Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

М. Ю. Звагельский

КОБОРДИЗМЫ ВЛОЖЕНИЙ С КОРАЗМЕРНОСТЬЮ 2

Все рассматриваемые в работе многообразия, подмногообразия и отображения предполагаются, если не оговорено противное, гладкими.

Замкнутые подмногообразия U и V многообразия M называются *вложенно кобордантными*, если существует такое компактное правильное подмногообразие W многообразия $M \times [0,1]$, что $\partial W = (U \times 0) \cup (V \times 1)$. Отношение вложенной кобордантности является отношением эквивалентности на множестве n-мерных замкнутых подмногообразий в M. Множество классов эквивалентности по этому отношению обозначим $E\mathcal{N}_n(M)$. Множество $E\mathcal{N}_n(\mathbb{R}^d)$ является абелевой группой относительно (подходящим образом определенного) дизъюнктного объединения.

Основной технический результат работы (теоремы 3.1 и 3.2) позволяет, в некотором смысле, выделить полное препятствие к тому, чтобы $\mathbb{Z}_2$-гомологичное нулю замкнутое подмногообразие V^n многообразия M^{n+2} являлось краем компактного подмногообразия в M^{n+2}. Как следствие, получается, что при вычислении групп $E\mathcal{N}_n(\mathbb{R}^{n+2})$ можно ограничиться рассмотрением лишь подмногообразий специального вида. Исходя из этого, мы вычисляем группы $E\mathcal{N}_n(\mathbb{R}^{n+2})$ для $n = 3$ и 4: $E\mathcal{N}_3(\mathbb{R}^5) = \mathbb{Z}_2$, $E\mathcal{N}_4(\mathbb{R}^6) = 0$, и даем геометрическое описание образующей группы $E\mathcal{N}_3(\mathbb{R}^5)$. (Группы $E\mathcal{N}_0(\mathbb{R}^2)$, $E\mathcal{N}_1(\mathbb{R}^3)$ и $E\mathcal{N}_2(\mathbb{R}^4)$ были известны ранее.)

Структура работы. В §1 определяются “специальные” подмногообразия, играющие важную роль при вычислении групп кобордизмов вложений. В §2 вводится понятие вложенного раздутия и обсуждаются его свойства. Основной результат работы сформулирован в §3 (теоремы 3.1 и 3.2 и замечания к ним). Группы $E\mathcal{N}_3(\mathbb{R}^5)$ и $E\mathcal{N}_4(\mathbb{R}^6)$ вычисляются в §4 (предложения 4.3 и 4.9). Отметим, что §4 можно читать сразу после §1 (из результатов §§2 и 3 в нем используются только следствие 3.3 и замечание 3.4).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 98-01-00832 и грант поддержки научных школ).

Доказательства, за исключением доказательств предложений 4.3 и 4.9, в основном опускаются.

§1. Специальные подмногообразия

Обозначения. Пусть ξ — векторное расслоение. Через $\mathbb{Z}_\xi$ мы обозначаем локальную систему групп $\mathbb{Z}$, скрученную классом $w_1(\xi)$.

Через $S(\xi)$ обозначим ассоциированное с ξ сферическое расслоение. (То есть расслоение на единичные сферы в некоторой евклидовой метрике на ξ.) Пусть A — правильное подмногообразие многообразия B. Через $\nu(A,B)$ и $N(A,B)$ обозначим нормальное расслоение и замкнутую трубчатую окрестность подмногообразия A в многообразии B. Мы рассматриваем $N(A,B)$ как тотальное пространство дискового расслоения, ассоциированного с $\nu(A,B)$.

Квадратичные отображения и стандартное вложение $\mathbb{R}P^2 \hookrightarrow B^4$. Пусть

$$B^4 = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 \leqslant 1\},$$
$$S_i^1 = \{(z_1,z_2) \in B^4 : |z_i|^2 = 1\}, \quad i = 1,2.$$

Назовем отображение $f\colon S_1^1 \to S_2^1$ *квадратичным*, если найдется такое $x \in S^1$, что $f((z,0)) = (0, xz^2)$. Объединение цилиндра отображения f, стандартно лежащего в джойне $S_1^1 * S_2^1 = \partial B^4$, и диска $\{(z,0) \in B^4\}$ дает, после сглаживания углов, гладкое вложение проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ в B^4. Вложение $\mathbb{R}P^2 \hookrightarrow B^4$, построенное по квадратичному отображению $f((z,0)) = (0,z^2)$, назовем *стандартным*.

Специальные подмногообразия. Пусть M — многообразие, а F — его правильное подмногообразие коразмерности 4. Пусть расслоение $\nu(F,M)$ разложено в прямую сумму двумерных векторных расслоений: $\nu(F,M) = \eta \oplus \zeta$. Пусть $f\colon S(\eta) \to S(\zeta)$ — послойно-квадратичное отображение, накрывающее тождественное отображение на F. (Всюду в дальнейшем, говоря о послойно-квадратичных отображениях, мы подразумеваем, что они накрывают тождественное отображение на базе.) Послойное применение описанной выше конструкции вложения $\mathbb{R}P^2$ в B^4 к отображению f дает гладкое правильное подмногообразие Q коразмерности 2 в многообразии M, которое мы будем называть *специальным* подмногообразием с *осью* F.

Замечание 1.1. Каждое послойно-квадратичное отображение $f\colon S(\eta) \to S(\zeta)$ задает некоторую ориентацию расслоения $\eta \oplus \zeta$.

Замечание 1.2. Сужение проекции $\pi\colon N(F, M) \to F$ на специальное подмногообразие Q является проективизацией прямой суммы $\eta \oplus \epsilon$, где ϵ — тривиальное одномерное расслоение.

Замечание 1.3. Для существования послойно-квадратичного отображения $f\colon S(\eta) \to S(\zeta)$ необходимо и достаточно, чтобы для классов Штифеля–Уитни выполнялись равенства $w_1(\eta) = w_1(\zeta)$ в $H^1(M; \mathbb{Z}_2)$ и $2 \cdot W_2(\eta) = W_2(\zeta)$ в $H^2(M; \mathbb{Z}_\eta)$.

Замечание 1.4. Послойные гомотопические классы послойно-квадратичных отображений $S(\eta) \to S(\zeta)$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с послойными гомотопическими классами послойных двулистных накрытий $S(\eta) \to S(\zeta)$ (а также послойных отображений $S(\eta) \to S(\zeta)$ степени 2).

Замечание 1.5 (бескоординатное описание послойно-квадратичных отображений). Расслоение η можно рассматривать как пучок одномерных $\mathcal{C}$-модулей, где $\mathcal{C}$ — локально постоянный пучок полей $\mathbb{C}$, скрученный при помощи комплексного сопряжения классом $w_1(\eta)$. Если $f\colon S(\eta) \to S(\zeta)$ — послойно-квадратичное отображение, то расслоение ζ изоморфно тензорному квадрату расслоения η. Точнее, существует изоморфизм $i\colon \zeta \to \eta \otimes_{\mathcal{C}} \eta$ такой, что для каждых $x \in F$ и $v \in S(\eta)_x$ выполняется равенство $(S(i) \circ f)(v) = v \otimes v \in S(\eta \otimes_{\mathcal{C}} \eta)_x$, где $S(i)\colon S(\zeta) \to S(\eta \otimes_{\mathcal{C}} \eta)$ — отображение, индуцированное изоморфизмом i.

Замечание 1.6. Для двух послойно-квадратичных отображений $f, g\colon S(\eta) \to S(\zeta)$ естественно определяется их различающий когомологический класс $C_{f,g} \in H^1(F, \mathbb{Z}_\zeta)$. При этом f и g гомотопны в классе послойно-квадратичных отображений тогда и только тогда, когда они задают одинаковую ориентацию расслоения $\eta \oplus \zeta$ и $C_{f,g} = 0$. Кроме того, для каждого послойно-квадратичного отображения f и класса $c \in H^1(F, \mathbb{Z}_\zeta)$ можно построить послойно-квадратичное отображение g такое, что $c = C_{f,g}$.

§2. Вложенные раздутия

Пусть V^n — компактное правильное подмногообразие многообразия M^{n+2}.

Правильное подмногообразие U^n в $\partial(N(V,M))$ называется *вложенным раздутием* подмногобразия V, если сужение проекции $\pi\colon N(V,M)\to V$ на U является раздутием (моноидальным преобразованием) подмногобразия V. Центр раздутия — правильное подмногообразие коразмерности 2 в V — будем обозначать через $\mathrm{ct}(U)$. (Таким образом, $\pi|_{U\setminus\pi^{-1}(\mathrm{ct}(U))}\colon (U\setminus\pi^{-1}(\mathrm{ct}(U)))\to(V\setminus\mathrm{ct}(U))$ — диффеоморфизм, и $\pi|_{\pi^{-1}(\mathrm{ct}(U))}$ — проективизация расслоения $\nu(\mathrm{ct}(U),V)$.)

Пусть $w\in H_{n+1}(M,N(V,M);\mathbb{Z}_2)$. Будем говорить, что U *ограничивает класс* w, если найдется компактное правильное подмногообразие W^{n+1} в $M\setminus\mathrm{int}(N(V,M))$ такое, что $\partial W=U$ и $[W]=w$.

Замечание 2.1. Подмногообразие U задает сечение расслоения $S(\nu(V,M))$ над $V\setminus\mathrm{ct}(U)$. Сужение этого сечения на $\partial(N(\mathrm{ct}(U),V))$ определяет послойно-квадратичное отображение $S(\nu(\mathrm{ct}(U),V))\to S(\nu(V,M)|_{\mathrm{ct}(U)})$. Таким образом, подмногообразие U определяет специальное подмногообразие Q с осью $\mathrm{ct}(U)$. Очевидно, что подмногообразия U и Q вложенно кобордантны.

Замечание 2.2. Так как расслоение $\nu(\mathrm{ct}(U),M)$ ориентировано, то подмногообразие $\mathrm{ct}(U)$ представляет некоторый элемент группы $H_{n-2}(V;\mathbb{Z}_{\tau M})$, где τM — касательное расслоение многообразия M. Используя метод Кнезера (см. [2], стр. 69–82), легко показать, что каждый гомологический класс из $H_{n-2}(V;\mathbb{Z}_{\tau M})$ представляется нормально ориентированным подмногообразием. Кроме того, если F_0^{n-2} и F_1^{n-2} — замкнутые подмногообразия в V, представляющие один и тот же класс в $H_{n-2}(V;\mathbb{Z}_{\tau M})$, то существует правильное компактное подмногообразие G^{n-1} в $V\times[0,1]$ такое, что $\partial G=(F_0\times 0)\cup(F_1\times 1)$, расслоение $\nu(G,M\times[0,1])$ ориентировано и его ориентация согласована с ориентациями расслоений $\nu(F_0\times 0,M\times 0)$ и $\nu(F_1\times 1,M\times 1)$.

Замечание 2.3. (а) Нетрудно видеть, что $2\cdot\mathcal{D}_V[\mathrm{ct}(U)]=e_V\in H^2(V;\mathbb{Z}_{\nu(V,M)})$, где e_V — нормальный класс Эйлера подмногообразия V, а $\mathcal{D}_V: H_{n-2}(V;\mathbb{Z}_{\tau M})\to H^2(V;\mathbb{Z}_{\nu(V,M)})$ — изоморфизм, обратный изоморфизму Пуанкаре.

(б) Если F^{n-2} — замкнутое нормально ориентированное в M подмногообразие многообразия V такое, что $e=2\cdot\mathcal{D}_V[F]$, то существует вложенное раздутие T подмногообразия V с $\mathrm{ct}(T)=F$.

(в) Пусть F^{n-2} — нормально ориентированное в M замкнутое подмногообразие многообразия V такое, что $[F] = [\mathrm{ct}(U)] \in H_{n-2}(V;\mathbb{Z}_{\tau M})$. Тогда существует вложенное раздутие T^n подмногообразия V такое, что $\mathrm{ct}(T) = F$. Кроме того, подмногообразие T можно выбрать так, что оно будет кобордантно подмногообразию U в классе вложенных раздутий подмногообразия V. Последнее означает, что найдется вложенное раздутие X^{n+1} подмногообразия $V \times [0,1]$ в $M \times [0,1]$ такое, что $\partial X = (U \times 0) \cup (T \times 1)$.

В частности, пусть U — вложенное раздутие подмногообразия V, $[\mathrm{ct}(U)] = 0 \in H_{n-2}(V;\mathbb{Z}_{\tau M})$ и существует компактное правильное подмногообразие $W^{n+1} \subset M \setminus \mathrm{int}(N(V,M))$ такое, что $U = \partial W$ (т.е. раздутие U — ограничивающее). Тогда подмногообразие V является границей некоторого компактного подмногообразия, лежащего в M.

Замечание 2.4 (еще о гомологическом классе оси вложенного раздутия). Рассмотрим диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc} & & H_{n-1}(V;\mathbb{Z}_{\tau M}) & & & & \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle [\cdot]_2} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & H_{n-1}(V;\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\ l\ } & H_n(\partial(N(V,M));\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{\pi_*} & H_n(V;\mathbb{Z}_2) \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_*} & & & & \\ & & H_{n-2}(V;\mathbb{Z}_{\tau M}) & & & & \end{array}$$

Столбец в ней представляет собой отрезок гомологической коэффициентной последовательности. ($[\cdot]_2$ — приведение модуло 2, ∂_* — гомоморфизм Бокштейна.) Строка — отрезок последовательности Гизина расслоения $\pi\colon \partial(N(V,M)) \to V$.

Если U_0 и U_1 — вложенные раздутия подмногообразия V, то, очевидно, $[U_0] - [U_1] \in \ker \pi_*$. Можно показать, что имеет место равенство

$$\partial_* l^{-1}([U_0] - [U_1]) = [\mathrm{ct}(U_0)] - [\mathrm{ct}(U_1)] \in \mathrm{tors}_2(H_{n-2}(V;\mathbb{Z}_{\tau M})),$$

где через $\mathrm{tors}_2(H_{n-2}(V;\mathbb{Z}_{\tau M}))$ обозначено взятие 2-кручения.

Замечание 2.5. Пусть S и T — вложенные раздутия подмногообразия V такие, что $\mathrm{ct}(S) = \mathrm{ct}(T)$ и нормальные ориентации $\mathrm{ct}(S)$ и $\mathrm{ct}(T)$ в M совпадают. Тогда определен различающий когомологический класс $c_{S,T} \in H^1(V, \mathbb{Z}_{\tau M})$. Подмногообразия S и T изотопны в классе вложенных раздутий подмногообразия V с центром $\mathrm{ct}(S)$ $(= \mathrm{ct}(T))$ тогда и только тогда, когда $c_{S,T} = 0$. Кроме того, для каждого вложенного раздутия S и класса $c \in H^1(M;\mathbb{Z}_{\tau M})$ можно построить вложенное раздутие T такое, что $\mathrm{ct}(T) = \mathrm{ct}(S)$ и $c = c_{S,T}$.

§3. Основной результат

Используя (обобщенный) метод Кнезера сглаживания сингулярных циклов, детально изложенный в [2], можно доказать следующее основное предложение.

Теорема 3.1. *Пусть M^{n+2} — $(n+2)$-мерное многообразие и V^n — его замкнутое n-мерное подмногообразие, $\mathbb{Z}_2$-гомологичное нулю. Пусть $\mathrm{in}\colon V \hookrightarrow N(V,M)$ — включение и $w \in H_{n+1}(M, N(V,M);\mathbb{Z}_2)$ — произвольный элемент такой, что $\partial w = \mathrm{in}_*([V])$. Тогда существует вложенное раздутие подмногообразия V, ограничивающее класс w.* •

Имеется следующий "относительный" вариант теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть M^{n+2} — многообразие, а V^n — его правильное компактное подмногообразие. Пусть U_0^{n-1} — вложенное раздутие подмногообразия ∂V в многообразии ∂M. Пусть W_0^n — компактное подмногообразие в $(\partial M)\setminus\mathrm{int}(N(\partial V,\partial M))$ такое, что $\partial W_0 = U_0$. Обозначим через Z цикл $W_0 \cup_{U_0} \mathrm{Cyl}(\pi) \cup_{\partial V} V$, где $\mathrm{Cyl}(\pi)$ — цилиндр проекции $\pi\colon U_0 \to \partial V$, расположенный в $N(\partial V,\partial M)$ очевидным образом.*

Если $[Z] = 0$ в $H_n(M;\mathbb{Z}_2)$, то существуют вложенное раздутие U^n подмногообразия V и компактное подмногообразие с углами W^{n+1} в $M\setminus\mathrm{int}(N(V,M))$ такие, что $\partial U = U_0$ и $\partial W = U \cup_{U_0} W_0$. •

Пояснение. Понятие подмногообразия с углами определяется естественным образом. Рисунок 1 иллюстрирует случай $n = 1$. Чтобы дать общее определение, рассмотрим следующие два подмножества в $\mathbb{R}^3$:

$$A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geqslant 0\}$$

и

$$B = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geqslant 0, x_2 = 0, x_3 \geqslant 0\}.$$

Для точки $y \in A$ через O_y обозначим маленькую окрестность точки y в A. Топологическое подмногообразие W^{n+1} в гладком многообразии M^{n+2} назовем подмногообразием с углами, если для каждой точки $x \in W$ найдутся окрестность U_x точки x в M

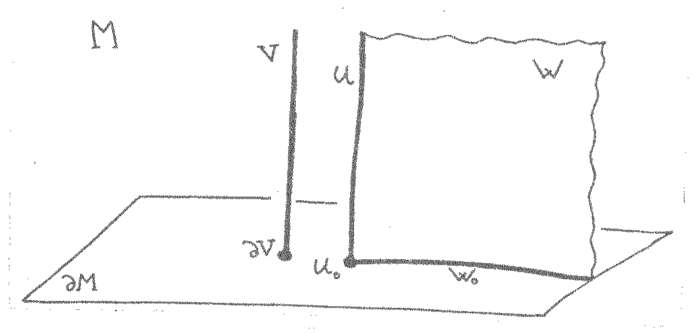

Рис. 1.

и точка $y \in B$ такие, что пара $(U_x, U_x \cap W)$ диффеоморфна паре $(O_y \times \operatorname{int} B^{n-1}, (O_y \cap B) \times \operatorname{int} B^{n-1})$, где B^{n-1} — $(n-1)$-мерный шар.

Множеством угловых точек подмногообразия W является подмногообразие U_0. На рисунке показано, как выглядит пересечение подмногообразий W_0, U и W с нормальным к подмногообразию U_0 трехмерным шаром.

Обозначения. Обозначим через $E_0\mathcal{N}_n(M)$ множество классов вложенной кобордантности $\mathbb{Z}_2$-гомологичных нулю n-мерных подмногообразий многообразия M. Через $E\Omega_n(M)$ и $SE\mathcal{N}_n(M)$ обозначим множества классов вложенной кобордантности ориентированных и специальных n-мерных подмногообразий. (При этом, разумеется, требуется, чтобы кобордизм был (соответственно) ориентированным или специальным подмногообразием в $M \times [0,1]$.)

Из теорем 3.1, 3.2 и замечания 2.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.3. *Если $H_{n+1}(M^{n+2}; \mathbb{Z}_2) = 0$ и $n \geqslant 2$, то естественное отображение $SE\mathcal{N}_n(M) \to E_0\mathcal{N}_n(M)$ биективно.*

В нижеследующих замечаниях мы используем обозначения и предположения теоремы 3.1.

Замечание 3.4. Пусть U_0 и U_1 — вложенные раздутия подмногообразия V, ограничивающие один и тот же гомологический класс. Из теоремы 3.2 (и, независимо, из замечания 2.4) следует, что
$$[\mathrm{ct}(U_0)] = [\mathrm{ct}(U_1)] \in H_{n-2}(V; \mathbb{Z}_{\tau M}).$$

Таким образом, корректно определено отображение

$$\Phi\colon \{w \in H_{n+1}(M, N(V,M);\mathbb{Z}_2) \mid \partial w = \mathrm{in}_*[V]\} \to H_{n-2}(V;\mathbb{Z}_{\tau M}),$$

где $\mathrm{in}\colon V \hookrightarrow N(V,M)$ — включение. Это отображение ставит в соответствие классу $w \in H_{n+1}(M, N(V,M);\mathbb{Z}_2)$ гомологический класс оси вложенного раздутия, ограничивающего класс w. Из замечания 2.3 (в) вытекает, что подмногообразие V является краем компактного подмногообразия коразмерности 1 в многообразии M тогда и только тогда, когда образ отображения Φ содержит $0 \in H_{n-2}(V;\mathbb{Z}_{\tau M})$. В случае, когда $H_{n+1}(M;\mathbb{Z}_2) = 0$, образ отображения Φ состоит из одного элемента. Обозначим его через $\phi(V)$.

Замечание 3.5. Легко привести пример такого неориентируемого замкнутого подмногообразия V^2 в замкнутом многообразии M^4, что $[V] = 0$ в $H_2(M;\mathbb{Z}_2)$ и нормальный класс Эйлера подмногообразия V равен нулю, т.е. $2[\mathrm{ct}(U)] = 0$ для любого вложенного ограничивающего раздутия U подмногообразия V (см. 2.3), но все-таки подмногообразие V^2 не ограничивает в M^4 (и вообще не ограничивает).

Замечание 3.6. Вышеизложенное позволяет определить инвариант класса вложенной кобордантности подмногообразия V. Для простоты ограничимся случаем многообразия M с фиксированной ориентацией и такого, что $H_{n+1}(M;\mathbb{Z}_2) = 0$. Пусть F — центр какого-нибудь вложенного раздутия подмногообразия V. Из замечаний 2.2 и 3.4 вытекает, что корректно определен класс вложенной кобордантности ориентированного подмногообразия F в V, лежащий в группе $E\Omega_{n-2}(V)$. Из теоремы 3.2 вытекает, что класс кобордантности пары (V, F) является инвариантом класса вложенной кобордантности подмногообразия V.

§4. Вычисление групп кобордизмов вложений

Другое описание специальных подмногообразий. Пусть $G \subset SO(4)$ — группа самосовмещений проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, стандартно вложенной в четырехмерный шар B^4. Легко проверить, что

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in SO(2) \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; A \in SO(2) \right\}$$

и группа G изоморфна $O(2)$. Обозначим через P пространство левых смежных классов $SO(4)/G$, и пусть $p\colon SO(4) \to P$ — проекция.

Пусть F — замкнутое нормально ориентированное подмногообразие коразмерности 4 в гладком многообразии M. Обозначим через $\varrho(F, M)$ ассоциированное с $\nu(F, M)$ расслоение со слоем P. (Группа $SO(4)$ действует на P левыми сдвигами.) Имеется очевидная биекция между множеством гомотопических классов сечений расслоения $\varrho(F, M)$ и множеством специальных подмногообразий в M с осью F, рассматриваемых с точностью до неподвижной на F изотопии в классе специальных подмногообразий.

Кобордизмы вложений. Доказательство следующей технической леммы мы опускаем ввиду его громоздкости.

Лемма 4.1. *Гладкое замкнутое пятимерное многообразие P неориентируемо. Кроме того:* (а) $\pi_1(P) = \mathbb{Z}_2$, (б) $p_*\colon \pi_1(SO(4)) \to \pi_1(P)$ *— нулевой гомоморфизм,* (в) $H_2(P; \mathbb{Z}) = 0$. •

Для дальнейшего нам понадобится еще одна лемма, вытекающая из п. (б) леммы 4.1.

Лемма 4.2. *Пусть α — тривиальное четырехмерное векторное расслоение над окружностью S^1, а α' — ассоциированное с ним расслоение со слоем P. Пусть f и g — тривиализации расслоения α, а f' и g' — соответствующие им тривиализации расслоения α'. Пусть, наконец, s — некоторое сечение расслоения α'. Сечение s и тривиализации f' и g' очевидным образом определяют два отображения f_s и $g_s\colon S^1 \to P$. Эти отображения гомотопны.* •

Предложение 4.3. $E\mathcal{N}_3(\mathbb{R}^5) = \mathbb{Z}_2$.

Доказательство. Из следствия 3.3 вытекает равенство $E\mathcal{N}_3(\mathbb{R}^5) = SE\mathcal{N}_3(\mathbb{R}^5)$. Пусть V^3 — замкнутое специальное подмногообразие в $\mathbb{R}^5$. Его ось — замкнутое нормально ориентированное подмногообразие F^1 в $\mathbb{R}^5$. Ориентируем подмногообразие F так, чтобы в сумме с данной нормальной ориентацией получить стандартную ориентацию пространства $\mathbb{R}^5$. Подмногообразие V задает сечение расслоения $\varrho(F, \mathbb{R}^5)$, ассоциированного с тривиальным расслоением $\nu(F, \mathbb{R}^5)$. Из леммы 4.2 следует, что с точностью до гомотопии определено отображение $v\colon F \to P$. Нетрудно видеть, что сопоставление с подмногообразием V отображения v

корректно определяет изоморфизм $SE\mathcal{N}_3(\mathbb{R}^5) \to \Omega_1(P)$. Доказываемое вытекает теперь из равенства $\Omega_1(P) = H_1(P;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$. $\bullet$

Аналогично предложению 4.3, но только проще, доказывается следующий известный результат (ср. [2], упр. 3 на с. 90).

Предложение 4.4. *$E\mathcal{N}_2(\mathbb{R}^4) = \mathbb{Z}$.* $\bullet$

Замечание 4.5. Образующий группы $E\mathcal{N}_2(\mathbb{R}^4)$ представляется стандартным вложением проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^4$.

Замечание 4.6. Пусть V^2 — замкнутое подмногообразие в $\mathbb{R}^4$. Обозначим через $\epsilon_*\colon H_0(V;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ гомоморфизм, индуцированный аугментацией. Пусть $\phi(V) \in H_0(V;\mathbb{Z})$ — гомологический класс, определенный в замечании 3.4. Тогда $\epsilon_*(\phi(V))$ — половина нормального числа Эйлера подмногообразия V, и соответствие $V \mapsto \epsilon_*(\phi(V))$ определяет изоморфизм $E\mathcal{N}_2(\mathbb{R}^4) \to \mathbb{Z}$.

Замечание 4.7. Доказательство предложения 4.3 позволяет предъявить конкретное специальное подмногообразие, представляющее нетривиальный элемент группы $E\mathcal{N}_3(\mathbb{R}^5)$. Пусть $\mathrm{st}\colon \mathbb{R}P^2 \hookrightarrow B^4$ — стандартное вложение. Выберем произвольное гладкое отображение $r\colon [0,1] \to SO(4)$ такое, что

$$r(t) \equiv \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad t \in [0;0,1]$$

и

$$r(t) \equiv \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&-1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&-1 \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad t \in [0,9;1].$$

Определим отображение $R\colon [0,1] \times \mathbb{R}P^2 \to S^1 \times B^4$ формулой

$$R(t,x) = (e^{2\pi t i}, r(t) \cdot \mathrm{st}(x)),$$

где $r(t)\cdot\mathrm{st}(x)$ — образ точки $\mathrm{st}(x) \in B^4$ при вращении $r(t) \in SO(4)$. Так как вложения $R|_{0\times\mathbb{R}P^2}$ и $R|_{1\times\mathbb{R}P^2}$ имеют один и тот же образ, то образом отображения R является гладкое замкнутое подмногообразие V в $S^1 \times B^4$. Пусть $j\colon S^1 \times B^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ — произвольное вложение. Образующий группы $E\mathcal{N}_3(\mathbb{R}^5)$ представляется подмногообразием $j(V)$. Нетрудно видеть, что оно диффеоморфно $S^1 \times \mathbb{R}P^2$.

Замечание 4.8. Пусть V^3 — замкнутое подмногообразие в $\mathbb{R}^5$. Пусть $\phi(V) \in H_1(V, \mathbb{Z})$ — класс, определенный в замечании 3.4. (Таким образом, ось каждого вложенного ограничивающего раздутия подмногообразия V определяет цикл, представляющий класс $\phi(V)$.) Обозначим через $[\phi(V)]_2 \in H_1(V, \mathbb{Z}_2)$ редукцию класса $\phi(V)$ modulo 2. Определим гомоморфизм $\Psi : E\mathcal{N}_3(\mathbb{R}^5) \to \mathbb{Z}_2$ равенством $\Psi(V) = \langle w_1(V), [\phi(V)]_2 \rangle$, где $w_1(V)$ – первый класс Штифеля–Уитни многообразия V. Нетрудно видеть, что для подмногообразия V, описанного в предыдущем замечании, $\Psi(V) = 1$, и, следовательно, гомоморфизм Ψ является изоморфизмом.

Предложение 4.9. $E\mathcal{N}_4(\mathbb{R}^6) = 0$.

Доказательство. Из следствия 3.3 вытекает равенство $E\mathcal{N}_4(\mathbb{R}^6) = SE\mathcal{N}_4(\mathbb{R}^6)$. Пусть V^4 — замкнутое специальное подмногообразие в $\mathbb{R}^6$. Его ось — замкнутое нормально ориентированное подмногообразие F^2 в $\mathbb{R}^6$. Если поверхность F отлична от сферы, то выберем такие вложенные окружности α, β и γ в F, что $\mathbb{Z}_2$-гомологические классы $[\alpha]$, $[\beta]$ и $[\gamma]$ нетривиальны и попарно различны, а $[\gamma] = [\alpha] + [\beta]$. Подмногообразие V задает сечение расслоения $\varrho(F, \mathbb{R}^6)$, ассоциированного с тривиальным расслоением $\nu(F, \mathbb{R}^6)$. Тогда, согласно лемме 4.2, с точностью до гомотопии определены отображения окружностей α, β и γ в P. Так как, согласно п. (a) леммы 4.1, $\pi_1(P) = \mathbb{Z}_2$, то одно из этих отображений гомотопически тривиально. Произведем вложенную перестройку поверхности F вдоль соответствующей окружности. Пусть $K^3 \subset \mathbb{R}^6 \times [0,1]$ — получившийся кобордизм между поверхностью $F \subset \mathbb{R}^6 \times 0$ и поверхностью меньшего рода $G^2 \subset \mathbb{R}^6 \times 1$. Сечение расслоения $\varrho(F, \mathbb{R}^6 \times 0)$, задаваемое подмногообразием V, продолжается до сечения тривиального расслоения $\varrho(K, \mathbb{R}^6 \times [0,1])$. Следовательно, подмногообразие V вложенно кобордантно специальному подмногообразию с осью G.

Из приведенного рассуждения вытекает, что каждый элемент группы $E\mathcal{N}_4(\mathbb{R}^6)$ представляется специальным подмногообразием U^4 с осью S^2. По соображениям размерности можно считать, что это — стандартная сфера S^2 в $\mathbb{R}^6$. Так как $\pi_2(SO(4)) = 0$, то все тривиализации расслоения $\nu(S^2, \mathbb{R}^6)$ гомотопны. Следовательно, имеется выделенный гомотопический класс тривиализации ассоциированного расслоения $\varrho(S^2, \mathbb{R}^6)$. В этой ситуации подмногообразие U определяет с точностью до гомотопии некоторое отображение $u \colon S^2 \to P$.

Из равенства $\Omega_2(P) = H_2(P, \mathbb{Z}) = 0$ следует, что отображение u бордантно тривиальному. Пусть $f : X^3 \to P$ – соответствующий бордизм. Вложим многообразие X в $\mathbb{R}^6 \times [0,1]$ так, чтобы его границей являлась сфера $S^2 \subset \mathbb{R}^6 \times 0$. Нормальное расслоение $\nu(X, \mathbb{R}^6 \times [0,1])$ тривиально. Отображение f позволяет построить специальное подмногообразие с осью X, границей которого является подмногообразие U. Доказательство завершено. •

Литература

1. C. Biasi, *On ambiental bordism.* — Pacific J. Math. **163** (1994), 73–80.
2. Л. Гийу, А. Марен, *В поисках утраченной топологии.* М., Мир, 1989.
3. М. Ю. Звагельский, *Кобордизмы вложений ориентированных пятимерных многообразий в евклидово пространство.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **231** (1995), 148–168.
4. H. Kneser, *Ein topologisches Zerlegungssatz.* — Proc. Royal. Acad. Amsterdam **27** (1924), 601–616.
5. A. Szűcs, *On bordism groups of immersions and embeddings.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **109** (1991), 343–349.

Zvagel'skiĭ M. Yu. Cobordisms of immersions with codimension two.

We single out the obstruction for a closed $\mathbb{Z}_2$-null homologous submanifold of codimension 2 to be the boundary of a submanifold of codimension 1. As an application, we calculate the groups $E\mathcal{N}_n(\mathbb{R}^{n+2})$ of cobordisms of embeddings of nonoriented n-manifolds in the Euclidean $n+2$-space for $n = 3$ and 4. Namely, we show that $E\mathcal{N}_3(\mathbb{R}^2) = \mathbb{Z}_2$, $E\mathcal{N}_4(\mathbb{R}^6) = 0$. A specific generator of the former group is explicitly given.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 14 июня 1998 г.