О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев

О ТОПОЛОГИЧЕСКОМ СТРОЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПРОЕКТИВНЫХ ПОЛНЫХ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ С КВАДРАТИЧНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

§1. Регулярные полные пересечения

Всюду в этой работе используются гомологии и когомологии с целыми коэффициентами; через $b_n(X)$ обозначается число Бетти $\operatorname{rk} H_n(X)$.

Пусть $X \subset \mathbb{C}P^{n+k}$ – регулярное полное пересечение мультистепени $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_k)$. Его дифференциально-топологический тип однозначно определен его (комплексной) размерностью n и мультистепенью $\mathbf{d}$, которую в дальнейшем, как и в случае гиперповерхностей, будем обозначать $\mathbf{d}(X)$: $X \cong X_n(\mathbf{d})$. Из теоремы Лефшеца о гиперплоском сечении следует, что если $i \neq n$, то

$$H_i X = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } i \text{ четно}, i \leqslant 2n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Пусть y – это образующая группы $H^2X = \mathbb{Z}$. Для всех четных n обозначим через $h \in H_n X$ гомологический класс, двойственный $y^{n/2}$. Известно, что класс h примитивен (неделим), см. [4], ср. [2]. Многообразие $X_n(\mathbf{d})$ допускает разложение в связную сумму

$$X_n(\mathbf{d}; s) \cong M_n(\mathbf{d}) \# a(S^n \times S^n),$$

где $b_n(M_n(\mathbf{d})) = 0$ или 2, если n нечетно, и $b_n(M_n(\mathbf{d})) - |\operatorname{sign} X_n(\mathbf{d})| \leqslant 5$, если n четно (см. [4]). Можно показать, что многообразие $M_n(\mathbf{d})$ определено однозначно с точностью до диффеоморфизма (ср. [5]).

§2. Диффеоморфизмы и жесткие изотопии. Полные пересечения общего типа

Далее мы будем главным образом рассматривать полные пересечения с квадратичными особенностями.

В задаче изучения топологического строения полных пересечений с изолированными особенностями представляется наиболее целесообразным использовать следующее определение.

Будем говорить, что два полных пересечения с квадратичными особенностями *диффеоморфны*, если между ними существует гомеоморфизм f, который является диффеоморфизмом между дополнениями множеств их особых точек и такой, что в некоторых окрестностях соответствующих точек существуют подходящие голоморфные координаты $x_1, x_2, \dots, x_{n+k}; y_1, y_2, \dots, y_{n+k}$, в которых полные пересечения локально задаются уравнениями $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 0$, $x_j = 0$ при $j = n+2, \dots, n+k$ и $\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = 0$, $y_j = 0$ при $j = n+2, \dots, n+k$, а f задается формулами $x_i = y_i$ при $i = 1, \dots, n+1$.

Другими словами, в окрестностях особых точек гомеоморфизм f должен быть продолжим до диффеоморфизма некоторых окрестностей этих точек, являющегося голоморфным отображением.

Под *жесткой изотопией* мы понимаем однопараметрическое семейство полных пересечений фиксированной мультистепени с изолированными особенностями фиксированного типа (достаточно того, чтобы в процессе деформации не менялись числа Милнора особых точек). Очевидным образом, жестко изотопные полные пересечения диффеоморфны. Было бы интересно найти пример двух диффеоморфных, но не жестко изотопных полных пересечений.

В свою очередь, наиболее простой путь для доказательства жесткой изотопности полных пересечений состоит в доказательстве неприводимости соответствующих пространств модулей. Так, все неособые полные пересечения фиксированной размерности и мультистепени диффеоморфны. С другой стороны, существует несколько случаев, когда жестко-изотопический тип (а с ним и топологический и дифференциальный типы) особого полного пересечения определен однозначно его размерностью, мультистепенью и количеством особых точек. Для простоты ограничимся случаем квадратичных особенностей.

В множестве $\mathbb{N}^k$ всех мультистепеней введем частичный порядок, считая что $\mathbf{d} \leqslant \mathbf{d}'$, если $d_i \leqslant d_i'$ при всех $i = 1, \dots, k$.

Пусть $P_1, P_2, \dots, P_s \in \mathbb{C}P^{n+k}$. Рассмотрим множество

$$\Phi(n; \{P_1, P_2, \dots, P_s\}) \subset \mathbb{N}^k,$$

такое что $\mathbf{d} \in \Phi(n; \{P_1, P_2, \dots, P_s\})$ тогда и только тогда, когда существует полное пересечение Y мультистепени $\mathbf{d}$ с квадратичными особенностями, такое что $\operatorname{Sing} Y = \{P_1, P_2, \dots, P_s\}$.

Если точки $P_1, P_2, \dots, P_s$ находятся в "общем положении", то это множество зависит только от n и s, так что будем обозначать его $\Phi(n; s)$.

Предложение. *Жестко-изотопический тип полного пересечения мультистепени* $\mathbf{d}$, *имеющего только квадратичные особые точки* $P_1, P_2, \dots, P_s$, *определен однозначно в каждом из следующих двух случаев:*

(1) *особые точки* P_i *фиксированы;*

(2) *особые точки* P_i *находятся в общем положении и мультистепень* $\mathbf{d}$ *достаточно велика в том смысле, что* $\mathbf{d} \in \Phi(n; s)$.

По поводу первого пункта предложения см. [1, 2], второй пункт доказывается аналогично.

§3. Гомологически стандартные полные пересечения

Пусть $X \subset \mathbb{C}P^{n+k}$ – полное пересечение с квадратичными особенностями. Из теоремы Лефшеца о гиперплоском сечении вытекает, что если $i \neq n, n+1$, то $H_i X = H_i \mathbb{C}P^n$. Пусть y – образующая группы $H^2 X$. В случае четного n обозначим через $h \in H_n X$ класс гомологий, двойственный $y^{n/2}$.

Будем говорить, что полное пересечение X *гомологически стандартно*, если выполнены следующие условия:

(1) $\operatorname{Tors} H_n X = 0$,

(2) $H_{n+1} X = H_{n+1} \mathbb{C}P^n$,

(3) в случае, если n четно, класс h является неделимым.

Легко видеть, что второе условие заведомо выполнено, если n четно.

Заметим, что если полное пересечение X является гомологически стандартным, то все его группы гомологий однозначно определены его размерностью, мультистепенью и числом особых точек: $H_i X = H_i \mathbb{C}P^n$ при $i \neq n$, $H_n X$ – свободная абелевая группа ранга $b_n X = b_n(X_n(\mathbf{d})) - s$.

Теорема. *Пусть* $X, X' \subset \mathbb{C}P^{n+k}$ *– два полных пересечения,* X *имеет только квадратичные особенности, причем все они являются изолированными особенностями полного пересечения* X', *и пусть*

$\mathbf{d}' < \mathbf{d}$ *(т. е.* $\mathbf{d}' \leqslant \mathbf{d}$ *и* $d'_i < d_i$ *для некоторого* $i = 1, \dots, k$*). Тогда* X *гомологически стандартно.*

Следствие. *Пусть* $X \subset \mathbb{C}P^{n+k}$ *– полное пересечение с квадратичными особенностями, для которого выполнено одно из следующих условий:*

(1) *мультистепень* $\mathbf{d}(X)$ *лежит "внутри" множества* $\Phi(n; \operatorname{Sing} X)$ *(т. е. существует* $\mathbf{d}' \in \Phi(n; \operatorname{Sing} X)$*, такое что* $\mathbf{d}' < \mathbf{d}$*),*

(2) *особые точки полного пересечения* X *находятся "в общем положении" и* $\mathbf{d}(X)$ *лежит "внутри" множества* $\Phi(n; s)$*.*

Тогда полное пересечение X *гомологически стандартно.*

§4. Топологически стандартные полные пересечения

Будем говорить, что полное пересечение $X \subset \mathbb{C}P^{n+k}$ с квадратичными особенностями является *топологически стандартным*, если оно допускает разложение в связную сумму вида

$$X \cong M_n(\mathbf{d}) \# (a - s)(S^n \times S^n) \# s(S^n \times S^n / \Delta),$$

где Δ – диагональ.

Таким образом, если полное пересечения топологически стандартно, то его дифференциально-топологический тип (в смысле определения, данного в §2) однозначно определен его размерностью n, коразмерностью k, мультистепенью $\mathbf{d}$ и числом s его особых точек (квадратичного типа).

Теорема. *Пусть* $X \subset \mathbb{C}P^{n+k}$ *– гомологически стандартное полное пересечение размерности* n *и мультистепени* $\mathbf{d}$ *с квадратичными особенностями. Пусть выполнено одно из следующих двух условий:*

(1) n *нечетно и* $s < \frac{1}{2} b_n(X_n(\mathbf{d}))$*,*

(2) $n \geqslant 4$ *четно и* $s < \min\{b_+(X_n(\mathbf{d})), b_-(X_n(\mathbf{d}))\}$*.*

Тогда полное пересечение X *топологически стандартно.*

Заметим, что условие (1) всегда выполнено в случае гиперповерхностей и по-видимому практически всегда выполнено в общем случае. В случае гиперповерхностей условие (2) заведомо выполнено, если $(n-4)(d-2) > 17$ и $(n, d) \neq (6, 12)$ (см. [3]).

§5. Топологическое строение полных пересечений общего типа

Комбинируя результаты предыдущих параграфов, мы получаем достаточно точное топологическое описание полных пересечений "общего типа" с квадратичными особенностями.

Теорема. *Пусть* $X \subset \mathbb{C}P^{n+k}$ – *полное пересечение размерности* $n \neq 2$ *и мультистепени* $\mathbf{d}$ *с* s *квадратичными особенностями. Пусть, в дополнение к одному из условий (1), (2) теоремы §4, выполнено одно из следующих двух условий:*

(1) *мультистепень* $\mathbf{d}(X)$ *лежит "внутри" множества* $\Phi(n; \operatorname{Sing} X)$,

(2) *особые точки полного пересечения* X *находятся в общем положении и* $\mathbf{d}(X)$ *лежит "внутри" множества* $\Phi(n; s)$.

Тогда дифференциально-топологический тип полного пересечения X *однозначно определен его размерностью, мультистепенью и количеством особых точек:* $X \cong X_n(\mathbf{d}; s)$.

Более точно, имеет место разложение в связную сумму

$$X \cong X_n(\mathbf{d}, s) = M_n(\mathbf{d}) \# (a - s)(S^n \times S^n) \# s(S^n \times S^n / \Delta),$$

где Δ – *диагональ, а многообразие* $M_n(\mathbf{d})$ *и число* a *зависят только от* n *и* $\mathbf{d}$.

Литература

1. A. Dimca, *On the homology and cohomology of complete intersections with isolated singularities.*– Compositio Math. 58 (1986), 321–339.
2. A. Dimca, *Singularities and topology of hypersurfaces.*– Springer-Verlag (1992).
3. О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, *Оценки числа особенностей комплексной гиперповерхности и смежные вопросы*, Зап. научн. семин. ПОМИ, 231 (1995), 180–190.
4. A. S. Libgober, J. W. Wood, *Differentiable structures on complete intersections.* I, Topology, 21 (1982), 469–482.
5. Н. Ю. Нецветаев, *Диффеоморфность и стабильная диффеоморфность односвязных многообразий*, Алгебра и анализ, 2, № 2 (1990), 112–120.

Ivanov O. A., Netsvetaev N. Yu. On the topological structure of complex projective complete intersections with quadratic singularities.

n-Dimensional complete intersections of "sufficiently high multidegree" in $\mathbb{C}P^{n+k}$, $n \geqslant 3$, with fixed number and, possibly, position of singular points are studied. In the case where all singularities are quadratic, we give a topological description of such a variety in terms of a connected sum decomposition of special type. In this case, the diffeomorphism type of the variety is determined by the dimension, multidegree, and the number of singular points.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 15 апреля 1998 г.