-1} < \frac{\pi}{2}$.

Если $a = \frac{k-1}{2}\pi$, то $r_{\max} = \frac{\pi}{2}$, но $kr_{\max} < \pi$, и потому Γ – аналитическая кривая, являющаяся пределом выпуклых кривых Γ_i (при $a_i < \frac{k-1}{2}\pi$), а потому Γ сама строго выпуклая кривая.

3) Пусть $1 < k < 2$ и $a > \frac{3-k}{2}\pi$. В промежутке $1 < k < 2$ соблюдается неравенство $\frac{3-k}{2} > 1 - \frac{1}{k}$. Поэтому $a > (1 - \frac{1}{k})\pi$, откуда $k < \frac{\pi}{\pi - a}$. Поэтому $r_{\max} = \frac{2\pi - a}{k+1} < \frac{\pi}{2}$.

Если $a = \frac{3-k}{2}\pi$, то $r_{\max} = \frac{\pi}{2}$, но $kr_{\max} < \pi$, и снова Γ – аналитическая кривая, предельная для выпуклых Γ_i (при $a_i < \frac{3-k}{2}\pi$), а потому Γ строго выпуклая кривая. □

Литература

1. А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, *Геометрия 8–9*. Просвещение, М. (1991).
2. Э. Бельтрами, *Опыт интерпретации неевклидовой геометрии (1968)*. — В кн.: Об основаниях геометрии. Гостехиздат, М. (1956).
3. В. А. Залгаллер, *Разделяющий шаровой слой с максимальным отношением радиусов*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **252** (1998).

Zalgaller V. A., Merkulova O. M. Analogues of the Appollonian circle on the Lobachevsky plane and on sphere.

The analogue of the Apollonian circle on the Lobachevsky plane is a convex analytic curve. On the sphere this curve may be not convex and may be not analytic at one of its points. For the last reason, there may exist several separating sperical belts with maximal ratio of the exterior and interior radii.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 12 декабря 1997 г.