Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

С. Е. Козлов

ГЕОМЕТРИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГРАССМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ. V

Часть V. Тензор кривизны на вещественных грассманианах

Эта статья является продолжением цикла работ [1–3] по геометрии вещественных грассмановых многообразий. Работа [3] опубликована в настоящем сборнике, что предоставляет автору удобную возможность рассматривать предисловие к [3] как вводную часть данной статьи.

§22. Преобразование кривизны в грассманиане $G_2^+(V^4)$

22.1. Рассмотрим произведение римановых многообразий $M = M_1 \times M_2$. Коротко напомним как по связностям ∇^1, ∇^2 на сомножителях строится связность ∇ на многообразии M и соответствующий этой связности тензор кривизны. Векторным полям $X_1(x_1)$, $X_2(x_2)$ на M_1, M_2 сопоставим векторное поле

$$X(x) = (X_1(x_1), X_2(x_2)),\ x = (x_1, x_2) \in M \tag{1}$$

на многообразии M. Для полей X, Y, Z на многообразии M вида (1) по определению (см. [4],7.3)

$$(\nabla_x Y)(x) = (\nabla^1_{X_1} Y^1(x_1), \nabla^2_{X_2} Y_2(x_2)), \tag{2}$$

откуда

$$[X, Y](x) = ([X_1, Y_1](x_1), [X_2, Y_2](x_2)).$$

$$(R(X, Y)Z)(x) = (R_1(X_1, Y_1)Z_1)(x_1) + (R_2(X_2, Y_2)Z_2)(x_2). \tag{3}$$

Связность ∇, заданная в (2) на полях вида (1), однозначно распространяется на произвольные векторные поля на M. Любой вектор $X \in T_x M$ может быть распространен до векторного поля вида (1), поэтому формула (3) справедлива для произвольных векторных полей на M. При этом индексы 1,2 обозначают проекции касательного вектора на подпространства $T_x M_1$, $T_x M_2 \subset$

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96-01-00681.

T_xM, соответственно. Прямой подсчет показывает, что связность ∇, построенная по связностям Леви–Чивита ∇^1, ∇^2, является единственной связностью Леви–Чивита на M.

22.2. Пространство бивекторов $\Lambda_2(V^4)$ может быть разложено в ортогональную сумму (см. 8)

$$\Lambda_2(V^4) = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-, \ \Lambda^+, \Lambda^- \subset \Lambda_2(V^4) \tag{4}$$

двух трехмерных собственных подпространств оператора Ходжа $*$, соответствующих собственным числам ± 1. Обозначим через

$$S^+(\frac{1}{\sqrt{2}}) \subset \Lambda^+, \ S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset \Lambda^- \tag{5}$$

двумерные сферы радиусов $\frac{1}{\sqrt{2}}$ с центрами в начале пространства $\Lambda_2(V^4)$. Тогда (см. [5]) грассманиан $G_2^+(V^4)$ равен сумме Минковского

$$G_2^+(V^4) = S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{6}$$

В соответствии с (6), многообразие $G_2^+(V^4)$ приобретает структуру риманова произведения

$$G_2^+(V^4) = S^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{7}$$

22.3. Пусть $\omega \in G_2^+(V^4)$. Положим

$$\sigma^+ := \Lambda^+ \cap T_\omega G_2^+(V^4), \ \sigma^- := \Lambda^- \cap T_\omega G_2^+(V^4).$$

Тогда (см. [6])

$$T_\omega G_2^+(V^4) = \sigma^+ + \sigma^-. \tag{8}$$

В соответствии с (4), (6), (8) представим бивекторы $\omega, X \in T_\omega G_2^+(V^4)$ в виде

$$\omega = \omega^+ + \omega^-, \ X = X^+ + X^-, \ X^+ \in \sigma^+ = T_{\omega^+}S^+, \ X^- \in \sigma^- = T_{\omega^-}S^-. \tag{9}$$

Из (3), (6), (8) следует

$$R(u,v)w = R^+(u^+,v^+)w^+ + R^-(u^-,v^-)w^-, \tag{10}$$

где через R, R^+, R^- обозначены преобразования кривизны в многообразиях $G_2^+(V^4)$, S^+, S^- соответственно.

В римановых многообразиях M с постоянной секционной кривизной K преобразование кривизны имеет вид (см. [4], 14(39))

$$R(u,v)w = K[\langle w,v\rangle u - \langle w,u\rangle v]. \tag{11}$$

Так как R^+, R^- являются преобразованиями кривизны двух сфер с радиусами $\frac{1}{\sqrt{2}}$, то из (10), (11) получается выражение для преобразования кривизны грассманиана $G_2^+(V^4)$

$$R(u,v)w = 2[\langle w^+,v^+\rangle u^+ - \langle w^+,u^+\rangle v^+ + \langle w^-,v^-\rangle u^- - \langle w^-,u^-\rangle v^-]. \tag{12}$$

22.4. Рассмотрим ортонормированный базис $\{e_1,e_2,n_1,n_2\}$ пространства V. По тройке векторов $\omega = e_1 \wedge e_2$, $\xi_1 = n_1 \wedge e_2$, $\xi_2 = e_1 \wedge n_2$ построим вполне геодезический плоский тор Φ (см. 15), задаваемый параметризацией

$$\rho(x) = \rho(x^1,x^2) = \exp_\omega(x^1\xi_1 + x^2\xi_2),\ x = (x^1,x^2) \in \mathbb{R}^2. \tag{13}$$

Вдоль тора Φ определено расслоение базисов пространства V^4

$$e_i(x) = e_i \cos x^i + n_i \sin x^i,\ n_i(x) = -e_i \sin x^i + n_i \cos x^i,\ i = 1,2. \tag{14}$$

В каждой точке $\rho(x)$ тора Φ рассмотрим ортонормированный базис $\eta_{i\alpha}(x)$ пространства $T_{\rho(x)}G_2^+(V^4)$

$$\eta_{i\alpha}(x) := n_\alpha(x) \wedge (\rho(x) \llcorner e_i(x)),\ i,\alpha \in [1,2]. \tag{15}$$

При этом $\eta_{21}(x) = e_1 \wedge n_1 = \mathrm{const}$, $\eta_{12}(x) = n_2 \wedge e_2 = \mathrm{const}$. Так как тор Φ плоский и вполне геодезический, то вектора

$$\xi_i(x) = \eta_{ii}(x) = \frac{\partial\rho}{\partial x^i}(x),\ i = 1,2$$

образуют параллельные вдоль тора Φ поля. Тем самым доказано

Предложение. *Набор $\eta(x) = \{\eta_{i\alpha}(x)\}$ (см. (15)) образует параллельное вдоль Φ поле ортонормированных базисов пространств $T_{\rho(x)}G_2^+(V^4)$.*

Это утверждение позволяет определить правило параллельного переноса векторов вдоль тора Φ. Каждый такой перенос может быть осуществлен движением из $\mathrm{SO}(V)$, заданным формулами (14). В силу эквивариантности плюккерова вложения (см. 20.1), поле тензора кривизны вдоль тора Φ будет параллельным (ср. с [4], 31.2.1).

22.5. Фиксируем пару $(\omega, X) \in TG_2^+(V^4)$. В стандартном базисе этой пары будет $\omega = e_1 \wedge e_2$, $X = \lambda^1\eta_{11} + \lambda^2\eta_{22} = \lambda^1\xi_1 + \lambda^2\xi_2$. По векторам ξ_1, ξ_2 построим тор (13). Пусть $Y \in T_\omega G_2^+(V^4)$. В этом пункте мы вычислим оператор

$$L_X : T_\omega G^+ \to T_\omega G^+,\ L_X(Y) := R(Y,X)X. \tag{16}$$

Если $Y \in T_\omega\Phi$, то из 22.4 следует $R(Y,X)X = 0$. Пусть $Y \perp T_\omega\Phi$. Для того, чтобы воспользоваться формулой (12) перейдем от базиса $\{\eta_{i\alpha}\}$ к новому базису $\{X^+, X^-, \eta^+, \eta^-\}$, где

$$\begin{aligned} X^+ =& \frac{1}{2}(X + *X) = \frac{\lambda^1 - \lambda^2}{\sqrt{2}}(\eta_{11} - \eta_{22}),\\ X^- =& \frac{1}{2}(X - *X) = \frac{\lambda^1 + \lambda^2}{\sqrt{2}}(\eta_{11} + \eta_{22}),\ \eta^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_{12} + \eta_{21}),\\ \eta^- =& \frac{1}{\sqrt{2}}(-\eta_{12} + \eta_{21});\ X^+, \eta^+ \in \sigma^+,\ X^-, \eta^- \in \sigma^-. \end{aligned} \tag{17}$$

Так как $Y \perp T_\omega\Phi$, то его можно представить в виде

$$Y = \mu_+\eta^+ + \mu_-\eta^-. \tag{18}$$

По формуле (12), с учетом (17), (18), находим

$$L_X(Y) = R(Y,X)X = (\lambda^1 - \lambda^2)^2\mu_+\eta^+ + (\lambda^1 + \lambda^2)^2\mu_-\eta^-. \tag{19}$$

22.6. Из (19) видно, что векторы $\eta^\pm$ являются собственными векторами самосопряженного оператора L_X для любого $X \in T_\omega\Phi$. Будем считать, что оператор L_X действует на ортогональном дополнении $X^\perp$ вектора X в касательном пространстве $T_\omega G_2^+(V^4)$. Пусть в разложении (9) для вектора X составляющие X^+, $X^- \neq 0$, то есть

$$X \notin \sigma^+ \cup \sigma^-. \tag{20}$$

В этом случае размерность пространства $\sigma(X) = \mathrm{Lin}\,(X, *X)$ равна двум. Площадка $\sigma(X)$ касается тора Φ, поэтому она является собственным подпространством оператора L_X, соответствующим нулевому собственному числу. Направления $[\sigma(X) \cap \sigma^+]^\perp$ и $[\sigma(X) \cap \sigma^-]^\perp$ совпадают с направлениями векторов η^+, η^-. Здесь имеются ввиду ортогональные дополнения в площадках σ^+, σ^-. Из (19) следует, что эти направления собственные для L_X и соответствуют собственным числам $(\lambda^1 - \lambda^2)^2$, $(\lambda^1 + \lambda^2)^2$.

Пусть (20) не выполнено. Из (17) вытекает, что это требование эквивалентно выполнению одного из равенств $\lambda^1 = \pm\lambda^2$. При $X \in \sigma^+$ ($\lambda^1 = -\lambda^2$) площадка σ^- является собственным подпространством L_X с нулевым собственным числом. Собственному вектору $X^\perp$ (в σ^+) соответствует собственное число $4\lambda_1^2 = 2|X|^2$. Случай $X \in \sigma^-$ аналогичен рассмотренному. Заметим, что

$$(\lambda^1 \pm \lambda^2)^2 = 2|X^\pm|^2 = |X \pm *X|^2.$$

22.7. Из (19) непосредственно получается выражение для кривизны Римана $k(X,Y)$, $Y \in X^\perp$ и секционной кривизны $K_{X\vee Y}$ (птичка обозначает внешнее произведение в алгебре $\Lambda(\Lambda_2(V^4))$)

$$k(X,Y) = \langle R(Y,X)X,Y\rangle = \langle L_X Y,Y\rangle = (\lambda^1 - \lambda^2)^2\mu_+^2 + (\lambda^1 + \lambda^2)^2\mu_-^2.$$

$$K_{X\vee Y} = \frac{k(X,Y)}{|X\wedge Y|^2} = \frac{(\lambda^1-\lambda^2)^2}{(\lambda^1)^2+(\lambda^2)^2}\cdot\frac{\mu_+^2}{\mu_+^2+\mu_-^2} + \frac{(\lambda^1+\lambda^2)^2}{(\lambda^1)^2+(\lambda^2)^2}\cdot\frac{\mu_-^2}{\mu_+^2+\mu_-^2}.$$

Из последнего равенства следует, что секционная кривизна в грассманиане $G_2^+(V^4)$ меняется в промежутке от нуля до двух.

§23. Преобразование кривизны в стандартном базисе пространства $T_\omega G_p^+(V^n)$

23.1. В точке $\omega \in G^+$ рассмотрим стандартный базис $\eta = \{\eta_{i\alpha}\}$ касательного пространства $T_\omega G^+$. Аналогично (13) построим вполне геодезический плоский тор Φ (см. 15), задаваемый параметризацией

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \exp_\omega(x\xi^\top),\ x = (x^1,\cdots,x^{r_0}) \in \mathbb{R}^{r_0},\ \xi = (\xi_1,\cdots,\xi_{r_0}),\\ \xi_i &= \eta_{ii} = n_i \wedge (\omega \llcorner e_i),\ 1 \leqslant i \leqslant r_0 = \min(p,q).\end{aligned} \tag{1}$$

Сужение накрытия $\rho : \mathbb{R}^{r_0} \to \Phi$ на окрестность $U := \{x \in \mathbb{R}^{r_0} | |x| < \pi\}$ является изометрией окрестности U на $\widetilde{U} := \rho(U)$ (см. 15.1). Для каждой точки $x \in \mathbb{R}^{r_0}$ определим движение $\mathcal{D}(x) \in \mathrm{SO}(V)$, переводящее базис (e,n) в базис $(e(x),n(x))$ по правилу

$$e_i(x) = e_i\cos x^i + n_i \sin x^i,\ n_i(x) = -e_i \sin x^i + n_i\cos x^i,\ i \in [1,r_0],$$
$$e_j(x) = e_j,\ n_\alpha(x) = n_\alpha,\ j,\alpha > r_o. \tag{2}$$

Пусть $\tau \in \widetilde{U} \subset \Phi$ и $x = \rho^{-1}(r) \in U \subset \mathbb{R}^{r_0}$. Набор векторов

$$\eta(\tau) = \eta(x) = \mathcal{D}(x)\eta = \{\eta_{i\alpha}(x) = n_\alpha(x) \wedge (\rho(x) \llcorner e_i(x))\}$$

образует ортонормированный базис пространства $T_\tau G^+$. При этом

$$\xi_i(x) \in T_\tau \Phi, \ \eta_{i\alpha}(x) \in N_\tau \Phi \ (\text{при } \alpha \neq i).$$

Легко видеть, что

$$\frac{\mathcal{D}}{\partial x^i}(\eta_{i\alpha}(x)) = 0,$$

поэтому поле базиса $\eta(x)$, $x \in U$ определяет параллельный перенос вдоль окрестности $\widetilde{U} \subset \Phi$. В силу эквивариантности действия группы $\mathrm{SO}(V)$ поле тензора кривизны вдоль этой окрестности будет параллельным.

Заметим, что при $(p, n) = (2, 4)$ поле базиса $\eta(\tau)$ распространяется на весь тор Φ (см. 22.4). Для произвольных размерностей такое распространение, вообще говоря, невозможно.

Лемма. *Пусть $X, Y \in T_\omega G^+ \cap G^+$. Пространства $V(*_\omega X)$ и $V(*_\omega Y)$ вполне ортогональны. Тогда*

$$R(X, Y) = 0. \tag{3}$$

Доказательство. В (3) под $R(X, Y)$ понимается кососимметрический эндоморфизм $R(X, Y) \ : \ Z \mapsto R(X, Y)Z$. Поливекторы X, Y разложимы, поэтому разложимыми являются и бивекторы $*_\omega X$, $*_\omega Y \in \Lambda_{1,1}(V_\omega)$. Значит найдется такая ортонормированная четверка векторов e_1, e_2, n_1, n_2, что

$$*_\omega X = e_1 \wedge n_1, \ *_\omega Y = e_2 \wedge n_2, \ X = n_1 \wedge (\omega \llcorner e_1), \ Y = n_2 \wedge (\omega \llcorner e_2).$$

Дополним пары $(e_1, e_2), (n_1, n_2)$ до ортонормированных базисов e, n пространств V_ω, $V_\omega^\perp$ так, что $\omega = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$. Тогда для индуцированного базиса η пространства $T_\omega G^+$ и соответствующего тора Φ будет $X, Y \in T_\omega \Phi$. Из 23.1 следует, что тройку касательных векторов $X, Y, Z \in T_\omega G^+$ можно распространить (локально) до параллельных полей вдоль плоского вполне геодезического тора Φ, откуда следует (3). $\square$

23.2. В §18 по паре (ω, Ω), $\Omega \subset T_\omega G^+$ построено некоторое вполне геодезическое подмногообразие $\widetilde{G}^+ \subset G^+$, для которого

$$\omega \in \widetilde{G}^+, \ \Omega \subset T_\omega \widetilde{G}^+. \tag{4}$$

Подмногообразие $\widetilde{G}^+$ изометрично (и даже конгруэнтно в евклидовом пространстве $\Lambda(V)$) грассманиану $\widehat{G}^+ = G^+_{\widetilde{p}}(\widetilde{V})$ для некоторого $\widetilde{p} \leqslant \widetilde{n} = \dim \widetilde{V}$, $\widetilde{V} = V(*_\omega \Omega)$ (см. 18.2). Таким образом, для изометрии $I : \widehat{G}^+ \to \widetilde{G}^+$ (см. 18(7)) будет

$$R(u, v)w = I(R(\widehat{u}, \widehat{v})\widehat{w}), \text{ где } \widehat{x} := I^{-1}(x). \tag{5}$$

Здесь отождествлены преобразования I с dI, так как изометрия I является сужением некоторого линейного преобразования $\widetilde{I} \in \mathrm{Gl}(\Lambda(V))$. Из этого равенства непосредственно вытекает

Предложение. *Пусть $u, v, w \in \Omega$; $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Тогда справедлива импликация*

$$R(\widehat{u}, \widehat{v})\widehat{w} = \lambda\widehat{u} + \mu\widehat{v} + \nu\widehat{w} \Longrightarrow R(u, v)w = \lambda u + \mu v + \nu w. \tag{6}$$

23.3. Из (3) следует, что

$$u, v \in T_\omega \Phi \Longrightarrow R(u, v)w = 0, \ \forall w \in T_\omega G^+. \tag{7}$$

Из леммы 23.1 и тождества Якоби $R(u, v)w + R(v, w)u + R(w, u)v = 0$ вытекает

Предложение. *Пусть вектора $u, v, w \in \eta = \{\eta_{i\alpha}\}$. Тогда*

$$R(u, v)w \neq 0 \Longrightarrow \dim[V(*_\omega(u) \cap V(*_\omega(v))] > 0,$$

$$\dim[V(*_\omega(u)) \cap V(*_\omega(w))] + \dim[V(*_\omega(v)) \cap V(*_\omega(w))] > 0. \tag{8}$$

Рассмотрим подпространство

$$\Omega := \mathrm{Lin}\,(u, v, w) \subset T_\omega G^+, \ u, v, w \in \eta.$$

Из (8) следует

$$R(u, v)w \neq 0 \Longrightarrow 3 \leqslant \dim \widetilde{V} \leqslant 4, \ \widetilde{V} = V((*_\omega(\Omega)). \tag{9}$$

23.4. Пусть $v = w = \eta_{ii} = \xi_i$. Если при некотором $u \in \eta$ будет $R(u, v)w \neq 0$, то из (8) следует

$$u = \begin{cases} \eta_{i\alpha}, \ \alpha \in [1, q], \ \alpha \neq i, \\ \eta_{ji}, \ j \in [1, p], \ j \neq i. \end{cases} \tag{10}$$

Значит $\dim \widetilde{V} = 3$ и $\widetilde{p} = 1, 2$. В этом случае многообразия $\widehat{G}^+$ и $\widetilde{G}^+$ изометричны двумерной единичной сфере, откуда

$$R(u, \xi_i)\xi_i = u. \tag{11}$$

23.5. Пусть $v = \xi_i$, $w = \xi_j$, $i < j$. Тогда, если $R(u, v)w \neq 0$, то из (8) следует

$$u = 1)\eta_{ij} \text{ или } 2)\eta_{ji}. \tag{12}$$

При этом

$$\widetilde{V} = \mathrm{Lin}\,(e_i, e_j, n_i, n_j),\ \widetilde{p} = \dim(\widetilde{V} \cap V_\omega) = 2. \tag{13}$$

Для вариантов 1), 2) в (12) пары (ω, Ω_1) и (ω, Ω_2) разные. Но, в силу (13), многообразия $\widehat{G}^+$ и $\widetilde{G}^+$, построенные по этим парам, совпадают. В каждом из случаев 1), 2) в качестве ω_0 (см. 18) можно выбрать $(p-2)$-векторов $\omega \llcorner (e_i \wedge e_j) = (-1)^{i+j} e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_i \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_j \wedge \cdots \wedge e_p$. (Здесь шапочка означает отсутствие соответствующего элемента). Тогда, обозначая $\widehat{x} = I^{-1}(x) = x \llcorner \omega_0$, находим

$$\widehat{\omega} = e_i \wedge e_j,\ \widehat{\xi_i} = n_i \wedge e_j,\ \widehat{\xi_j} = e_i \wedge n_j,\ \widehat{\eta}_{ij} = n_j \wedge e_j,\ \widehat{\eta}_{ji} = e_i \wedge n_i,$$
$$\widehat{\xi}_i, \widehat{\xi}_j, \widehat{\eta}_{ij}, \widehat{\xi}_{ji} \in T_\omega \widehat{G}^+. \tag{14}$$

Для каждой пары индексов $1 \leqslant i < j \leqslant r_0$ определим вектора

$$\eta_{ij}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_{ij} + \eta_{ji}),\ \eta_{ij}^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\eta_{ij} + \eta_{ji}).$$

Как следует из 23(8) при $\{m, k\} \neq \{i, j\}$ $R(\eta_{ij}, \xi_m)\xi_k = 0$, поэтому для векторов $X = \sum\limits_{i=1}^{r_0} \lambda^i \xi_i$ и $Y = \sum\limits_{i<j\leqslant r_0} [Y_+^{ij}\eta_{ij}^+ + Y_-^{ij}\eta_{ij}^-]$ из равенств 22(19), 23(6) следует

$$L_X = R(Y, X)X = \sum_{i<j\leqslant r_0} [(\lambda^i - \lambda^j)^2 Y_+^{ij}\eta_{ij}^+ + (\lambda^i + \lambda^j)^2 Y_-^{ij}\eta_{ij}^-]. \tag{15}$$

23.6. Каноническое разложение вектора $X \in T_\omega G^+$ определяет характеристики пары (ω, X) (см. 18.2):

$$\widetilde{V} = \mathrm{Lin}\,\{e_i, n_i\}_{i=1}^r,\ E = \mathrm{Lin}\,\{e_i\}_{i=1}^r,\ E^\perp = \mathrm{Lin}\,\{n_i\}_{i=1}^r,$$
$$E_\perp = V(\omega \llcorner (e_1 \wedge \cdots \wedge e_r)), E_\perp^\perp = V(n_1 \wedge \cdots \wedge n_q) \llcorner (n_1 \wedge \cdots \wedge n_r),$$

$$\widetilde{n} = 2r,\ \widetilde{p} = \widetilde{q} = r. \tag{16}$$

Элемент (ω, X) определяет некоторое инвариантное ортогональное разложение пространства $T_\omega G^+$. Здесь под инвариантностью понимается независимость упомянутого разложения от выбора базисов $e = \{e_i\}$, $n = \{n_\alpha\}$. Для подпространств $A \subset V_\omega$, $\subset V_\omega^\perp$ введем обозначение

$$T(A, B) = \{\mathrm{Lin}\{n \wedge (\omega \llcorner e\} \mid e \in A,\ n \in B\}.$$

Тогда

$$T_\omega G^+ = T_1(E, E^\perp) \overset{\perp}{\oplus} T_2(E, E_\perp^\perp) \overset{\perp}{\oplus} T_3(E_\perp, E^\perp) \overset{\perp}{\oplus} T_4(E_\perp, E_\perp^\perp), \tag{17}$$

$$T_1(E, E^\perp) = T_1^1(\Phi) \overset{\perp}{\oplus} T_1^2(\Phi),$$

$$\text{где } T_1^1(\Phi) := \mathrm{Lin}\,(\xi_i),\ T_1^2(\Phi) := \mathrm{Lin}\,(\eta_{ij}),\ i \neq j,\ i, j \in [1, r]). \tag{18}$$

Слагаемые в формуле (18), вообще говоря, зависят от выбора базисов e, n. Однако две любые пары таких слагаемых можно совместить поворотом вокруг геодезической $\exp_\omega(tX)$ (см. 21).

23.7. В соответствии с формулами (17), (18) любой вектор $Y \in T_\omega G^+$ разлагается в ортогональную сумму

$$Y = Y_1^1 + Y_1^2 + Y_2 + Y_3 + Y_4. \tag{19}$$

Вектора X и Y_1^1 касаются вполне геодезического плоского тора $\exp_\omega T_1^1(\Phi)$, поэтому $L_X(Y_1^1) = R(Y_1^1, X)X = 0$. Вектор $L_X(Y_1^2)$ вычисляется по формуле (15). Составляющая Y_4 может быть разложена по поливекторам $\eta_{j\alpha}$ при $j, \alpha > r$. Из 23.3 вытекает, что $R(Y^4, X)X = 0$. Вектор Y_2 можно представить в виде линейной комбинации базисных поливекторов $\eta_{i\alpha}$ при $\alpha > r$. Из 23(8), 23(11) следует, что

$$R(\eta_{i\alpha}, \xi_k)\xi_m = \begin{cases} 0, \{i, \alpha\} \neq \{k, m\}, \\ \eta_{i\alpha}, \{i, \alpha\} = \{k, m\}, \end{cases} \tag{20}$$

Представим Y_2 в виде $Y_2 = \sum_{i=1}^r \alpha_i Y_2^i$, где $Y_2^i = N^i \wedge (\omega \llcorner e_i)$, $N^i \in E_\perp^\perp$, $\langle Y_2^i, Y_2^j \rangle = \delta_{ij}$. Используя (20), находим

$$L_X Y_2 = \sum_{i=1}^r (\lambda^i)^2 \alpha_i Y_2^i. \tag{21}$$

Аналогичная формула имеет место и для составляющей Y_3.

23.8. Из 23.7, (15) вытекает, что подпространства T_4 и T_1^1 в (17), (18) являются собственными подпространствами оператора L_X с нулевым собственным значением. Наборы $\eta^+ = \{\eta^+_{ij}\}$, $\eta^- = \{\eta^-_{ij}\}$, $1 \leqslant i < j \leqslant r$ состоят из собственных векторов оператора L_X с собственными числами $(\lambda^i - \lambda^j)^2$, $(\lambda^i + \lambda^j)^2$, соответственно. Пространства

$$T_2^i := \{n \wedge (\omega \llcorner e_i) \,|\, n \in E_\perp^\perp\},$$
$$T_3^i := \{n_i \wedge (\omega \llcorner e) \,|\, e \in E_\perp\},\ i \in [1, r] \tag{22}$$

являются собственными подпространствами оператора L_X, соответствующими собственному числу $(\lambda^i)^2$. Таким образом всякий вектор $Y \in T_\omega G^+$ приобретает разложение по ортонормированному базису из собственных векторов оператора L_X

$$Y = (Y_1^1 + Y_4) + \sum_{i<j\leqslant r} [Y_+^{ij}\eta^+_{ij} + Y_-^{ij}\eta^-_{ij}] + \sum_{i=1}^r \alpha_i Y_2^i + \sum_{i=1}^r \beta_i Y_3^i. \tag{23}$$

Резюмируем наши рассмотрения, сформулировав теорему.

Теорема. *Пусть $X, Y \in T_\omega G^+$. По паре $(\omega, X) \in TG^+$ построены каноническое разложение вектора X и разложение (23) для вектора Y. Тогда*

$$L_X(Y) = R(Y,X)X = \sum_{i<j\leqslant r} [(\lambda^i - \lambda^j)^2 Y_+^{ij}\eta^+_{ij} + (\lambda^i + \lambda^j)^2 Y_-^{ij}\eta^-_{ij}] +$$
$$+ \sum_{i=1}^r (\lambda^i)^2 \alpha_i Y_2^i + \sum_{i=1}^r (\lambda^i)^2 \beta_i Y_3^i. \tag{24}$$

Заметим, что базис пространства $T_\omega G^+$, состоящий из собственных векторов оператора L_X (см. 23.8), является собственным для оператора $L_{\widetilde{X}}$ при любом $\widetilde{X} \in T_1^1(\Phi)$. Если $r = r_0$, то Y_4 и хотя бы одно из двух последних слагаемых в (23) обратится в ноль.

§24. Двумерные направления экстремальных секционных кривизн

24.1. Рассмотрим пару неколлинеарных векторов $X, Y \in T_\omega G^+$. По каноническому разложению вектора X построим разложение

23(23) для вектора Y. Из 23(24) следует

$$k(X,Y)=\langle R(Y,X)X,Y\rangle=\langle L_X(Y),Y\rangle=\sum_{i<j\leqslant r}[(\lambda^i-\lambda^j)^2(Y_+^{ij})^2+$$

$$+(\lambda^i+\lambda^j)^2(Y_-^{ij})^2]+\sum_{i=1}^r(\lambda^i)^2\alpha_i^2+\sum_{i=1}^r(\lambda^i)^2\beta_i^2. \tag{1}$$

Формула (1) для кривизны Римана позволяет дать новые доказательства ряду утверждений, относящихся к секционной кривизне грассманиана G^+.

Предложение (см. [7]). *Секционные кривизны K_σ грассманиана G^+ изменяются в промежутке $[0,2]$ при $r_0>1$, и тождественно равны 1 при $r_0=1$.*

Доказательство. При $r_0=1$ грассманиан G^+ изометричен единичной сфере, поэтому его секционные кривизны постоянны и равны 1. Пусть $r_0>1$. Для данной площадки σ выберем такие ортонормированные векторы X,Y, что $\sigma=V(X\vee Y)$. Тогда (см. 23(23)) $|X|^2=\sum_{i=1}^r(\lambda^i)^2=1$ и

$$K_\sigma=K_{X\vee Y}=k(X,Y)=\langle L_X(Y)Y\rangle\leqslant$$

$$\leqslant\max\{(\lambda^i+\lambda^j)^2,(\lambda^i-\lambda^j)^2,(\lambda^i)^2\}\leqslant\max\{2(\lambda^i)^2+2(\lambda^j)^2\}\leqslant 2.$$

В силу (1) секционная кривизна K_σ не отрицательна. □

24.2. Приведем прямой подсчет кривизны Риччи, ранее вычисленной (см. 20.7) с использованием сферического отображения грассманиана G^+. При $|X|=1$ кривизна $\mathrm{Ric}\,(X)$ равна следу оператора L_X, суженного на подпространство $X^\perp$ (ортогональное дополнение в $T_\omega G^+$). Из 23(19), (1) следует

$$\begin{gathered}\mathrm{Ric}\,(X)=\sum_{i<j\leqslant r}[(\lambda^i-\lambda^j)^2+(\lambda^i+\lambda^j)^2]+\dim E_\perp^\perp\sum_{i=1}^r(\lambda^i)^2+\\ +\dim E_\perp\sum_{i=1}^r(\lambda^i)^2=2(r-1)+(q-r)+(p-r)=n-2.\end{gathered}\tag{2}$$

(ср. с [7]).

Из (2) находим скалярную кривизну эйнштейнова многообразия G^+ ([4], 14.9.4)

$$K=pq(n-2). \tag{3}$$

24.3. Важной внешней характеристикой плюккерова вложения $G^+ \subset \Lambda_p(V)$ является длина $|B|$ второй основной формы этого вложения (см. [8], 5.2.4). По формуле ([8], 5.2(22)) будет

$$|B|^2 = (pq)^2 |H|^2 - K. \tag{4}$$

Модуль вектора средней кривизны подмногообразия G^+ равен 1 (см. 20(1)). Из (3), (4) следует

$$|B| = \sqrt{2} pq = \sqrt{2} \dim G^+. \tag{5}$$

(ср. с [9]).

24.4. В пункте 23.5 по паре $(\omega, \mathrm{Lin}\,(\xi_i, \xi_j))$ построено вполне геодезическое подмногообразие $\widetilde{G}^+$, конгруэнтное многообразию $\widehat{G}_2^+(V^4)$. Последнее многообразие представимо в виде суммы Минковского двух 2-сфер с радиусами $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому секционная кривизна многообразия G^+ в направлении слоев этой суммы максимальна и равна 2. Имеет место обращение этого факта.

Теорема. *Пусть секционная кривизна K_σ грассманиана G^+ в направлении 2-площадки $\sigma \subset T_\omega G^+$ равна двум. Тогда множество $\exp_\omega \sigma$ является вполне геодезической двумерной сферой $S^2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, стандартно расположенной в некотором трехмерном подпространстве пространства $\Lambda_p(V)$.*

Доказательство. В площадке σ рассмотрим ортонормированный базис $\{X, Y\}$. По условию $K_\sigma = k(X,Y) = \langle L_X(Y), Y\rangle = \max\limits_{Z \in X^\perp, |Z|=1} \langle L_X(Z), Z\rangle = 2$. Поэтому вектор Y является собственным вектором оператора L_X с собственным числом $\lambda = 2$. Так как $|X| = \sum_{i=1}^r (\lambda^i)^2 = 1$, то из (1) следует, что для некоторой пары индексов $i < j \leqslant r$ будет

$$\lambda^i, \lambda^j = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ \lambda^k = 0,\ k \neq i, j;\ X = \lambda^i \xi_i + \lambda^j \xi_j,\ Y = \pm \eta_{ij}^{+(-)}.$$

Пусть для определенности $\lambda^i = -\lambda^j = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $Y = \eta_{ij}^+$. Другие комбинации знаков рассматриваются аналогично. В многообразии $\widehat{G}_2(\widetilde{V}^4)$, построенном по паре $(\omega, \mathrm{Lin}\,(\xi_i, \xi_j))$ будет (см. 23(14))

$$\widehat{\omega} = e_i \wedge e_j,\ \widehat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_i \wedge e_j - e_i \wedge n_j),\ \widehat{Y} = \widehat{\eta}_{ij}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(n_j \wedge e_j + e_i \wedge n_i). \tag{6}$$

Ориентируем пространство $\widetilde{V}^4$, выбрав в нем правый базис $\{e_i, e_j, n_i, n_j\}$. Тогда для оператора Ходжа $* : \Lambda_2(\widetilde{V}^4) \to \Lambda_2(\widetilde{V}^4)$ из (6) вытекает $*\widehat{X} = \widehat{X}$, $*\widehat{Y} = \widehat{Y}$, то есть $X = X^+$, $Y = Y^+$. Из 22(10) следует, что векторы $\widehat{X}, \widehat{Y}$ касаются вполне геодезической сферы $\widehat{S}^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Отображение $I : \widehat{G}^+ \to \widetilde{G}$ (см. 17(8)) осуществляет конгруэнцию (в $\Lambda(V)$) многообразия $\widehat{G}^+$ на вполне геодезическое подмногообразие $\widetilde{G}^+ \subset G^+$. При этом $I(\widehat{\omega}) = \omega$, $I(\widehat{X}) = X$, $I(\widehat{Y}) = Y$, откуда следует утверждение теоремы. $\square$ (Ср. с [10]).

24.5 Каноническое разложение вектора $X \in T_\omega G^+$ определяет некоторые ортонормированные базисы $(e, n), \eta$ пространств V и $T_\omega G^+$. По базису (e, n) (см. 23.1) строится вполне геодезический плоский тор Φ_X, касающийся вектора X в точке ω. При вычислении группы вращений $\mathcal{H}^0_\gamma$ (см. 21) грассманиана G^+ вокруг геодезической $\gamma = \exp_\omega(tX)$ получено ортогональное разложение пространства V в сумму инвариантных подпространств этой группы. При каждом вращении $A \in \mathcal{H}^0_\gamma$ тор Φ_X переходит в тор $\Phi_X(A)$, построенный по базису (Ae, An). Секционная кривизна многообразия G^+ в любом двумерном направлении σ, касающемся тора $\Phi_X(A)$ равна нулю. Оказывается, что справедливо и обратное утверждение, а именно, верна

Теорема. *Пусть секционная кривизна многообразия G^+ в направлении площадки $\sigma = \mathrm{Lin}(X, Y) \subset T_\omega G^+$ равна нулю. Тогда существует вращение $A \in \mathcal{H}^0_\gamma$, для которого $\sigma \subset T_\omega \Phi_X(A)$.*

Лемма. *Пусть вектор $X \in T_\omega G^+_k(V^{2k})$ в базисе (e, n) имеет каноническое разложение*

$$X = \xi_1 + \cdots + \xi_k. \tag{7}$$

Вектор $Y \in T_\omega G^+_k(V^{2k})$ не коллинеарен X и $k(X, Y) = 0$. Тогда существует такое вращение $A \in \mathcal{H}^0_\gamma$, что $\sigma = \mathrm{Lin}(X, Y) \subset T_\omega \Phi_X(A)$.

Доказательство. При условии (7) представление 23(23) для вектора Y примет вид

$$Y = Y_0 + Y_1,\ Y_0 = \sum_{i=1}^{k} \nu_i \xi_i \in T_\omega \Phi_X,$$

$$Y_1 = \sum_{i<j\leqslant k} [Y^{ij}_+ \eta^+_{ij} + Y^{ij}_- \eta^-_{ij}] \perp T_\omega \Phi_X. \tag{8}$$

Так как $k(X,Y)=0$, то из (1), 23(8) следует, что $Y_-^{ij}=0$. При вращении $A\in\mathcal{H}_\gamma^0$ k-вектор ω неподвижен, поэтому по теореме 21.7 группа $\mathcal{H}_\gamma^0$ изоморфна $\mathrm{SO}(V_\omega)$. Этот изоморфизм описан в 21.6. Вращение $A\in\mathcal{H}_\gamma^0$ переводит базис (e,n) в (Ae,An). В соответствии с этим меняется и разложение (8) для вектора Y. По соображениям компактности найдется такой элемент $A_0\in\mathcal{H}_\gamma^0$, при котором в разложении (8), соответствующем базису (A_0e,A_0n) достигается $\min|\sum_{i<j}Y_+^{ij}\eta_{ij}^+|(Y_-^{ij}=0)$. Пусть этот минимум реализуется на разложении (8). Покажем, что при этом вектор Y_1 обращается в ноль. Фиксируем пару индексов $i<j\leqslant k$ и зададим преобразование $A_{ij}(\varphi)\in\mathcal{H}_\gamma^0$ (см. 21.6) равенствами

$$
\begin{aligned}
e_i&=\cos\varphi\widetilde{e}_i+\sin\varphi\widetilde{e}_j,\ n_i=\cos\varphi\widetilde{n}_i+\sin\varphi\widetilde{n}_j,\ e_m=\widetilde{e}_m,\ m\neq i,j,\\
e_j&=-\sin\varphi\widetilde{e}_i+\cos\varphi\widetilde{e}_j,\ n_j=-\sin\varphi\widetilde{n}_i+\cos\varphi\widetilde{n}_j,\ n_m=\widetilde{n}_m,\ m\neq i,j.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Так как любое преобразование группы $\mathcal{H}_\gamma^0$ оставляет точку ω на месте, то эта группа коммутирует с преобразованием $*_\omega$ (см. 20.2). Поэтому в разложении

$$
\begin{aligned}
*_\omega Y=*_\omega Y_0+*_\omega Y_1&=\sum_{\alpha=1}^k\nu_\alpha\zeta_{\alpha\alpha}+\sum_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant k}Y_+^{\alpha\beta}\zeta_{\alpha\beta}^+=\sum_{\alpha=1}^k\nu_\alpha e_\alpha\wedge n_\alpha+\\
&+\frac{1}{\sqrt2}\sum_{1\leqslant\alpha<\beta\leqslant k}Y_+^{\alpha\beta}(e_\alpha\wedge n_\beta+e_\beta\wedge n_\alpha),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

соответствующем разложению (8), модуль второго слагаемого минимален. Подставляя выражения (9) для $e_\alpha(\varphi)$, $n_\alpha(\varphi)$ в (10), находим

$$
\begin{aligned}
\nu_i\xi_i+\nu_j\xi_j&=\sqrt2\cos\varphi\sin\varphi(\nu_i-\nu_j)\widetilde{\zeta}_{ij}+\widetilde{\Delta}_{ij},\\
\zeta_{\alpha j}^+&=-\sin\varphi\zeta_{\alpha i}^++\cos\varphi\zeta_{\alpha j}^+,\ \alpha<j,\ \alpha\neq i,\\
\zeta_{i\beta}^+&=\cos\varphi\zeta_{i\beta}^++\sin\varphi\zeta_{i\beta},\ \beta>i,\ \beta\neq j,\\
\zeta_{ij}^+&=(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\zeta_{ij}^++\widetilde{\delta}_{ij},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $\widetilde{\Delta}_{ij}$, $\widetilde{\delta}_{ij}\in T_\omega\Phi_X(A_{ij}(\varphi))$.

Из (9), (10), (11) следует

$$
|*_\omega Y_1(\varphi)|^2=C+[\sqrt2\cos\varphi\sin\varphi(\nu_i-\nu_j)+(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)(Y_+^{ij})]^2,\tag{12}
$$

где C не зависит от φ. Так как левая часть (12) при $\varphi = 0$ достигает минимума, то $\frac{d}{d\varphi}| *_\omega Y_1(\varphi)|^2(0) = 0$, откуда

$$(\nu_i - \nu_j)Y_+^{ij} = 0.$$

Поэтому, если $(\nu_i - \nu_j) \neq 0$, то $Y_+^{ij} = 0$. Пусть $(\nu_i - \nu_j) = 0$. Тогда

$$| *_\omega Y_1(\varphi)|^2 - | *_\omega Y_1(0)|^2 = -\sin^2 2\varphi (Y_+^{ij})^2 \geqslant 0.$$

Откуда вытекает, что $Y_+^{ij} = 0$ для любых $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Значит вектора $*_\omega Y_1$ и Y_1 обращаются в ноль. □

24.7. Доказательство теоремы 24.5. Каноническому разложению вектора X соответствует разложение 23(23) для вектора Y. Бивектор $*_\omega Y_4$ имеет каноническое разложение по простым вполне ортогональным бивекторам вида $\bar{e}_k \wedge \bar{n}_\alpha$, где $\bar{e}_k \in E_\perp$, $\bar{n}_\alpha \in E_\perp^\perp$, $k, \alpha > r$ (см. 23.6). Наборы $\{e_i\}$, $\{n_i\}$ (см. 23.(16)) $i \in [1, r]$ можно дополнить до базиса $(\bar{e}, \bar{n})$ векторами $\bar{e}_k$, $\bar{n}_\alpha$. Базисы (e, n) и $(\bar{e}, \bar{n})$ можно совместить некоторым вращением $A \in \mathcal{H}_\gamma^0$, оставляющим вектора Y_1^1, Y_1^2, Y_2, Y_3 в 23(19) на месте, и переводящим Y_4 в касательный к тору $\Phi_X(A)$ вектор.

Не нарушая общности, можно считать, что в этих разложениях $\lambda^1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda^r > 0$. Так как $k(X, Y) = 0$, то из 24(1) следует, что в сумме 23(23) для базиса $(\bar{e}, \bar{n})$ будет

$$Y_4 = 0, \ Y_-^{ij} = \alpha_i = \beta_i = 0.$$

Набор $\{\lambda^1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda^r > 0\}$ можно разбить на группы равных коэффициентов. Если в 23(23) пара коэффициентов $i < j$ попадает в разные группы ($\lambda^i \neq \lambda^j$), то из 24(1) непосредственно следует, что $Y_+^{ij} = 0$. Теперь существование требуемого вращения A следует из леммы 24.6, примененной к каждой группе равных коэффициентов λ^i. □

24.8. Теорема. *Пусть в направлении подпространства $W \subset T_\omega G^+$ кривизна Римана обращается в ноль. Тогда найдется такой плоский вполне геодезический тор $\Phi(e, n)$, что*

$$W \subset T_\omega \Phi(e, n). \tag{13}$$

Доказательство. При $\dim W = 1$ утверждение тривиально, а если $\dim W = 2$, то (13) следует из теоремы 24.5. Допустим, что при $\dim W \leqslant k$ теорема верна и $\dim W = k$. Рассмотрим базис $\{X_1, \cdots, X_{k+1}\}$ пространства W. По предположению индукции найдется тор $\Phi(e,n)$, касающийся векторов $X_1, \cdots, X_k$. По условию $k(X_1, X_{k+1}) = 0$. По теореме 24.5 существует вращение $A \in \mathcal{H}^0_{\gamma_1}$, $\gamma_1 = \exp_\omega(tX_1)$, переводящее тор Φ в тор $\Phi(A)$, касающийся вектора X_{k+1}. В разложении 23(23) для вектора X_{k+1}, построенном по паре X_1, X_{k+1} будет $\alpha^i = \beta^i = Y^{ij}_- = 0$ (см. доказательство леммы 24.6). Из формулы 24(1) для кривизны $k(X_m, X_{k+1})$ следует, что если хотя бы для одного $m \in [1,k]$ коэффициенты λ^i_m и λ^j_m различны, то $X^{ij}_{k+1} = 0$. Значит вращение

$$A \in \mathcal{H}^0_{\gamma_1} \cap \cdots \cap \mathcal{H}^0_{\gamma_k}, \text{ где } \gamma_i = \exp_\omega(tX_i)$$

(см. 21), поэтому тор $\Phi(A)$ касается всех элементов базиса $X_1, \cdots, X_{k+1}$. $\square$

24.9. Следствие. *Ранг риманова симметрического пространства G^+ равен r_0.*

Литература

1. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Части I, II.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 84–107.
2. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Часть III.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 108–129.
3. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Часть IV.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998).
4. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию* . С.-Петербург, Наука, 1994.
5. С. Е. Козлов, *Ортогонально совместимые бивекторы.* — Укр. геометр. сб. Вып. 27 (1984), 68–75.
6. А. Н. Глушаков, *Два вопроса внешней геометрии плюккеровых вложений многообразий Грассмана.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 5–12.
7. K. Leichtweiss, *Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten.* — Math. Z. **76, No. 4** (1961), 334–366.
8. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Геометрические неравенства.* Л., Наука, 1980.
9. K. Chen, *The geometry of Grassman manifolds as submsnifolds.* — Adv. Math. **16, No. 3** (1987), 334–335.
10. Y.-C. Wong, *Sectional curvatures of Grassmann manifolds.* — Proc. Nat. Acad. USA **60, No. 1** (1968), 75–79.

Kozlov S. E. Geometry of real Grassmanian manifolds. V.

The curvature transform is calculated for the Grassmanian manifold $G^+_{2,4}$ with the help of the Riemannian decomposition $G^+_{2,4} \cong S^2 \times S^2$.

Together with the author's earlier results about almost geodesic submanifolds of $G^+_{p,n}$, this makes it possible to give the formula for the Riemannian curvature in $G^+_{p,n}$. This formula allows us to give a geometrical description of two-dimensional directions with maximal sectional curvature in $G^+_{p,n}$.

Санкт-Петербургский
Государственный университет

Поступило 10 апреля 1998г.