Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

ЛИНЕЙНЫЕ СЕТИ И ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

В настоящей статье изучаются семейства взаимно параллельных линейных сетей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, у которых предполагаются факсированными топология и граница. Полученные результаты используются для описания пространств важных классов линейных сетей – локально минимальных и взвешенных минимальных сетей в $\mathbb{R}^n$ с фиксированной топологией и границей (оказывается, эти сети взаимно параллельны). Эти два класса сетей возникают как естественное обобщение плоских локально минимальных сетей, появляющихся при решении знаменитой проблемы Штейнера: из всех сетей (связных одномерных континуумов), затягивающих данное конечное множество точек плоскости, выбрать сеть наименьшей длины.

В теории минимальных сетей естественно выделяются так называемые *сети Штейнера* – сети, степени вершин которых не превосходят трех. Именно такие сети возникают как решения проблемы Штейнера, см. [1, 12, 2–7, 17]. В работе [20] авторы изучили структуру множества плоских минимальных сетей Штейнера с фиксированными топологией и границей. Было показано, что все такие сети взаимно параллельны, и их множество представляет собой выпуклый многогранник в конфигурационном пространстве подвижных вершин сети.

В настоящей работе нами обнаружено, что в основе результатов из [20] лежит ряд общих фактов, касающихся устройства пространства всех взаимно параллельных линейных сетей с данной границей. Оказывается, уже это множество имеет структуру выпуклого многогранника (возможно, неограниченного), размерность которого может быть вычислена в терминах ранга некоторой линейной системы. Отметим, что в случае плоских локально минимальных сетей в работе [20] размерность соответствующего

При работе над данной статьей авторы пользовались частичной поддержкой грантов (РФФИ), No. 95-01-01604 и (INTAS), No. 94-3666. Авторы очень признательны этим организациям.

многогранника была вычислена в терминах топологии сети. Мы покажем, что аналогичный результат имеет место и для плоских взвешенных минимальных сетей.

Отметим, что одной из хорошо известных интерпретаций проблемы Штейнера является транспортная проблема, состоящая в построении оптимальной (в смысле стоимости, а, значит, и длины) сети дорог, соединяющих данную систему пунктов. При такой интерпретации все рассматриваемые дороги считаются равнозначными, т.е. стоимость участка дороги не зависит от его расположения в системе. Это приводит к тому, что целевой функционал пропорционален сумме длин всех дорог, входящих в систему. Однако, часто оказывается, что стоимость разных дорог в системе по-разному зависит от их длины. Например, такое возможно, если нужно строить дороги разной ширины, или работы выполняются разными фирмами, и т.д. Последнее соображение приводит к тому, что в качестве целевой функции необходимо рассматривать функционал взвешенной длины, т.е. линейную комбинацию длин дорог с некоторыми положительными постоянными коэффициентами. Сети, минимизирующие функционалы такого типа и называются *взвешенными минимальными сетями*.

Для формулировки наших основных результатов нам потребуется ряд определений.

Пусть G – произвольный связный граф, представленный в виде одномерного клеточного комплекса, и ∂G – некоторая его граница (т.е. подмножество множества вершин графа G). *Обобщенной сетью типа* G на многообразии W называется непрерывное отображение $\Gamma : G \to W$, а *границей* $\partial\Gamma$ *сети* Γ – ограничение отображения Γ на ∂G.

Граф G в этом случае называется *параметризующим графом сети* Γ. Если $M \subset W$ – образ отображения $\partial\Gamma$, то говорят, что *сеть* Γ *затягивает множество* M. Ограничения отображения Γ на вершины и ребра графа G называются, соответственно, *вершинами* и *ребрами сети* Γ. Вершины графа (соответствующие вершины сети), принадлежащие границе, называются *граничными* или *неподвижными*, а все остальные вершины – *внутренними* или *подвижными*. Обобщенную сеть Γ будем называть *погруженной*, если все ее ребра – регулярные кривые.

Обобщенную сеть $\Gamma : G \to \mathbb{R}^n$ назовем *линейной*, если все ее ребра – прямолинейные отрезки (возможно, вырожденные). Пусть

Γ и Γ' – две погруженных линейных сети одного и того же типа G. Ориентируем граф G произвольным образом. Это позволит нам рассматривать образы ребер этого графа при отображениях Γ и Γ' как векторы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Мы скажем, что сети Γ и Γ' *параллельны*, если для каждого ребра e из G вектора $\Gamma(e)$ и $\Gamma'(e)$ сонаправлены.

Пусть задана погруженная линейная сеть $\Gamma : G \to \mathbb{R}^n$ типа G с некоторой фиксированной границей φ. Основным результатом настоящей статьи является описание множества $[G, \varphi]_\Gamma$ всех параллельных Γ линейных сетей того же типа G и с той же границей φ. Приведем это описание.

Разрежем граф G по всем граничным вершинам степени больше 1 и определим границу каждой связной компоненты G_i как множество всех тех ее вершин степени 1, которые порождены вершинами из ∂G. Полученное разбиение графа G назовем *разбиением на невырожденные компоненты* G_i.

Рассмотрим следующую линейную систему уравнений. Фиксируем в пространстве $\mathbb{R}^n$ некоторые евклидовы координаты. Фиксируем некоторую ориентацию сети Γ, и будем называть эту ориентацию *исходной*. Если e – произвольное ребро сети Γ, ориентированное одним из двух возможных способов, то положим $\varepsilon(e) = 1$, если эта ориентация ребра e совпадает с исходной. Иначе, положим $\varepsilon(e) = -1$. Пусть $\nu(e)$ – координаты единичного вектора направления ребра e сети Γ в исходной ориентации.

Разобьем граф G на невырожденные компоненты, и пусть $\Gamma_i = \Gamma\big|_{G_i}$ – соответствующие компоненты сети Γ. Рассмотрим произвольную компоненту Γ_i. Обозначим через $M_1, \dots, M_n$ координаты образов граничных вершин $v_1, \dots, v_n$ сети Γ_i. Пусть e_j – единственное граничное ребро, инцидентное вершине v_j. Для каждого ребра e_j, отличного от e_1, фиксируем некоторый ориентированный путь γ_j в Γ, соединяющий рабра e_1 и e_j, начинающийся в v_1 и заканчивающийся в v_j. Отметим, что ориентация пути γ_j определяет значения чисел $\varepsilon(e)$ для всех ребер e и γ_j. Далее, пусть $c_1, \dots, c_k$ – циклы из Γ_i, соответствующие некоторой фундаментальной системе циклов графа G_i, на каждом из которых фиксирована ориентация. Как и в случае путей γ_j, ориентация каждого цикла c_q определяет значения чисел $\varepsilon(e)$ для всех ребер e из c_q.

Каждому ребру e сети Γ_i поставим в соответствие вещественную переменную λ_e. Рассмотрим следующую линейную систему уравнений на вещественные переменные λ_e, записанную в векторной форму:

$$\begin{cases} \sum\limits_{e:e\in\gamma_j} \varepsilon(e)\nu(e)\lambda_e = M_j - M_1, & \forall\,\gamma_j, \\ \sum\limits_{e:e\in c_q} \varepsilon(e)\nu(e)\lambda_e = 0, & \forall\,c_q. \end{cases}$$

Эта система линейных уравнений называется *фундаментальной системой невырожденной компоненты* Γ_i, а ее ранг называется рангом компоненты Γ_i и обозначается $\operatorname{rk}\Gamma_i$.

Определение. Фундаментальной системой сети Γ *называется линейная система уравнений, составленная из фундаментальных систем всех невырожденных компонент сети* Γ*.* Рангом $\operatorname{rk}(\Gamma)$ сети Γ *называется ранг ее фундаментальной системы.*

Отметим, что определенная нами фундаментальная система сети Γ зависит от выбора путей γ_j и циклов c_q. Оказывается, однако, что все фундаментальные системы сети Γ эквивалентны как линейные системы уравнений. В частности, множества решений всех фундаментальных систем совпадают, и ранг сети Γ определен корректно, т.е. не зависит от выбора фундаментальной системы сети.

Теорема 1. *Пусть G – погруженная линейная сеть типа G в $\mathbb{R}^n$ с границей φ. Обозначим через r ранг сети Γ, а через m – количество ребер сети Γ. Тогда множество $\big[G,\varphi\big]_\Gamma$ погруженных линейных сетей типа G с границей φ, параллельных Γ, представляет собой (относительную) внутренность выпуклого $(m-r)$-мерного многогранного множества (возможно, не ограниченного) в конфигурационном пространстве подвижных вершин графа G. Более того, многогранное множество $\big[G,\varphi\big]_\Gamma$ содержит не более чем m граней максимальной размерности.*

Оказывается, если граница сети Γ удовлетворяет некоторым естественным ограничениям, то теорему 1 можно усилить. Пусть, как и выше, $\Gamma : G\to\mathbb{R}^N$ – погруженная линейная сеть. Определим *геометрическую границу* $\partial_g\Gamma$ *сети* Γ следующим образом. Вершину v сети Γ отнесем к $\partial_g\Gamma$, если и только если существует такая проходящая через v гиперплоскость в $\mathbb{R}^N$, что одно из ограниченных ею открытых полупространств содержит внутренности всех ребер из Γ, инцидентных v.

Имеет место следующий несложный результат.

Предложение 1. *Погруженная линейная сеть содержится в выпуклой оболочке своей геометрической границы*

Из предложения 1 и теоремы 1 вытекает следующий результат.

Следствие 1. *В предположениях теоремы* 1*, если граница* φ *сети* Γ *содержит геометрическую границу* $\partial_g\Gamma$ *этой сети, то множество* $\big[G,\varphi\big]_\Gamma$ *является внутренностью выпуклого (ограниченного) многогранника размерности* $m-r$*, количество граней максимальной размерности которого не превосходит* m*.*

Замечание. Легко построить пример погруженной линейной сети Γ, граница φ которой не содержит геометрической границы $\partial_g\Gamma$, однако множество $\big[G,\varphi\big]_\Gamma$ ограничено. Было бы интересно найти критерий ограниченности множества $\big[G,\varphi\big]_\Gamma$ в терминах геометрии границы φ.

Из теоремы 1 вытекает ряд интересных следствий для важных классов линейных сетей – локально минимальных и взвешенных минимальных сетей. Напомним их определения.

Пусть $\Gamma : G \to W$ – произвольная погруженная сеть на многообразии W, P – любая точка графа G. *Локальным графом* G_U с центром в точке P назовем произвольную замкнутую связную окрестность U точки P в G, наделенную естественным образом структурой графа. Определим *каноническую границу* ∂G_U локального графа G_U, положив $\partial G_U = (\partial G \cap U) \cup (G \cap \partial U)$. Сеть с границей, равная ограничению отображения Γ на G_U, называется *локальной сетью с центром в точке* P и обозначается через Γ_U. При этом, ограничение отображения Γ на каноническую границу ∂G_U локального графа G_U называется *канонической границей локальной сети* Γ_U и обозначается через $\partial\Gamma_U$.

Пусть теперь W – риманово многообразие. Погруженная сеть Γ с границей φ называется *абсолютно минимальной сетью с границей* φ, если сеть Γ имеет наименьшую длину среди всех сетей, затягивающих образ отображения φ. Погруженная сеть Γ называется *локально минимальной*, если для каждой точки ее параметризующего графа существует абсолютно минимальная локальная сеть с центром в этой точке.

Перед тем как сформулировать следствие из теоремы 1, описывающее устройство пространства всех локально минимальных сетей данного типа с фиксированной границей, приведем следующее важное свойство таких сетей, обосновывающее применимость теоремы 1 в данном случае.

Предложение 2. *Пусть Γ_1 и Γ_2 – две локально минимальных сети в $\mathbb{R}^N$ одного и того же типа и с одной и той же границей. Тогда сети Γ_i – взаимно параллельные погруженные линейные сети.*

Следствие 2. *Пространство всех локально минимальных сетей данного типа с фиксированной границей или пусто, или является (относительной) внутренностью выпуклого многогранника в конфигурационном пространстве подвижных вершин графа G. В последнем случае, размерность многогранника равна $m - r$, где m – число ребер графа G, а r – ранг фундаментальной системы любой из рассматриваемых сетей. Количество граней максимальной размерности этого многогранника не превосходит m.*

Пусть теперь G – связный взвешенный граф с гранией B и положительной весовой функцией ω, заданной на множестве ребер графа G, а W – некоторое риманово многообразие. Каждую сеть вида $\Gamma : G \to W$ назовем в этом случае *взвешенной сетью типа* G. *Взвешенной длиной* $\ell_\omega(\Gamma)$ взвешенной сети Γ типа G называется следуюшая величина:

$$\ell_\omega(\Gamma) = \sum_{e \in E(\Gamma)} \omega(e)\,\ell(e).$$

Отметим, что если G – взвешенный граф и G_U – некоторый его локальный граф, то как на G_U, так и на соответствующей локальной сети Γ_U, естественным образом индуцируется весовая функция. Поэтому для каждой локальной сети взвешенной сети Γ определена взвешенная длина.

Взвешенная сеть Γ типа G, затягивающая конечное множество $M \subset W$ точек многообразия W, называется *взвешенной минимальной сетью с границей* M, если для любой ее точки P некоторая локальная сеть Γ_U с центром в P имеет наименьшую взвешенную длину среди всех сетей типа G_U с той же границей.

Замечание. Отметим, что каждая локально минимальная сеть типа G может быть рассмотрена как взвешенная минимальная сеть того же типа с постоянной весовой функцией. Поэтому, в частности, результаты настоящей работы, касающиеся плоских взвешенных минимальных сетей Штейнера, обобщают результаты из [20] о плоских локально минимальных сетях.

Чтобы использовать теорему 1 для описания множества всех взвешенных минимальных сетей с фиксированными топологией и границей, приведем аналог предложения 2.

Предложение 3. *Пусть* Γ_1 *и* Γ_2 *– две взвешенных минимальных сети в* $\mathbb{R}^N$ *одного и того же типа и с одной и той же границей. Тогда сети* Γ_i *– взаимно параллельные погруженные линейные сети.*

Следствие 3. *Пространство всех взвешенных минимальных сетей данного типа с фиксированной границей или пусто, или является (относительной) внутренностью выпуклого многогранника в конфигурационном пространстве подвижных вершин графа* G*. В последнем случае, размерность многогранника равна* $m - r$*, где* m *– число ребер графа* G*, а* r *– ранг фундаментальной системы любой из рассматриваемых сетей. Количество граней максимальной размерности этого многогранника не превосходит* m*.*

Опишем теперь, чем могут отличаться друг от друга минимальные сети одного типа с фиксированной границей. *Подвижным подграфом* $\widehat{G}$ графа G с границей ∂G называется подграф, порожденный множеством всех подвижных вершин графа G. Подвижную вершину погруженной линейной сети Γ назовем *слабо фиктивной*, если все инцидентные ей ребра лежат на одной прямой. Слабо фиктивная вершина степени 3 называется просто *фиктивной* вершиной.

Разобьем все ребра погруженной линейной сети на уровни. Ребро сети $\Gamma : G \to \mathbb{R}^N$ отнесем к *нулевому уровню*, если оно принадлежит какому-нибудь циклу подвижного подграфа $\widehat{G}$ этой сети. Ребро, не принадлежащее нулевому уровню, но смежное с некоторым ребром нулевого уровня, или инцидентное некоторой слабо фиктивной вершине сети назовем *ребром первого уровня*, а все остальные ребра (т.е. ребра, не лежащие ни на нулевом, ни на первом уровнях) назовем *ребром второго уровня*. Имеет место следующий результат.

Предложение 4. *Любые две локально минимальных (взвешенных) сети одного и того же типа* G *в* $\mathbb{R}^N$ *с границей* φ *имеют одинаковую (взвешенную) длину и могут быть продеформированы друг в* *друга в классе локально минимальных (взвешенных минимальных) сетей того же типа и с той же границей. Более того, при каждой такой деформации остаются неподвижными все ребра второго уровня и все прямые, содержащие ребра первого уровня.*

Разобьем теперь вершины параметризующего графа G на уровни. К *нулевому уровню* отнесем все (подвижные) вершины графа G, которые инцидентны только ребрам нулевого уровня. К *первому уровню* отнесем те подвижные вершины графа G, не попавшие на нулевой уровень, которые не инцидентны ребрам второго уровня. Все остальные вершины графа G отнесем ко *второму уровню*. Для каждой вершины v графа G и каждого граничного отображения φ назовем *локусом вершины v для отображения φ* замыкание подмножества пространства $\mathbb{R}^N$, состоящего из точек вида $\Gamma(v)$ по всем локально минимальным (взвешенным минимальным) сетям Γ типа G с границей φ. Локус вершины v для графа G с границей φ обозначим через $\mathrm{loc}_\varphi(v)$.

Следствие 4. *В сделанных выше предположениях, если v – вершина второго уровня, то ее локус состоит из одной точки. Локус вершин первого и нулевого уровня представляет собой выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^N$, размерность которого не превосходит $\min\{N, m-r\}$, а количество граней максимальной размерности – не превосходит m.*

Для плоских локально минимальных сетей и взвешенных минимальных сетей Штейнера число $(m-\mathrm{rk}\,\Gamma)$ и размерности локусов вершин сетей могут быть вычислены в геометрических терминах.

Теорема 2. *Пусть Γ – не имеющая слабо фиктивных вершин степени 3 плоская локально минимальная сеть (взвешенная минимальная сеть Штейнера) типа G с границей φ. Тогда множество локально минимальных сетей (взвешенных минимальных сетей Штейнера) типа G с границей φ представляет собой внутренность выпуклого $(k+f)$-мерного многогранника, где k – цикломатическое число подвижного подграфа графа G, а f – количество фиктивных вершин сети Γ. Более того, этот многогранник содержит не более чем m граней максимальной размерности, где m – количество ребер сети Γ.*

Далее, локус $\mathrm{loc}_\varphi(v)$ произвольной вершины v из G имеет следующий вид. Если v – вершина второго уровня, то $\mathrm{loc}_\varphi(v)$ состоит из *одной точки; если v – из первого уровня, то $\mathrm{loc}_\varphi(v)$ – невырожденный прямолинейный отрезок; и если v – вершина нулевого уровня, то $\mathrm{loc}_\varphi(v)$ – выпуклый многоугольник, число вершин которого не превосходи m.*

Приведем здесь одно нетривиальное следствие этой теоремы.

Следствие 5. *В обозначениях теоремы 2, если $k = 2$ и $f = 0$, т.е. цикломатическое число подвижного подграфа графа G равно 2, и граф G не содержит фиктивных вершин, то локусы всех вершин нулевого уровня – выпуклые многоугольники с одинаковым числом сторон.*

Замечание. Было бы интересно научиться вычислять размерность локусов вершин и число $\mathrm{rk}\,\Gamma$ для минимальных сетей в $\mathbb{R}^N$ общего вида в геометрических терминах.

Авторы пользуются случаем выразить свою искреннюю и глубокую признательность академику РАН А. Т. Фоменко за его постоянное внимание к их работе.

Литература

1. S. Hildebrandt, A. Tromba, *The Parsimonious Universe.* Copernicus, Springer-Verlag (1996).
2. F. K. Hwang, D. Richards, P. Winter, *The Steiners Three Problem.* Elsevier Scince Publishers (to appear).
3. Z. A. Melzak, *Companion to Concrete Mathematics.* Wiley-Interscience, New York (1973).
4. Дао Чонг Тхи, А. Т. Фоменко, *Минимальные поверхности и проблема Плато.* Наука, М. (1987).
5. А. Т. Фоменко, *Топологические вариационные задачи.* МГУ, М. (1984).
6. А. Т. Фоменко, *Вариационные методы в топологии.* Наука, М. (1982).
7. А. А. Тужилин, А. Т. Фоменко, *Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей.* Наука, М. (1991).
8. А. О. Иванов, *Геометрия плоских локально минимальных бинарных деревьев.* — Мат. сборник **186, No. 9** (1995), 45–76.
9. А. О. Иванов, *Плоские взвешенные минимальные бинарные деревья.* — Фунд. пробл. матем. **2, No. 2** (1996), 511–562.
10. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Решение задачи Штейнера для выпуклых границ.* — Усп. мат. наук **45 No. 2** (1990), 207–208.
11. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Задача Штейнера для выпуклых границ или плоские минимальные сети.* — Мат. сб. **182 No. 12** (1991), 1813–1844.
12. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато.* — Усп. мат. наук **47 No. 2** (1992), 53–115.

13. A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, *The Steiner problem for convex boundaries, I; the regular case.* — Adv. Sov. Math. **15** (1993), 15–92.
14. A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, *The Steiner problem for convex boundaries, II; the regular case.* — Adv. Sov. Math. **15** (1993), 93–131.
15. A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, *Minimal Networks. The Steiner Problem and Its Generalizations.* N. W., Boca Raton, Florida, CRC Press (1994).
16. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Топологии локально минимальных плоских бинарных деревьев.* — Усп. мат. наук **49, вып. 6(300)** (1994), 191–192.
17. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Взвешенные минимальные 2-деревья.* — Усп. мат. наук **50, No. 3** (1995), 155–156.
18. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Геометрия плоских линейных деревьев.* — Усп. мат. наук **51, No. 2** (1996), 161–162.
19. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Число вращения плоских линейных деревьев.* — Мат. сб. **187, No. 8** (1996), 41–92.
20. А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Геометрия множества минимальных сетей данной топологии с фиксированной границей.* — Изв. РАН, Сер. Мат. **61, No. 6** (1997), 109–152.
21. А. А. Тужилин, *Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с четырьмя концами.* — Мат. сб. **187, No. 4** (1996), 117–159.
22. А. А. Тужилин, *Минимальные бинарные деревья с правильной границей: случай скелетов с пятью концами.* — Мат. зам. **61, No. 6** (1997), 907–921.

Ivanov A. O., Tuzhilin A. A. Linear nets and convex polyhedra.

It is proved that the set $[G,\varphi]_\Gamma$ of immersed linear networks in $\mathbb{R}^N$ which are parallel to a given immersed linear network $\Gamma : G \to \mathbb{R}^N$ and have the same boundary φ as Γ, can be configuration space of movable vertices of the graph G. Also, the dimension of the space $[G,\varphi]_\Gamma$ is calculated, and the number of faces is estimated. As an application, the space of all local minimal and weighted local minimal networks in $\mathbb{R}^N$ with fixed topology and boundary is described.

Московский
государственный университет
им. М.В.Ломоносова

Поступило 1 декабря 1997 г.