Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

С. Е. Козлов

ГЕОМЕТРИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГРАССМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ. IV

Часть IV. Группы изометрий грассманианов

Настоящая работа продолжает цикл работ [1, 2] автора по геометрии вещественных грассмановых многообразий. Нумерация частей и параграфов этого цикла сквозная. Нумерация формул внутри параграфа самостоятельная. В соответствии с этим 5.1 обозначает первый пункт пятого параграфа, а 12(4) – формулу номер четыре из двенадцатого параграфа. Работа [1] содержит десять параграфов, [2] – шесть.

По возможности мы придерживаемся ранее введенных обозначений. Для удобства читателя напомним наиболее часто встречающиеся из них. Вещественное грассманово многообразие p-мерных ориентированных подпространств n-мерного евклидова пространства V обозначается $G^+ := G_p^+(V)$. Грассманиану G^+ стандартно соответствует набор целочисленных параметров $n := \dim V$, $q := n - p$, $r_0 = \min(p, q)$. Внешнюю алгебру $\Lambda(V)$ мы рассматриваем как 2^n-мерное евклидово пространство. Грассманиан G^+ отождествляется со своим образом при плюккеровом вложении в подпространство p-векторов $\Lambda_p(V) \subset \Lambda(V)$. По каждой точке $\omega \in G^+$ и ортонормированным базисам $e = \{e_i\}$, $i \in [1,p]$, $n = \{n_\alpha\}$, $\alpha \in [1,q]$ пространств V_ω и $V_\omega^\perp$ строится ортонормированный базис $\eta = \{\eta_{i\alpha}\}$, $\eta_{i\alpha} = n_\alpha \wedge (\omega \llcorner e_i)$ касательного пространства $T_\omega G^+$. Под V_ω понимается ранговое пространство поливектора ω (см. 3). Если $\Omega \in \Lambda_m(V)$, то по определению $V(\Omega) := \cup_{\omega\in\Omega} V_\omega$. Для каждого элемента (ω, X) касательного расслоения TG^+ можно столь удачно выбрать базисы e, n (см. 11), что

$$\omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p, \ X = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i n_i \wedge (\omega \llcorner e_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i \eta_{ii}, \ \lambda^i \neq 0, \ r \leqslant r_0.$$

Базис $\{e, n\}$ пространства V называется стандартным базисом пары (ω, X).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант поддержки научных школ).

§17. Ортогональное представление группы $\mathrm{O}(V)$ во внешней алгебре $\Lambda(V)$

17.1. Всякий изоморфизм $A \in \mathrm{Gl}(V)$ однозначно распространяется (см. [3]) до автоморфизма $\widetilde{A}$ внешней алгебры $\Lambda(V)$. На простых p-векторах преобразование $\widetilde{A}$ действует по правилу

$$\widetilde{A}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) = Ae_1 \wedge \cdots \wedge Ae_p. \tag{1}$$

Из (1) вытекает, что отображение $\Psi : \mathrm{Gl}(V) \to \mathrm{Gl}(\Lambda(V))$, $A \mapsto \widetilde{A}$ является представлением группы $\mathrm{Gl}(V)$ в группе преобразований $\mathrm{Gl}(\Lambda(V))$. Из определения скалярного произведения в алгебре $\Lambda(V)$ (см. 1) следует, что сужение гомоморфизма Ψ на группу $\mathrm{SO}(V)$

$$\Psi : \mathrm{SO}(V) \to \mathrm{SO}(\Lambda(V)) \tag{2}$$

является ортогональным представлением группы $\mathrm{SO}(V)$ на векторном пространстве $\Lambda(V)$. Разумеется, то же относится и к группе $\mathrm{O}(V)$. Пространство p-векторов $\Lambda_p(V)$ является инвариантным подпространством представления Ψ. В силу (1), (2) группа $\mathrm{SO}(V)$ эквивариантно и транзитивно действует изометриями на подмногообразии $G^+ \subset \Lambda_p(V)$. Поэтому естественно возникает представление

$$\Psi : \mathrm{SO}(V) \to I(G^+), \tag{3}$$

где $I(G^+)$ означает группу изометрий грассманиана G^+. Тем самым многообразие G^+ наделяется структурой риманова однородного пространства.

17.2. Пусть $\omega \in G^+$. Симметрия $s_\omega \in \mathrm{O}(V)$ относительно плоскости V_ω индуцирует инволютивную изометрию $\Psi(s_\omega)$ риманова однородного пространства G^+, превращающую это многообразие в риманово симметрическое пространство. Такой подход к изучению внутренней (римановой) геометрии грассмановых многообразий позволяет применить аппарат теории групп и алгебр Ли. Общие результаты теории симметрических пространств нуждаются в интерпретации для конкретного многообразия, в нашем случае для грассманиана. В этот момент и проявляется специфика геометрии данного объекта. При этом даже известные общие результаты теории римановых симметрических пространств приобретают новое геометрическое освещение и могут быть получены независимо. В качестве примера к сказанному приведем работу Лейхтвейса [4] о существовании и единственности $SO(V)$-инвариантной римановой метрики на грассмановых многообразия и цикл работ Вонга [5–7] (большинство результатов в этих трех работах анонсированы со ссылкой на последующее опубликование полных доказательств. Нам не удалось обнаружить этих публикаций.) В этих статьях элемент грассманиана рассматривается как подпространство промежуточной размерности в объемлющем евклидовом пространстве V, а методы исследования можно охарактеризовать как методы многомерной аналитической геометрии.

17.3. В §18 дается удобное для дальнейшего алгебраическое описание одного класса вполне геодезических вложений в многообразие $G^+ \subset \Lambda_p(V)$. Построения этих вложений, оставаясь в рамках алгебры $\Lambda(V)$, не ограничиваются подпространством $\Lambda_p(V)$. В §19, без использования методов теории групп и алгебр Ли, доказано, что колмпонента единицы $I_0(G^+)$ группы изометрий $I(G^+)$ совпадает с подгруппой $\Psi(SO(V))$. Двадцатый параграф посвящен изучению ряда внешних свойств плюккерова вложения. В частности, доказана эквивариантность действия группы $I(G^+)$. Этот результат не столь очевиден, так как, вообще говоря, $I(G^+) \neq \Psi(O(V))$ (см. 19.15). Набор упомянутых внешних свойств грассманиана G^+ позволяет явно вычислить кривизну Риччи и доказать, что многообразие G^+ эйнштейново, практически не обладая какой–либо информацией о структуре тензора кривизны. В последнем параграфе с точностью до изоморфизма вычислена группа поворотов многообразия G^+ вокруг произвольной геодезической.

§18. Вполне геодезическое подмногообразие, построенное по паре $\omega \in G^+$, $\Omega \subset T_\omega G^+$

18.1. Ряд геометрических характеристик многообразия G^+ однозначно определен заданием пары (ω, Ω), $\omega \in G_p^+(V)$, $\Omega \subset T_\omega G^+$. Например, при $\dim \Omega = 1$ эта пара, с точностью до конгруэнтности в евклидовом пространстве $\Lambda(V)$, определяет геодезическую, исходящую из ω в направлении Ω. Однако, как видно из 11.4, конгруэнтная ей геодезическая может располагаться в многообразии $G_{\widetilde{p}}^+(W)$ при $\widetilde{p} \leqslant p$ и $W \subset V$. В этом параграфе по паре (ω, Ω) мы построим многообразие $G_{\widetilde{p}}^+(W)$ с наименьшими $\widetilde{p} \leqslant p$ и

$\dim W \leqslant n$, в котором соответствующая им пара определяет те же, рассматриваемые нами, геометрические свойства.

Напомним определения некоторых понятий, введенных в 14. Пусть фиксировано p-мерное подпространство $W \subset V$. Для индексов $r \in [0,p]$, $s \in [0,q]$ определено линейное пространство

$$\Lambda_{r,s}(W) := \operatorname{Lin}\{\Lambda_r(W) \wedge \Lambda_s(W^\perp)\} \subset \Lambda_{r+s} \subset \Lambda(V).$$

$\Lambda_{r,s} := 0$, если $r > p$ или $s > q$. Если пространство W ориентировано, то в нем действует ортогональный оператор Ходжа $*(W) : \Lambda(W) \to \Lambda(W)$. Обозначим ω единичный p-вектор ориентации пространства W. Справедливо утверждение 14.3:

Существует единственный единичный линейный оператор $*_\omega : \Lambda(V) \to \Lambda(V)$, удовлетворяющий равенствам

$$*_\omega(x \wedge y) = *(W)x \wedge y \tag{1}$$

для любых $x \in \Lambda(W)$, $y \in \Lambda(W^\perp)$. Этот оператор является изометрией алгебры $\Lambda(V)$. Его сужение на $\Lambda_{r,s}(W)$ осуществляет линейную изометрию пространств $\Lambda_{r,s}(W)$ и $\Lambda_{p-r,s}(W)$.

Пусть $\omega \in G^+$, $X \in T_\omega G^+$. Тогда $T_\omega G^+ = \Lambda_{p-1,1}(V_\omega)$ и из (1) следует

$$*_\omega(X) = *_\omega \sum_{i=1}^{r} \lambda^i n_i \wedge (\omega \llcorner e_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i e_i \wedge n_i \subset \Lambda_2(V), \tag{2}$$

$$*_\omega(T_\omega G^+) = \Lambda_{1,1}(V_\omega). \tag{3}$$

18.2. Пара (ω, Ω) определяет ряд объектов.

$$\begin{aligned} &\widetilde{V} := V(*_\omega\Omega),\ E := \widetilde{V} \cap V_\omega,\ E^\perp = \widetilde{V} \cap V_\omega^\perp,\ \widetilde{p} := \dim E, \\ &\widetilde{q} := \dim E^\perp,\ \widetilde{n} = \dim \widetilde{V} = \widetilde{p} + \widetilde{q},\ \widetilde{p} \leqslant p,\ \widetilde{q} \leqslant q,\ \widetilde{n} \leqslant n. \end{aligned} \tag{4}$$

Пространства $\widetilde{V}, V_\omega, V_\omega^\perp$ разлагаются в ортогональные суммы

$$\widetilde{V} = E \oplus E^\perp,\ V_\omega = E \oplus E_\perp,\ V_\omega^\perp = E^\perp \oplus E_\perp^\perp. \tag{5}$$

Рассмотрим грассманово многообразие

$$\widehat{G}^+ := G_{\widetilde{p}}^+(\widetilde{V}). \tag{6}$$

Из одномерного пространства $\Lambda_{p-\widetilde{p}}(E_\perp)$ выберем один из двух, ориентирующих это пространство, единичных $(p-\widetilde{p})$-векторов ω_0. Рассмотрим отображение

$$I : \widehat{G}^+ \to G^+,\ \widehat{x} \mapsto \omega_0 \wedge \widehat{x}. \tag{7}$$

Отображение (7) определено корректно, так как сомножители $\omega_0, \widehat{x}$ являются простыми единичными поливекторами, построенными над ортогональными подпространствами пространства V.

Предложение. *Отображение I является наложением, то есть сохраняет расстояние в метрике объемлющего евклидова пространства $\Lambda(V)$.*

Доказательство. Для $\widehat{x}, \widehat{y} \in \widehat{G}^+$ справедливо

$$\langle I(\widehat{x}), I(\widehat{y})\rangle = \begin{vmatrix} \langle\omega_0, \omega_0\rangle & 0 \\ 0 & \langle\widehat{x}, \widehat{y}\rangle \end{vmatrix} = \langle\widehat{x}, \widehat{y}\rangle.$$

Остается заметить, что вектора $\widehat{x}, \widehat{y}, I(\widehat{x}), I(\widehat{y})$ единичны. $\square$

Из 11.4 следует, что отображение I переводит геодезические в геодезические. Поэтому отображение

$$I : \widehat{G}^+ \to \widetilde{G}^+ := I(\widehat{G}^+) \tag{8}$$

является изометрическим диффеоморфизмом (более того, наложением) грассманова многообразия $\widehat{G}^+$ на вполне геодезическое подмногообразие $\widetilde{G}^+ \subset G^+$.

Смена знака у поливектора ω_0 индуцирует отображение $(-I)$.

18.3. Предложение. *Пусть $x \in \widetilde{G}^+$. Тогда*

$$I^{-1}(x) = x \llcorner \omega_0. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $\widehat{x} = I^{-1}(x)$. Тогда $x = \omega_0 \wedge \widehat{x}$ и

$$\langle x \llcorner \omega_0, \widehat{x}\rangle = \langle(\omega_0 \wedge \widehat{x}) \llcorner \omega_0, \widehat{x}\rangle = |\omega_0 \wedge \widehat{x}|^2 = |x|^2 = 1. \tag{10}$$

Из 3.10 следует, что $|x \llcorner \omega_0| \leqslant 1$. Поэтому (10) влечет

$$x \llcorner \omega_0 = \widehat{x} = I^{-1}(x). \quad \square$$

Отображение (7) является сужением линейного отображения

$$I : \Lambda(V) \to \Lambda(V),\ I(x) = \omega_0 \wedge x,$$

поэтому его можно отождествить со своим дифференциалом.

Для пары (ω, Ω) определим точку $\omega \llcorner \omega_0 = \widehat{\omega} \in \widehat{G}^+$. Тогда $I(\widehat{\omega}) = \omega \in \widetilde{G}^+ \subset G^+$.

Теорема. *Для любого вектора $X \in \Omega$ бивектор $*_\omega X$ принадлежит пространству $*_{\widehat{\omega}}(T_{\widehat{\omega}}\widehat{G}^+)$. Справедливо равенство*

$$(I \circ *_{\widehat{\omega}}^{-1} \circ *_\omega)\,|_\Omega = \mathrm{id}_\Omega. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $X \in \Omega$. Каноническое разложение для вектора X можно записать в виде

$$X = \omega_0 \wedge \left[\omega_1 \wedge \sum_i^r \lambda^i e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge n_i \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_r\right],\ \lambda^i \neq 0, \tag{12}$$

где пространства V_{ω_0}, V_{ω_1} и V_Σ попарно ортогональны.

Тогда

$$*_\omega X = \sum_{i=1}^r \lambda^i e_i \wedge n_i.$$

Так как $X \in \Omega$, то $e_i \in E$, $n_i \in E^\perp$. Рассмотрим $\widetilde{p}$-вектор

$$\widehat{X} = \left[\omega_1 \wedge \sum_{i=1}^r \lambda^i e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} n_i \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_r\right] = X \llcorner \omega_0.$$

По определению многообразия $\widehat{G}^+$ этот вектор лежит в касательном пространстве $T_{\widehat{\omega}}\widehat{G}^+$. Кроме того $*_{\widehat{\omega}}\widehat{X} = *_\omega X$. Поэтому $(I \circ *_{\widehat{\omega}^{-1}} \circ *_\omega)X = I(\widehat{X}) = \omega_0 \wedge (X \llcorner \omega_0) = X$. $\square$

Из доказанной теоремы непосредственно следует, что

$$\Omega \subset T_\omega \widetilde{G}^+. \tag{13}$$

Заметим, что в силу 3.8 при фиксированном поливекторе ω_0 сомножители ω_1 и Σ в (12) однозначно определены с точностью до знака.

Итак, для каждого касательного направления $\Omega \subset T_\omega G^+_{p,p+q}$ канонически строится вполне геодезическое подмногообразие $\widetilde{G}^+$, касающееся Ω в точке ω. Это подмногообразие изометрично некоторому грассманову многообразию $G^+_{\widetilde{p},\widetilde{p}+\widetilde{q}}$ при $\widetilde{p} \leqslant p$, $\widetilde{q} \leqslant q$. Аннулируя ориентацию, т.е. факторизуя $\Lambda(V)$ по симметричным относительно начала точкам, мы получаем тот же результат и для многообразий $G_{p,p+q}$. Многообразие $\widetilde{G}$ можно представлять себе как набор p-плоскостей, проходящих через $(p-\widetilde{p})$-плоскость $E_\perp$ (см.(4)) и ортогональных $(q-\widetilde{q})$-плоскости $E_\perp^\perp$ (см. (5)).

Подмногообразия $\widetilde{G}^+$ и $\widetilde{G}$ появлялись в разных работах. В частности, в статье [8] целочисленные параметры $\widetilde{p}, \widetilde{q}$ используются как показатели вырожденности сферического отображения p-поверхности в $\mathbb{R}^{p+q}$.

18.4. Теорема. *Метрика $\widetilde{\rho}$ на многообразии $\widetilde{G}^+ \subset G^+$ внутренняя, т.е. совпадает с метрикой ρ на объемлющем многообразии G^+.*

Доказательство. Отображение (8) является наложением, поэтому
$$\widehat{\rho}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \widetilde{\rho}(x, y), \tag{14}$$
где $x = I(\widehat{x})$, $y = I(\widehat{y})$. Очевидно, наборы ненулевых стационарных углов между парами неориентированных плоскостей $V_{\widehat{x}}$, $V_{\widehat{y}}$ и V_x, V_y совпадают. Расстояния $\widehat{\rho}(\widehat{x}, \widehat{y})$ и $\rho(x, y)$ однозначно определяются этими наборами и знаками скалярных произведений $\langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle$, $\langle x, y \rangle$ (12.4). Из предложения 18.2 следует, что $\langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle = \langle x, y \rangle$. Значит и $\widehat{\rho}(\widehat{x}, \widehat{y}) = \rho(x, y)$, что вместе с (14) влечет наше утверждение. □

18.5. Рассмотрим два простых, ортогональных касательных вектора $X, Y \in T_\omega G^+ \cap G^+$. Определим направление
$$\Omega := \operatorname{Lin}(X, Y). \tag{15}$$
По паре (ω, Ω) построим подмногообразие $\widetilde{G}^+$. Из 11.3 следует
$$\exp_\omega\left(\frac{\pi}{2}X\right) = X, \ \exp_\omega\left(\frac{\pi}{2}Y\right) = Y. \tag{16}$$
Так как подмногообразие $\widetilde{G}^+$ вполне геодезическое, то из (16) вытекает, что $X, Y \in \widetilde{G}^+$. Поэтому можно рассматривать элементы $I^{-1}(X) = \widehat{X}$, $I^{-1}(Y) = \widehat{Y}$ многообразия $\widehat{G}^+$. По теореме 18.4
$$\widetilde{\rho}(X, Y) = \rho(X, Y) = \widehat{\rho}(\widehat{X}, \widehat{Y}). \tag{17}$$

18.6. Теорема. *Пусть $X, Y \in T_\omega G^+ \cap G^+$, $\langle X, Y \rangle = 0$ и* а) $\rho(X, Y) = \frac{\pi}{2}$, б) $\rho(X, Y) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$. *Тогда*

а) $\dim[V(*_\omega X) \cap V(*_\omega Y)] = 1$,

б) *2-плоскости $V(*_\omega X)$ и $V(*_\omega Y)$ вполне ортогональны.*

Доказательство. Пусть $*_\omega X = e \wedge n$, $*_\omega Y = \bar{e} \wedge \bar{n}$, где $e, \bar{e} \in V_\omega$, $n, \bar{n} \in V_\omega^\perp$. Так как $\langle X, Y \rangle = 0$ и оператор $*_\omega$ ортогонален, то
$$\langle e \wedge n, \bar{e} \wedge \bar{n} \rangle = \begin{vmatrix} \langle e, \bar{e} \rangle & 0 \\ 0 & \langle n, \bar{n} \rangle \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим пару $(\omega, \Omega := \mathrm{Lin}\,(X, Y))$. Тогда $E = \mathrm{Lin}\,(e, \bar{e})$, $E^{\perp} = \mathrm{Lin}\,(n, \bar{n})$. Пусть $\langle e, \bar{e}\rangle = 0$ (случай $\langle n, \bar{n}\rangle = 0$ рассматривается аналогично). Если $\dim \widetilde{V} = \dim(E \oplus E^{\perp}) = 3$, то $n = \pm \bar{n}$. В этом случае реализуются условие и утверждение пункта а). Пусть $\dim \widetilde{V} = 4$. Представим поливекторы ω, X, Y в виде

$$\omega = \omega_0 \wedge (e \wedge \bar{e}),\; X = \omega_0 \wedge (n \wedge \bar{n}),\; Y = \omega_0 \wedge (e \wedge \bar{n}).$$

Тогда $\widehat{X} = X \llcorner \omega_0 = n \wedge \bar{e}$, $\widehat{Y} = e \wedge \bar{n}$, $\widehat{G}^{+} = G_2^{+}(\widetilde{V})$. Обозначим λ^1, λ^2 стационарные углы между элементами $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$. Тогда (см.12(12), (16))

$$\langle \widehat{X}, \widehat{Y}\rangle = \cos\lambda^1 \cdot \cos\lambda^2,\; \widehat{\rho}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = (\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2. \tag{18}$$

Так как $X, Y \in \widetilde{G}^{+}$, а отображение I^{-1} есть наложение, то $\langle \widehat{X}, \widehat{Y}\rangle = 0$. Расстояние $\widehat{\rho}(\widehat{X}, \widehat{Y})$ не превосходит π (см.12.6), поэтому, не нарушая общности, будем считать, что $\lambda^2 = \frac{\pi}{2}$.

а) Из (18) следует, что $\lambda^1 = 0$. Это противоречит условию $\dim \widetilde{V} = 4$.

б) В этом случае $\lambda^1 = \lambda^2 = \frac{\pi}{2}$. Значит плоскости $V(n \wedge \bar{e})$ и $V(e \wedge \bar{n})$ вполне ортогональны, поэтому $n \perp \bar{n}$ и выполнено утверждение б). $\square$

§19. Группа $I_0(G^{+})$ собственных изометрий риманова многообразия G^{+}

19.1. Рассмотрим подпространство $W \subset V$ размерности $p \in [1, n-1]$. Для $i, j \in [1, p]$, $\alpha, \beta \in [1, q]$, $p + q = n$ определим множество

$$B = B(W) := \{(e, n) = \{e_i, n_\alpha\} | e_i \in W,\, n_\alpha \in W^{\perp},$$
$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},\, \langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}\} \tag{1}$$

с естественной топологией. Введем в этом множестве отношение эквивалентности

$$(e, n) \overset{b}{\sim} (\widetilde{e}, \widetilde{n}),\ \text{ если } \widetilde{e}_i = \pm e_i,\ \widetilde{n}_\alpha = \pm n_\alpha. \tag{2}$$

Проекция

$$P : B \to B/b \tag{3}$$

является 2^n-листным накрытием.

19.2. Пусть элементы пространства

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(W) := \{\zeta = \{\zeta_{i\alpha}\} | \zeta_{i\alpha} \in \Lambda_{1,1}(W) \cap G^{+}\}$$

удовлетворяют требованиям:

$$\begin{gathered}\text{при } i=j,\ \alpha\neq\beta \text{ или } i\neq j,\ \alpha=\beta\ \dim(V(\zeta_{i\alpha})\cap V(\zeta_{j\beta}))=1,\\ V(\zeta_{i\alpha})\perp V(\zeta_{j\beta}),\\ \text{при } i\neq j,\alpha\neq\beta\ V(\zeta_{i\alpha})\perp V(\zeta_{j\beta}) \text{ (вполне ортогональны).}\end{gathered} \tag{4}$$

Множество $\mathcal{B}$ лежит в многообразии Штифеля ортонормированных pq-реперов пространства $\Lambda_2(V)$, и может рассматриваться как топологическое пространство с индуцированной топологией.

Аналогично(2) введем отношение эквивалентности

$$\zeta\sim\widetilde{\zeta},\ \text{если}\ \widetilde{\zeta}_{i\alpha}=\pm\zeta_{i\alpha}. \tag{5}$$

Элементы пространств B/b и $\mathcal{B}/b$ можно рассматривать как наборы прямых $(\ell_i,m_\alpha):=(V(e_i),V(n_\alpha))$ и 2-плоскостей $\{V_{i\alpha}\}:=\{V(\zeta_{i\alpha})\}$, соответственно. Тогда

$$P((e,n))=\{\ell_i,m_\alpha\},\ \mathcal{P}(\{\zeta_{i\alpha}\})=\{V_{i\alpha}\}, \tag{6}$$

где $\mathcal{P}:\mathcal{B}\to\mathcal{B}/b$ есть проекция на факторпространство. В дальнейших рассмотрениях случай $n=2$ оказывается тривиальным. Поэтому далее, не нарушая общности, будем считать, что $p\leqslant q$ и $q\geqslant 2$.

19.3. Лемма. *При $p\neq q$ пространства B/b и $\mathcal{B}/b$ гомеоморфны. Если $p=q$, то пространство $\mathcal{B}/b$ состоит из двух компонент линейной связности, каждая из которых гомеоморфна пространству B/b.*

Доказательство. Пусть $\zeta\in\mathcal{B}/b$. Для любого индекса $i\in[1,p]$ положим $e_i:=V_{i1}\cap V_{i2}$. Найдутся такие вектора $e,\bar e\in W$; $n,\bar n\in W^\perp$, что $\zeta_{i1}=e\wedge n$, $\zeta_{i2}=\bar e\wedge\bar n$. Так как $\langle\zeta_{i1},\zeta_{i2}\rangle=\langle e,\bar e\rangle\cdot\langle n,\bar n\rangle=0$, то либо $n\perp\bar n$, либо $e\perp\bar e$.

Пусть $n\perp n$. Из (4) следует, что $\dim(V_{i1}\cup V_{i2})=3$, поэтому вектора e и $\bar e$ коллинеарны, а значит

$$\begin{aligned} m_1^i&:=V_n=W^\perp\cap V_{i1},\ m_2^i:=V_{\bar n}=W^\perp\cap V_{i2},\\ \ell_i&:=V_e=V_{\bar e}=V_{i1}\cap V_{i2}\cap W.\end{aligned} \tag{7}$$

При $\alpha\in[3,q]$ площадка $V_{i\alpha}$ пересекает каждую из площадок V_{i1}, V_{i2} по прямой. Если эти прямые различны, то $m_1,m_2\in V_{i\alpha}$, что противоречит условию $\zeta_{i\alpha}\in\Lambda_{1,1}(W)$. Поэтому

$$\ell_i:=V_{i1}\cap\dots\cap V_{iq}\cap W,\ m^i_\alpha:=V_{i\alpha}\cap W^\perp,\ m^i_\alpha\perp m^i_\beta. \tag{8}$$

Пусть $e \perp \bar{e}$. Тогда коллинеарны вектора n и $\bar{n}$. При этом

$\ell_1 := V_\ell = W \cap V_{i1}$, $\ell_2 := V_{\bar{\ell}} = W \cap V_{i2}$, $m_i := V_n = V_{\bar{n}} = V_{i1} \cap V_{i2} \cap W^\perp$.

Аналогично (8) получаем

$$m_i = V_{i1} \cap \dots \cap V_{iq} \cap W^\perp, \ \ell_\alpha := V_{i\alpha} \cap W, \ \ell_\alpha \perp \ell_\beta. \qquad (9)$$

Если $p < q$, то условие (9) исключено. В этом случае справедливо (7). Следовательно, при $i \neq j$ ортогональные площадки $V_{i\alpha} = \mathrm{Lin}\,(\ell_i, m_\alpha^i)$, $V_{j\alpha} = \mathrm{Lin}\,(\ell_j, m_\alpha^j)$ помещаются в трехмерном подпространстве пространства V. Поэтому

$$m_\alpha := m_\alpha^i = m_\alpha^j = V_{1\alpha} \cap \dots \cap V_{p\alpha} \cap W^\perp, \qquad (10)$$

$$V_{i\alpha} = \mathrm{Lin}\,(\ell_i, m_\alpha). \qquad (11)$$

Формулы (7), (10), (11) позволяют определить отображения

$$c : \mathcal{B}/b \to B/b, \ d : B/b \to \mathcal{B}/b, \qquad (12)$$

$$c(\{V_{i\alpha}\}) = \ell = \{(\ell_i, m_\alpha)\}, \ d(\{\ell_i, m_\alpha\}) = \mathcal{L} = \{\mathrm{Lin}\,(\ell_i, m_\alpha)\}.$$

Ясно, что эти отображения непрерывны. По построению $c \circ d = \mathrm{id}$, $d \circ c = \mathrm{id}$, поэтому отображения c и d являются гомеоморфизмами.

19.4. Пусть $p = q$. В этом случае вариант (9) может быть реализован. Рассмотрим отображение

$$\bar{d} : B/b \to \mathcal{B}/b, \ \bar{d}(\{\ell_i, m_\alpha\}) = d(\{\ell_\alpha, m_i\}). \qquad (13)$$

Отображения d, $\bar{d}$ являются топологическими вложениями линейно связного пространства B/b, образы которых не пересекаются. Поэтому пространство $\mathcal{B}/b$ является объединением двух линейно связных, гомеоморфных подпространств

$$\mathcal{B}/b = d(B/b) \cup \bar{d}(B/b). \quad \square$$

19.5. Каждая точка $\omega \in G^+$ определяет пространства $B(V_\omega)$ и $\mathcal{B}(V_\omega)$. Естественно возникают расслоения $B(G^+)$, $(B/b)(G^+)$, $\mathcal{B}(G^+)$, $(\mathcal{B}/b)(G^+)$, соответствующие им накрытия P и $\mathcal{P}$, отображения c, d, $\bar{d}$ (при $p = q$).

19.6. Обозначим $I(G^+)$ множество изометрий многообразия G^+. Будем рассматривать его как топологическое пространство с компактно–открытой топологией. Компоненту линейной связности пространства $I(G^+)$, содержащую тождественное преобразование, обозначим $I_0(G^+)$. Ясно, что образ $\Psi(\mathrm{SO}(V))$ в представлении 17.3 содержится в $I_0(G^+)$.

19.7. Теорема. *Справедливо равенство*

$$I_0(G^+) = \Psi(\mathrm{SO}\,(V)). \tag{14}$$

При $n = 2$ многообразие G^+ есть либо двоеточие, либо окружность. В этом случае (14) тривиально. Далее будем считать, что $1 \leqslant p \leqslant q,\ q \geqslant 2$.

Доказательство. Пусть $g \in I_0(G^+)$, $\omega \in G^+$, $\mathrm{id}_{G+} = E^+ = \Psi(E)$. Рассмотрим путь, соединяющий E^+ с g

$$g : t \mapsto g(t),\ g(0) = E^+,\ g(1) = g.$$

В пространстве $B(V_\omega)$ найдется такой элемент $\{e, n\}$, что $\omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$. По этому набору построим стандартный базис $\eta_{i\alpha} = n_\alpha \wedge (\omega \llcorner e_i)$ касательного пространства $T_\omega G^+$. Тогда

$$\zeta = \{\zeta_{i\alpha} := *_\omega \eta_{i\alpha} = e_i \wedge n_\alpha\} \in \mathcal{B}(V_\omega),$$
$$\mathcal{P}(\zeta) = \{V_{i\alpha} \in \mathcal{B}(V_\omega)/b\}.$$

Кривая $g(t)$ задает движение точки ω по кривой

$$\omega(t) := g(t)\omega, \quad \omega(0) = \omega.$$

Пусть

$$\eta_{i\alpha}(t) := (d_\omega g(t))\eta_{i\alpha},\ \eta_{i\alpha}(0) = \eta_{i\alpha},$$
$$\zeta_{i\alpha}(t) := *_{\omega(t)}\eta_{i\alpha}(t),\ \zeta_{i\alpha}(0) = \zeta_{i\alpha} = e_i \wedge n_\alpha.$$

19.8. Окружность $\gamma_{i\alpha}(u) = \exp_\omega(u\eta_{i\alpha})$ является замкнутой геодезической в G^+ длины 2π. В силу изометричности преобразования $g(t)$, кривая $g(t)\gamma_{i\alpha}$ обладает тем же свойством. Из 13 следует, что касательный вектор $\frac{d}{du}(g(t)\gamma_{i\alpha}(u))$ разложим и единичен. Следовательно, $\eta_{i\alpha}(t) \in T_{\omega(t)}G^+ \cap G^+$, $\zeta_{i\alpha}(t) \in \Lambda_{1,1}(V_\omega)$.

19.9. Простой касательный p-вектор $\eta_{i\alpha}$ можно представить в виде

$$\eta_{i\alpha} = \exp_\omega\left(\frac{\pi}{2}\eta_{i\alpha}\right). \tag{15}$$

Поэтому можно говорить о расстоянии между p-векторами $\eta_{i\alpha}$ и $\eta_{i'\alpha'}$ в метрике риманова многообразия G^+. Так как преобразование $g(t)$ – изометрия, то

$$\begin{aligned}\rho(\eta_{i\alpha}, \eta_{i'\alpha'}) &= \rho(\eta_{i\alpha}(t), \eta_{i'\alpha'}(t)),\\ \langle\eta_{i\alpha}, \eta_{i'\alpha'}\rangle &= \langle\eta_{i\alpha}(t), \eta_{i'\alpha'}(t)\rangle.\end{aligned} \tag{16}$$

Из результатов 18.4 легко следует, что для ортогонального базиса $\{\eta_{i\alpha}\}$ справедливо

$$\rho(\eta_{i\alpha}, \eta_{i'\alpha'}) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \text{ при } i = i',\ \alpha \neq \alpha' \text{ или } i \neq i',\ \alpha = \alpha', \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} \text{ при } i \neq i',\ \alpha \neq \alpha'. \end{cases} \tag{17}$$

Значит соотношения (17) справедливы и для набора $\{\eta_{i\alpha}(t)\}$. Применяя теорему 18.6 для пар p-векторов набора $\{\eta_{i\alpha}(t)\}$, убеждаемся в том, что для $\{\zeta_{i\alpha}(t)\}$ выполнены условия (4), поэтому

$$\zeta(t) = (\omega(t), \{\zeta_{i\alpha}(t)\}) \in \mathcal{B}(G^+),\ \zeta(0) = (\omega, \{e_i \wedge n_\alpha\}),$$

$$\mathcal{P}(\zeta(t)) = V(t) = (\omega(t), \{V_{i\alpha}(t)\}) \in (\mathcal{B}/b)(G^+),\ V(0) = (\omega, \{V_{i\alpha}\}).$$

19.10. При помощи гомеоморфизма c (см.(12)) отождествим расслоения $(\mathcal{B}/b)(G^+)$ и $(B/b)(G^+)$. Используя теорему о накрывающем пути для накрытия $P : B(G^+) \to (B/b)(G^+)$ и пути $(\mathcal{P} \circ \zeta)(t)$, построим накрывающий путь $h : t \to \{e, n\}(t)$, $h(0) = \{e, n\}$. По построению

$$f(t) := \langle \zeta_{i\alpha}(t), e_i(t) \wedge n_\alpha(t) \rangle = \pm 1,\ f(0) = 1.$$

По непрерывности f отсюда следует, что $f = 1$ и

$$\zeta_{i\alpha}(t) = e_i(t) \wedge n_\alpha(t).$$

Определим движение $g_0 \in \mathrm{SO}(V)$ равенством

$$g_0(\{e, n\}) = \{e, n\}(1).$$

Тогда

$$\Psi(g_0)(\omega) = g(\omega),\ d_\omega(\Psi(g_0))\eta_{i\alpha} = \eta_{i\alpha}(1) = (d_\omega g)\eta_{i\alpha}. \tag{18}$$

Так как $\Psi(g_0)$, $g \in I_0(G^+)$, то из (18) следует $\Psi(g_0) = g$. $\square$

19.11. Заметим, что $\zeta(0) \in d((B/b)(V_\omega))$ (см. 19.4), поэтому доказательство не зависит от совпадения или несовпадения p и q.

19.12. Пусть $E := \mathrm{id}_V \in \mathrm{SO}(V)$. При четном $n = \dim V$ центральная симметрия $(-E) \in \mathrm{SO}(V)$, а нормальная подгруппа $\{\pm E\}$ совпадает с центром группы $\mathrm{SO}(V)$.

Предложение. *Для представления* $\Psi : \mathrm{SO}\,(V) \to I(G^{+})$ *справедливо*

$$\ker\varphi = \begin{cases} E, & n - \textit{нечетно}, \\ E, & n - \textit{четно},\ p - \textit{нечетно}, \\ \{\pm E\}, & n - \textit{четно},\ p - \textit{четно}. \end{cases} \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $A \in \ker\Psi$. Так как преобразование $\Psi(A)$ действует на всей алгебре $\Lambda(V)$, то можно говорить о действии движения $\Psi(A)$ на подмножествах пространства $V \subset \Lambda(V)$. При движении $\Psi(A)$ каждая p-плоскость пространства V переходит в себя. Значит A-инвариантами являются и их пересечения. Поэтому каждое направление пространства V является собственным для оператора A. Так как $A \in \mathrm{O}(V)$, то $A = \pm E$. Если n – нечетно, то $(-E) \notin \mathrm{SO}\,(V)$. Остается заметить, что оператор $(-E)$, оставляя любую p-плоскость инвариантной, меняет ее ориентацию только при нечетном p. □

Из доказанного предложения и теоремы 19.10 непосредственно следует, что с точностью до изоморфизма

$$I_0(G_p^{+}(V^n)) = \begin{cases} \mathrm{SO}\,(V), & \text{если } p \text{ или } q \text{ нечетны}, \\ \mathrm{SO}\,(V)/\{\pm E\}, & \text{если } p \text{ и } q \text{ четны}. \end{cases} \tag{20}$$

19.13. При $n \geqslant 2$ группы $\mathrm{SO}\,(V^{2n})$ и $\mathrm{SO}\,(V^{2n})/\{\pm E\}$ алгебраически не изоморфны. Действительно, пусть существует изоморфизм $h : \mathrm{SO}\,(V) \to \mathrm{SO}\,(V)/\{\pm E\}$. Тогда $h(E) = \{\pm E\}$, $h(-E) = \{\pm S\}$, $S \in \mathrm{SO}\,(V)$. При нашем допущении элемент $\{\pm S\}$ коммутирует с любым элементом факторгруппы $\mathrm{SO}\,(V)/\{\pm E\}$, откуда следует, что и элемент S принадлежит центру группы $\mathrm{SO}\,(V)$. Но группа $\mathrm{SO}\,(V)$ не коммутативна ($n \geqslant 2$), поэтому $S \in \{\pm E\}$, что противоречит мономорфности отображения h.

Известно (см. [9]), что при $n \geqslant 3$ группы $\mathrm{SO}\,(V^{2n})/\{\pm E\}$ простые.

19.14. Грассманово многообразие $G_p(V)$ неориентированных плоскостей может быть получено из $G_p^{+}(V)$ факторизацией точек $(\pm\omega)$. Проекция $\sigma : G^{+} \to G$ осуществляет двулистное изометрическое накрытие. Естественно определяется представление

$$\Psi_0 : \mathrm{SO}\,(V) \to I_0(G),\ \Psi_0(A)(\pm\omega) = (\pm\Psi(A)\omega). \tag{21}$$

Любую изометрию $g_0 \in I_0(G)$ можно поднять до изометрии $g \in I_0(G^+)$, то есть $(\pm g\omega) = g_0(\pm\omega)$. Из (21) и теоремы 19.10 следует

$$\Psi_0(\mathrm{SO}\,(V)) = I_0(G). \tag{22}$$

Вычисляя ядро эпиморфизма Ψ_0, аналогично (20) находим

$$I_0(G_p(V^n)) = \begin{cases} \mathrm{SO}\,(V), & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \mathrm{SO}\,(V)/\{\pm E\}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases} \tag{23}$$

Сравнивая (20) с (23) убеждаемся, что группы собственных изометрий многообразий $G_p^+(V)$ и $G_p(V)$ не изоморфны только для нечетномерных грассманианов.

Классификацию полных групп изометрий грассмановых многообразий можно найти в [10].

19.15. Подчеркнем содержательность теоремы 19.7 и ее следствия (22) на одном примере. Будем рассматривать элементы $\omega \in G_2(V^4)$ как 2-плоскости пространства V^4, проходящие через его начало. Пусть изометрия $A \in I(G_2(V^4))$ переводит плоскость ω в свое ортогональное дополнение $\omega^\perp$ в V^4. Используя свойства оператора Ходжа $* : \Lambda_2(V^4) \to \Lambda_2(V^4)$, легко показать, что преобразование A действительно является изометрией.

Предложение. *Не существует биекции $f : V^4 \to V^4$, обладающей свойством*

$$f(\omega) \subset A(\omega), \quad \forall \omega \subset V^4.$$

Доказательство. Рассмотрим набор $\{\ell_i\}_{i=1}^4$ из четерых попарно ортогональных прямых, проходящих через начало пространства V^4. Пусть $\omega_{ij} := \mathrm{Lin}\,(\ell_i, \ell_j)$. Выберем произвольную точку $x \in \ell_1$. По определению преобразования A

$$A(\omega_{12}) = \omega_{34}, \;\; A(\omega_{13}) = \omega_{24}, \;\; A(\omega_{14}) = \omega_{23}.$$

Допустим, что биекция f существует. Тогда

$$f(x) \in \omega_{34} \cap \omega_{24} \cap \omega_{23} = \{0\}, \; \forall x \in \ell_1,$$

что противоречит биективности f. $\square$

Таким образом, изометрия A не может быть порождена точечным преобразованием пространства V. Для собственных изометрий грассманианов такого сорта примеры невозможны, так как по теореме 19.10 все такие изометрии порождаются автоморфизмами внешней алгебры $\Lambda(V)$.

§20. Некоторые внешние свойства плюккерова вложения

20.1. Всякая изометрия $g \in I_0(G^+)$ многообразия $G^+ \subset \Lambda_p$ может быть распространена до движения евклидова пространства Λ_p. Действительно, по теореме 19.10 $g \in \Psi(\mathrm{SO}(V))$, а каждый элемент этой группы является сужением ортогонального автоморфизма алгебры $\Lambda(V) \supset \Lambda_p(V)$. Для полной группы изометрий грассманиана G^+ имеет место.

Теорема. *Группа изометрий $I(G^+)$ действует на подмногообразии $G^+ \subset \Lambda_p$ эквивариантно.*

Доказательство. Достаточно показать, что преобразование $g \in I(G^+)$, действуя на любую пару точек $\omega_0, \widetilde{\omega}_0 \in G^+$, сохраняет скалярное произведение $\langle \omega_0, \widetilde{\omega}_0 \rangle$. Рассмотрим кратчайшую $\gamma_0 : [0,1] \to G^+$, соединяющую точку ω_0 с $\widetilde{\omega}_0$. Тогда $\widetilde{\omega}_0 = \exp_{\omega_0} \dot{\gamma}_0(0)$. Вектор $X_0 = \dot{\gamma}_0(0)$ имеет каноническое разложение

$$X_0 = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i (\xi_0)_i, \ r \leqslant r_0 = \min(p,q).$$

Набор $\{\xi_0)_i\}$ состоит из попарно ортогональных, единичных, простых p-векторов касательного пространства $T_\omega G^+$. Причем при $i \neq j$, $\rho((\xi_0)_i, (\xi_0)_j) = \pi/\sqrt{2}$. Пусть изометрия g и ее дифференциал $d_{\omega_0} g$ действует на объекты $\omega_0, \gamma_0, (\xi_0)_i$ аннулированием "нолика". В силу изометричности отображения g, набор $\{\xi_i\}$ векторов из пространства $T_\omega G^+$ сохраняет все перечисленные свойства набора $\{(\xi_0)_i\}$. Значит для каждой пары ξ_i, ξ_j, $i \neq j$ векторов выполнены условия теоремы 18.6. Откуда следует, что $V(*_\omega \xi_i) \perp V(*_\omega \xi_j)$ (вполне ортогональны). Поэтому существуют такие ортонормированные базисы $e = \{e_i\}_{i=1}^p$, $n = \{n_\alpha\}_{\alpha=1}^q$ пространств V_ω, $V_\omega^\perp$, что каноническое разложение вектора X принимает вид

$$X = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i \xi_i.$$

Так как g – изометрия, то $\widetilde{\omega} = g(\widetilde{\omega}^0) = \exp_\omega X$. Используя каноническое представление экспоненциального отображения 11.3 находим

$$\langle \omega_0, \widetilde{\omega}_0 \rangle = \langle \omega_0, \exp_{\omega_0} X_0 \rangle = \cos \lambda^1 \ldots \cos \lambda^r = \langle \omega, \exp_\omega X \rangle = \langle \omega, \widetilde{\omega} \rangle. \square$$

20.2. Заметим, что базис (e, n), построенный при доказательстве теоремы "обслуживает" только один касательный вектор $X_0 \in T_{\omega_0}G^+$. Поэтому приведенная конструкция не позволяет найти преобразование из $\Psi(\mathrm{O}(V))$, совпадающего с g. Пример 19.15 показывает, что такого преобразования может и не существовать.

20.3. Важными характеристиками внешней геометрии подмногообразия $G^+ \subset \Lambda_p$ в точке $\omega \in G^+$ являются вектор средней кривизны $H(\omega)$ и свойства сферического отображения. Так как группа $\Psi(\mathrm{SO}\,(V))$ эквивариантно действует на G^+ изометриями, то $|H(\omega)|$ не зависит от $\omega \in G^+$. Подчеркнем, что это утверждение не требует применения теорем 19.10 и 20.1. Связи между внешней и внутренней геометриями подмногообразия G^+ позволяют доказать, что риманово многообразие G^+ эйнштейново (см. [4]). Отметим, что, в отличии от [4], кривизна Риччи будет вычислена без использования какой-либо информации о тензоре кривизны грассманиана G^+.

20.4. Через B обозначим вторую форму подмногообразия G^+ в Λ_p. Рассмотрим стандартный ортонормированный базис $\{\eta_{i\alpha}\}$ касательного пространства $T_\omega G^+$. Многообразие G^+ лежит в единичной сфере S^{N-1} пространства Λ_p, где $N = \dim \Lambda_p = \binom{n}{p}$. Кривая $\gamma : t \mapsto \exp_\omega(t\eta_{i\alpha})$ задает натуральную параметризацию большой окружности в сфере S^{N-1}, поэтому

$$H_\omega = \frac{1}{pq}\sum_{i,\alpha} B_\omega(\dot\gamma_{i\alpha}, \dot\gamma_{i\alpha}) = \frac{1}{pq}\sum_{i,\alpha}(-\omega) = -\omega, \ \ |H_\omega| = 1. \qquad (1)$$

Из (1) следует, что многообразие G^+ является минимальной поверхностью в сфере S^{N-1}.

20.5. Сферическое отображение грассманиана G^+. Будем рассматривать G^+ как ориентированное минимальное подмногообразие сферы $S^{N-1} \subset \Lambda_p$. Отметим два способа построения сферического отображения $\mathfrak{g}$ этого подмногообразия.

1) Каждой точке $\omega \in G^+$ сопоставляется вполне геодезическое подмногообразие сферы, касательное к $T_\omega G^+$ в точке ω. На множестве таких подмногообразий строится структура однородного пространства с инвариантной римановой метрикой (см. [11]).

2) Точке $\omega \in G_p^+$ сопоставляется элемент $(\omega, T_\omega G_p^+)$ грассманова расслоения $\mathcal{G}_p^+(S^{N-1})$ над сферой. В свою очередь расслоение

$\mathcal{G}_p^+(S^{N-1})$ является подрасслоением риманова векторного расслоения $\Lambda(S^{N-1})$ с элементом (ω, φ), $\varphi \in \Lambda(T_\omega S^{N-1})$ (см. [12]).

В работах [11, 12] вычислены формы метрик поверхности, индуцированные этими сферическими отображениями. Оказалось, что для поверхностей в сфере (вторая конструкция рассматривалась для произвольных римановых многообразий) эти формы совпадают и имеют вид

$$ds_{\mathfrak{g}}^2 = m\langle H, B\rangle - \mathrm{Ric} + (m-1)ds^2, \tag{2}$$

где m – размерность, B – вторая форма, Ric – форма Риччи, ds^2 – форма метрики и H вектор средней кривизны подмногообразия.

Мы воспользуемся вторым способом построения сферического отображения

$$\mathfrak{g} : G^+ \to \Lambda(S^{N-1}). \tag{3}$$

20.6. Предложение. *Отображение $\mathfrak{g}$ есть гомотетия, в том смысле, что формы ds^2 и $ds_{\mathfrak{g}}^2$ пропорциональны.*

Доказательство. Этот результат сразу же следует из возможности совместить два вектора из $T_\omega G^+ \cap G^+$ преобразованием группы $\Psi(\mathrm{SO}\,(V))$. Для вычисления коэффициента пропорциональности рассмотрим вектор $X \in T_\omega G^+ \cap G^+$. Не нарушая общности, будем считать, что в стандартном базисе $\{\eta_{i\alpha}\}$ вектор $X = \eta_{11}$. Параллельно перенесем базис $\{\eta_{i\alpha}\}$ вдоль кривой $\gamma(t) = \exp_\omega(t\eta_{11})$. Тогда

$$\widetilde{\gamma}(t) := (\mathfrak{g} \circ \gamma)(t) = \eta_{11}(t) \vee \dots \vee \eta_{pq}(t), \tag{4}$$

где символ $\vee$ обозначает операцию умножения в алгебре $\Lambda(T_{\gamma(t)}G^+)$. Напомним, что базис $\eta_{i\alpha}(t)$ пространства $T_{\gamma(t)}G^+$ строится по базису $(e_i(t), n_\alpha(t))$ пространства V по правилу

$$\begin{gathered}\eta_{i\alpha}(t) = n_\alpha(t) \wedge (\gamma(t) \llcorner e_i(t)), \text{ где } e_1(t) = \cos te_1 + \sin tn_1,\\ n_1(t) = -\sin te_1 + \cos tn_1,\ e_i = \mathrm{const},\ n_\alpha = \mathrm{const} \text{ при } i, \alpha > 1.\end{gathered} \tag{5}$$

Из (5) следует, что $\eta_{1\alpha} = \mathrm{const}$, $\eta_{i1} = \mathrm{const}$, при $i, \alpha > 1$. Векторное поле $\eta_{11}(t)$ ковариантно постоянно во внутренней геометрии сферы. Значит

$$\widetilde{\gamma}(t) = \left[\bigvee_{i,\alpha \geqslant 2} (n_\alpha \wedge (\gamma(t) \llcorner e_i))\right] \vee \gamma_0,\ \gamma_0 = \mathrm{const}, \tag{6}$$

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \sum_{i,\alpha\geqslant 2} \zeta_{i\alpha}(t), \tag{7}$$

где $\zeta_{i\alpha}(t)$ получается заменой соответствующего элемента в произведении (6) на его производную, равную $n_\alpha \llcorner (\eta_{11} \llcorner e_i)$. Так как все слагаемые в сумме (7) попарно ортогональны и единичны, то $|\dot{\gamma}(t)|^2 = (p-1)(q-1)$, откуда находим

$$ds^2_{\mathfrak{g}} = (p-1)(q-1)ds^2. \tag{8}$$

□

20.7. Следствие. *Кривизна Риччи* $\mathrm{Ric}\,(G^+)$ *многообразия* G^+ *равна* $(n-2)$.

Грассманиан G^+ минимален в сфере S^{N-1}, поэтому 20.7 непосредственно следует из (2),(8) ($m = \dim G^+ = pq$).

20.8. При $p = 1$ или $q = 1$ многообразие G^+ лежит в S^N как вполне геодезическая сфера. Поэтому в интерпретации 1) сферический образ G^+ вырождается в точку, что проясняет смысл равенства $ds^2_{\mathfrak{g}} = 0$.

Из (8) следует, что сферическое отображение грассманиана $G^+_2(V^4)$ является изометрией.

§21. Повороты грассманиана вокруг геодезической

21.1. Рассмотрим произвольную геодезическую γ в многообразии G^+. Группу

$$\mathcal{H}_\gamma := \{\widetilde{A} \in I_0(G^+) | \widetilde{A}\gamma(t) = \gamma(t)\ \forall t \in \mathbb{R}\} \tag{1}$$

назоваем *группой поворотов* грассманиана G^+ вокруг геодезической γ. По теореме 19.7 для каждого *поворота* $\widetilde{A} \in \mathcal{H}_\gamma$ найдется такое *вращение* $A \in \mathrm{SO}\,(V)$, что $\widetilde{A} = \Psi(A)$. Поэтому естественно рассмотреть *группу вращений* многообразия G^+ вокруг геодезической γ

$$\mathcal{H}^0_\gamma := \{A \in \mathrm{SO}\,(V) | \widetilde{A}\gamma(t) = \gamma(t)\ \forall t \in \mathbb{R}\}. \tag{2}$$

Предложение. *Имеет место изоморфизм*

$$\mathcal{H}_\gamma \simeq \begin{cases} \mathcal{H}^0_\gamma/\{\pm E\}, & p, q \text{ четны}, \\ \mathcal{H}^0_\gamma, & p \text{ или } q \text{ нечетно}. \end{cases} \tag{3}$$

Доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству формулы 19(20). В силу (3) группа поворотов полностью определяется группой вращений. В представлении Ψ каждый поворот $\widetilde{A}$ имеет либо один прообраз – вращение A (p или q нечетно), либо два вращения $\{\pm A\}$ (p и q четны). Поэтому, если специально не нужно подчеркивать разницу, мы будем обозначать повороты и вращения одной буквой.

21.2. Пусть ортонормированные базисы $e = \{e_i\}$, $n = \{n_\alpha\}$ пространств V_ω, $V_\omega^\perp$ выбраны так, что $\omega = e_1 \wedge \dots \wedge e_p$. Любой оператор $A \in \Psi(\mathrm{O}(V))$ является автоморфизмом алгебры $\Lambda(V)$. Преобразование $*_\omega$ осуществляет изоморфизм этой алгебры.

Предложение. *Пусть $A \in \Psi(\mathrm{O}(V))$ и $A\omega = \omega$. Тогда*

$$*_\omega \circ A = A \circ *_\omega. \tag{4}$$

Доказательство. Подпространство $W = V_\omega \subset V$ индуцирует разложение внешней алгебры $\Lambda(V)$ в ортогональную сумму (см. 14.2)

$$\Lambda(V) = \oplus_{r,s\geqslant 0}\Lambda_{r,s}(W),\ r \in [0,p],\ s \in [0,q].$$

Базисам e, n соответствует базис $\{e_\lambda \wedge n_\mu\}$, $\lambda \in \Lambda(p,r)$, $\mu \in \Lambda(q,s)$ пространства $\Lambda_{r,s}(W)$. Обозначим $Ae_i = \widetilde{e}_i$, $An_\alpha = \widetilde{n}_\alpha$. Так как $A\omega = \omega$, то $\omega = e_1 \wedge \dots \wedge e_p = \widetilde{e}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{e}_p$. В силу 14.7 справедливо

$$(A \circ *_\omega)(e_\lambda \wedge n_\mu) = A(*(W)e_\lambda \wedge e_\mu) = A\left[((e_1 \wedge \dots \wedge e_p) \llcorner e_\lambda) \wedge n_\mu\right] =$$
$$= ((\widetilde{e}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{e}_p) \llcorner \widetilde{e}_\lambda) \wedge \widetilde{n}_\mu,$$
$$(*_\omega \circ A)(e_\lambda \wedge n_\mu) = *_\omega(\widetilde{e}_\lambda \wedge \widetilde{e}_\mu) = \left[(\widetilde{e}_1 \wedge \dots \wedge \widetilde{e}_p) \llcorner \widetilde{e}_\lambda) \wedge \widetilde{n}_\mu\right],$$

откуда следует (4). □

21.3. Специализируем выбор базисов e, n так, чтобы

$$\gamma(0) = \omega = e_1 \wedge \dots \wedge e_p,\ \dot{\gamma}(0) = X = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i n_i \wedge (\omega \llcorner e_i) = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i \xi_i,\ \lambda^i \neq 0.$$

Напомним, что сужение оператора $*_\omega$ на касательное пространство $T_\omega G^+$ осуществляет изометрический изоморфизм $*_\omega : T_\omega G^+ \to \Lambda_{1,1}(V_\omega)$, при котором

$$*_\omega(X) = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i e_i \wedge n_i. \tag{5}$$

Пара (ω, X) определяет ряд объектов (см. 18.2):

$$\widetilde{V} = V(*_\omega X) = \mathrm{Lin}\,(e_i, n_i),\ E = \widetilde{V} \cap V_\omega = \mathrm{Lin}\,(e_i),\ E^\perp = \widetilde{V} \cap V_\omega^\perp = \\ = \mathrm{Lin}\,(n_i),\ i \in [1, r],\ \widetilde{p} = \widetilde{q} = r = \dim E = \dim E^\perp,\ \dim \widetilde{V} = 2r. \tag{6}$$

Обозначим через $\widetilde{V}^\perp$ ортогональное дополнение пространства $\widetilde{V}$ в V. Набор чисел $\{\lambda^i\}$ задает разложение пространства $\widetilde{V}$ в ортогональную сумму подпространств (см. 14.1), соответствующих наборам одинаковых коэффициентов λ^i

$$\widetilde{V} = \oplus_{j=1}^{\ell} E^{2k_j},\ E^{2k_j} = E^{k_j} \oplus \widetilde{E}^{k_j},\ \widetilde{V}^\perp = E_0 \oplus \widetilde{E}_0,\ \sum_{j=1}^{\ell} k_j = r, \\ V_\omega = \left(\oplus_{j=1}^{\ell} E^{k_j}\right) \oplus E_0,\ V_\omega^\perp = \left(\oplus_{j=1}^{\ell} \widetilde{E}^{k_j}\right) \oplus \widetilde{E}_0. \tag{7}$$

21.4. По теореме 3.8 о разложении произвольного p-вектора на простые сомножители p-вектор X можно однозначно (с точностью до знаков) представить в виде

$$X = \widetilde{X} \wedge X_0,$$

где поливектор X_0 разложим, а $\mathrm{Ann}\,\widetilde{X} = 0$. Нетрудно показать, что

$$V_{\widetilde{X}} = \widetilde{V},\ V_{X_0} = \mathrm{Ann}\,X_0 = E_0.$$

21.5. Теорема. *Подпространства E^{k_j}, $\widetilde{E}^{k_j}$, E_0, $\widetilde{E}_0$ (см.* (7)*) инвариантны относительно действия группы $\mathcal{H}_\gamma^0$.*

Доказательство. Перепишем равенство (5), собрав слагаемые бивекторы при одинаковых λ^i. Тогда, соответственно изменив нумерацию, получим

$$*_\omega X = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda^i \zeta_j,\ \zeta_j = e_j^1 \wedge n_j^1 + \cdots + e_j^{k_j} \wedge n_j^{k_j};\ \lambda^i \neq \lambda^j \text{ при } i \neq j. \tag{8}$$

Рассмотрим преобразование $A \in \mathcal{H}_\gamma^0 \subset \mathrm{SO}\,(V)$. В силу линейности A можно считать, что $dA = A$. Вращение A оставляет неподвижной геодезическую γ, поэтому

$$AX = A\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(0) = X.$$

Подействуем на это равенство оператором $*_\omega$. Тогда, с учетом (4),(8), будет

$$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda^j \zeta_j = *_\omega X = *_\omega AX = A *_\omega X = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda^j (A\zeta_j).$$

Из этого равенства и [13] следует, что

$$\begin{aligned} A\zeta_j &= \zeta_j, \\ AE^{2k_j} &= V(A\zeta_j) = V(\zeta_j) = E^{2k_j}. \end{aligned} \tag{9}$$

Вращенеие A оставляет неподвижной точку $\gamma(0) = \omega$, поэтому

$$AE^{k_j} = A(E^{2k_j} \cap V_\omega) = AE^{2k_j} \cap V(A\omega) = E^{2k_j} \cap V_\omega = E^{k_j}.$$

Из ортогональности оператора A и A-инвариантности E^{2k_j}, E^{k_j} следует A-инвариантность $\widetilde{E}^{2k_j}$. Формула (9) и A-инвариантность пространств E^{k_j}, $\widetilde{E}^{k_j}$, V_ω влечет A-инвариантность пространств E_0 и $\widetilde{E}_0$. □

21.6. Лемма. *Пусть $2k$-мерное евклидово пространство E^{2k} представлено в виде ортогональной суммы $E^{2k} = E^k \oplus \widetilde{E}^k$ двух k-мерных подпространств; $e = \{e_i\}$, $n = \{n_i\}$, $i \in [1,k]$ – ортонормированные базисы пространств E^k и $\widetilde{E}^k$; $\zeta = \left(\sum_{i=1}^k e_i \wedge n_i\right) \in \Lambda_2(E^{2k})$ – фиксированный бивектор. Тогда группа*

$$\mathcal{H} := \{A \in \mathrm{O}\,(E^{2k}) |\, AE^k = E^k,\ A\zeta = \zeta\} \tag{10}$$

изоморфна группе $\mathrm{O}\,(k)$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{H}$. Из (10) следует, что найдутся такие ортогональные матрицы $a = (a_i^j)$ и $b = (b_i^j)$, что $Ae_i = a_i^j e_j$, $An_i = b_i^j n_j$. При этом

$$A\zeta = \sum_{i=1}^{k} (a_i^m e_m \wedge b_i^p n_p) = \zeta = \sum_{i=1}^{k} e_i \wedge n_i.$$

Бивекторы ζ и $A\zeta$ имеют длину, равную $\sqrt{k}$. Поэтому справедлива эквивалентность

$$\zeta = A\zeta \Longleftrightarrow \langle \zeta, A\zeta \rangle = k \Longleftrightarrow$$

$$k = \langle \sum_{i=1}^{k} (a_i^m e_m \wedge b_i^p n_p), \sum_{j=1}^{k} e_j \wedge n_j \rangle = \sum_{i,j} a_i^m b_i^p \delta_{mj} \delta_{pj} =$$

$$= \sum_i a_i^j b_i^j \leqslant \sum_i \left\{ \left[\sum_i (a_i^j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[\sum_j (b_i^j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} = k \Longleftrightarrow a = b.$$

Отображение $A \mapsto a$ устанавливает искомый изоморфизм. □

Из доказательства леммы следует, что

$$\mathcal{H} \subset \mathrm{SO}\,(E^{2k}). \tag{11}$$

21.7. Геодезической $\gamma \subset G^+$ соответствует (см. 21.3) некоторый комбинаторный тип

$$\mathcal{K} := (k_1, \cdots, k_\ell),\ k_j \geqslant 1,\ \sum_{j=1}^{\ell} k_j = r \leqslant r_0 = \min(p, q).$$

Рассмотрим группы

$$\begin{aligned} \mathrm{O}\,(\mathcal{K}) : &= [\mathrm{O}\,(k_1) \times \cdots \times \mathrm{O}\,(k_e)] \times \mathrm{O}\,(p - r) \times \mathrm{SO}\,(q - r), \\ \mathrm{O}^+\,(\mathcal{K}) : &= \{A \in \mathrm{O}\,(\mathcal{K}) |\, \det A = 1\} \subset \mathrm{O}\,(\mathcal{K}). \end{aligned} \tag{12}$$

Теорема. *Группа $\mathcal{H}_\gamma^0$ вращений геодезической $\gamma \subset G^+$ изоморфна группе $\mathrm{O}^+\,(\mathcal{K})$.*

Доказательство. Базисы $e = \{e_i\}$ и $n = \{n_\alpha\}$ и лемма 21.6 естественно определяют вложение

$$d : \mathrm{O}\,(\mathcal{K}) \to \left[\mathrm{SO}\,(E^{2k_1}) \times \cdots \times \mathrm{SO}\,(E^{2k_\ell})\right] \times \mathrm{O}\,(E_0) \times \mathrm{SO}\,(\widetilde{E}_0). \tag{13}$$

Пусть $A \in \mathcal{H}_\gamma^0$. По теореме 21.5 вращение A можно представить в виде $A = [A_1 \times \cdots \times A_e] \times A_0 \times \widetilde{A}_0$, где $A_j \in \mathrm{SO}\,(E^{k_j})$, $A_0 \in \mathrm{O}\,(E_0)$, $\widetilde{A}_0 \in \mathrm{O}\,(\widetilde{E}_0)$. Из (9) следует, что для каждого $j \in [1, \ell]$ преобразование A_j принадлежит соответствующей группе $\mathcal{H}_j$ (см.(10)). Поэтому $A_j \in d(\mathrm{O}\,(\mathcal{K}))$. Так как $A\omega = \omega$, то $[\det A_1 \cdots \det A_\ell] \cdot \det A_0 = 1$. Откуда $\det \widetilde{A}_0 = \det A = 1$. Из сказанного следует, что $A \in d(\mathrm{O}^+\,(\mathcal{K}))$.

Пусть $A \in d(\mathrm{O}^+\,(\mathcal{K}))$. Достаточно показать, что преобразование $A = [A_1 \times \cdots \times A_\ell] \times A_0 \times \widetilde{A}_0$ оставляет неподвижной пару

(ω, X). По определению группы $\mathrm{O}^+(\mathcal{K})$ и вложения d справедливо $\det A = [\det A_1 \cdots \det A_\ell] \cdot \det A_0 = 1$. Значит $A \in \mathrm{SO}(V)$ и $A\omega = (\det A)\omega = \omega$.

Из леммы следует, что для каждого $j \in [1,\ell]$ $A\zeta_j = \zeta_j$. Коммутативность операторов $*_\omega$ и A влечет коммутативность $*_\omega^{-1}$ и A. Поэтому

$$AX = A *_\omega^{-1} (*_\omega X) = A *^{-1} \left(\sum_{j=1}^{\ell} \lambda^i \zeta_i\right) = *^{-1} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda^j A\zeta_j =$$

$$= *^{-1} \sum_{j=1}^{\ell} \lambda^j \zeta_j = X. \quad \square$$

Формула (3) и теорема 21.7 описывают группу поворотов $\mathcal{H}_\gamma$ с точностью до изоморфизма.

21.8. В грасмановом многообразии $G_p(V)$ неориентированных p-плоскостей, реализованном как факторпространство грассманиана G^+, элементы группы $d(\mathrm{O}(\mathcal{K}))$ сохраняют пару $((\pm\omega), X)$. Следовательно группа вращений геодезической $\gamma \subset G_p(V)$ изоморфна группе $[\mathrm{O}(k_1) \times \cdots \times \mathrm{O}(k_\ell) \times \mathrm{O}(p-r) \times \mathrm{O}(q-r)]^+$.

21.9. Подгруппа $\mathcal{H}$ (см.(8)) естественно связана с комплексной структурой на пространстве E^{2k}, определяемой с помощью бивектора ζ

$$Je_i := n_i, \ Jn_i := -e_i, \ J^2 = -\mathrm{id}(E^{2k}). \tag{14}$$

Предложение. *Скалярное произведение*

$$(x, y) := \langle x, y\rangle - i\langle \zeta, x \wedge y\rangle, \ x, y \in E^{2k} \tag{15}$$

является эрмитовым по отношению к комплексной структуре J.

Доказательство. Все свойства эрмитова скалярного произведения легко получаются из соотношения $(ix, y) = i(x, y)$. Проверим его.

Справедливы равенства

$$(ix, y) = (Jx, y) = \langle Jx, y\rangle - i\langle \zeta, Jx \wedge y\rangle,$$

$$i(x, y) = i\langle x, y\rangle + \langle \zeta, x \wedge y\rangle.$$

Откуда

$$(ix, y) = i(x, y) \Longleftrightarrow \langle Jx, y\rangle = \langle \zeta, x \wedge y\rangle, \ \langle \zeta, Jx \wedge y\rangle = -\langle x, y\rangle. \tag{16}$$

Пусть $X = u^i e_i + v^i n_i$. Тогда $Jx = u^i n_i - v^i e_i$ и

$$\langle Jx, y\rangle = u^i\langle n_i, Y\rangle - v^i\langle e_i, Y\rangle, \ \ \langle \zeta, x\wedge y\rangle = \sum_i \langle e_i\wedge n_i, x\wedge y\rangle =$$

$$= \sum_i \begin{vmatrix} \langle e_i, x\rangle & \langle e_i, y\rangle \\ \langle n_i, x\rangle & \langle n_i, y\rangle \end{vmatrix} = u^i\langle n_i, y\rangle - v^i\langle e_i, y\rangle = \langle Jx, y\rangle.$$

$$\langle \zeta, Jx\wedge y\rangle = \sum_i \langle e_i\wedge n_i, Jx\wedge y\rangle = \sum_i \begin{vmatrix} \langle e_i, Jx\rangle & \langle e_i, y\rangle \\ \langle n_i, Jx\rangle & \langle n_i, y\rangle \end{vmatrix} =$$

$$= -v^i\langle n_i, y\rangle - u^i\langle e_i, y\rangle = -\langle x, y\rangle.$$

Тем самым правая часть эквивалентности (16) выполнена, откуда следует наше предложение. □

21.10. Комплексификация (14) позволяет рассматривать E^{2k} как k-мерное (размерность комплексная) комплексное линейное пространство. Эрмитово скалярное произведение (15) определяет естественное вложение группы унитарных преобразований $U(E^{2k})$ в группу $\mathrm{SO}\,(E^{2k})$. По определению для $A \in \mathcal{H}$ и любых $x, y \in E^{2k}$ справедливо

$$(Ax, Ay) = \langle Ax, Ay\rangle - i\langle \zeta, Ax\wedge Ay\rangle = \langle x, y\rangle - i\langle A\zeta, A(x\wedge y)\rangle =$$

$$= \langle x, y\rangle - i\langle \zeta, x\wedge y\rangle = (x, y).$$

Отсюда следует включение

$$\mathcal{H} \subset U(E^{2k}). \tag{17}$$

Изоморфизм групп $\mathrm{O}\,(k)$ и $\mathcal{H}$, построенный в лемме 21.6, и включение (17) соответствуют стандартному вложению группы $\mathrm{O}\,(k)$ в группу $U(k)$.

21.11. Из (14),(15) непосредственно следует, что комплексная структура J сохраняет бивектор ζ и эрмитово скалярное произведение (15), то есть

$$J\eta = \eta, \ (Jx, Jy) = (x, y), \ \ \forall x, y \in E^{2k}.$$

Предложение. *Для любой комплексной структуры $\widetilde{J} \in \mathrm{SO}(E^{2k})$ на E^{2k} справедлива эквивалентность*

$$\widetilde{J}\eta = \eta \Longleftrightarrow (\widetilde{J}x, \widetilde{J}y) = (x, y), \ \ \forall x, y \in E^{2k}. \tag{18}$$

Доказательство. Импликация слева направо доказана в [13]. Пусть для комплексной структуры $\widetilde{J}$ выполнено условие справа в (18). Так как $\widetilde{J} \in \mathrm{SO}(E^{2k})$, то

$$\langle \widetilde{J}(\zeta), \widetilde{J}(x) \wedge \widetilde{J}(y) \rangle = \langle \widetilde{J}(\zeta), \widetilde{J}(x \wedge y) \rangle = \langle \zeta, x \wedge y \rangle = \langle \zeta, \widetilde{J}(x) \wedge \widetilde{J}(y) \rangle.$$

Оператор $\widetilde{J}$ осуществляет изоморфизм $\widetilde{J} : \Lambda_2(E^{2k}) \to \Lambda_2(E^{2k})$, поэтому из последнего равенства следует, что $\widetilde{J}\eta = \eta$. $\square$

Отметим, что в работе [14] сформулированы интересные геометрические свойства многообразия всех ортогональных комплексных структур в пространстве E^{2k}.

21.12. В классе римановых многообразий локально симметрические пространства выделяются требованием ковариантной постоянности тензора кривизны (см. [15]). Эквивариантность плюккерова вложения для грассмановых многообразий позволяет дать этому свойству простое геометрическое доказательство.

Напомним (см.[16], 31.3.1), что *трансвекцией* (или сдвигом) полного риманова многообразия M вдоль нормальной геодезической $\gamma : (-\infty, \infty) \to M$ на расстояние t называется такая изометрия $T_t : M \to M$, при которой 1) $T_t(\gamma(s)) = \gamma(s + t)$; 2) dT_t является вдоль γ параллельным переносом.

Для стандартного представления касательного вектора к геодезической $\gamma \subset G^+$ трансвекция $T_t \in \mathrm{SO}(V)$ может быть задана равенствами

$$T_t(e_i) = e_i(t) = e_i \cos \lambda^i t + n_i \sin \lambda^i t, \ T_t(n_i) = n_i(t) =$$
$$= -e_i \sin \lambda^i t + n_i \cos \lambda^i t, \ i \in [1, r], \ T_t(e_j) = e_j, \ \ T_t(n_\alpha) = n_\alpha, \ \ i, \alpha > r.$$

При этом ортонормированный базис $\eta_{i\alpha}(t) = n_\alpha(t) \wedge (\gamma(t) \llcorner e_i(t))$ пространства $T\gamma(t)G^+$ переносится вдоль геодезической γ параллельно. В силу эквивариантности действия изометрии T_t вместе с точками $\gamma(s)$ и $\gamma(s+t)$ движением евклидова пространства Λ совмещаются и некоторые G^+-окрестности этих точек. Из теоремы Гаусса ([16], 15.3) о связи римановых кривизн многообразия и его подмногообразия следует, что $\nabla_{\dot{\gamma}} R = 0$.

Литература

1. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Части I, II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 84–107.
2. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Часть III.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 108–129.
3. А. Н. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия.* Изд. МГУ, 1980.
4. K. Leichtweiss, *Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten.* — Math. Z. **76, No. 4** (1961), 334–366.
5. Y.-C. Wong, *Differential geometry of Grassmann manifolds.* — Proc. Nat. Acad. USA **57, No. 3** (1967), 589–594.
6. Y.-C. Wong, *Sectional curvatures of Grassmann manifolds.* — Proc. Nat. Acad. USA **60, No. 1** (1968), 75–79.
7. Y.-C. Wong, *Conjugate loci in Grassmann manifolds.* — Bull. AMS **74, No. 2** (1968), 240–245.
8. В. Горькавый, *Теорема редукции в задаче восстановления подмногообразий евклидова пространства по заданному грассманову образу.* — Мат.физ., анализ, геом. **4, No. 2** (1997), 309–333.
9. Э. Артин, *Геометрическая алгебра.* М, Наука, 1969.
10. Дж. Вольф, *Пространства постоянной кривизны.* М, Наука, 1982.
11. M. Obata, *The Gauss map of immersions of Riemannian manifolds in space of constant curvature.* — J. Different. Geom. **2,** (1968), 217–223.
12. С. Е. Козлов, *Сферические отображения и трехмерное кручение поверхностей в четырехмерных римановых многообразиях. I.* — Сиб. мат. журн. **31 No. 4** (1990), 68-76.
13. С. Е. Козлов, *Ортогонально совместимые бивекторы.* — Укр. геометр. сб. Вып. 27 (1984), 68–75.
14. А. Т. Фоменко, *Симплектическая геометрия. Методы и приложения.* Изд. МГУ, 1988.
15. С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.* М, Мир, 1964.
16. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию* . С.-Петербург, Наука, 1994.

Kozlov S. E. Geometry of real Grassmanian manifolds. IV.

A classical geodesic immersion of the Grassmanian manifold $G_p^+(V) \subset \Lambda(V)$ is described by means of the exterior algebra $\Lambda(V)$. The group $I_0(G^+)$ of isometries of the Grassmanian is described without the theory of Lie groups and algebras. Some interior and exterior properties of Grassmanian manifolds are proved by means of the invariant Plücker immersion. The isomorphic type of the group of rotations of the Grassmanian manifold around one of its geodesic lines is also described.

Санкт-Петербургский
Государственный университет

Поступило 10 апреля 1998 г.