Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

С. Е. Козлов

ГЕОМЕТРИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГРАССМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ. VI

Часть VI. Сопряженные точки на вещественных грассманианах

В §25 дано полное описание множества точек, сопряженных с точкой ω вдоль геодезической $\gamma(t) = \exp_\omega(tX)$, через инварианты канонического разложения вектора X. Доказано, что, в отличие от неориентированного случая, каждая кратчайшая имеет нетривиальную вариацию с закрепленными концами. В следующем параграфе найдено множество раздела C_ω многообразия $G^+_{2,4}$. В параграфе §27 описаны фактормножества многообразия раздела C^0_ω в касательном пространстве грассманиана $G^+_{2,4}$ при отображении $\exp_\omega : C^0_\omega \to C_\omega$. Изучена структура этого отображения. В последнем параграфе выведена формула, выражающая множество раздела C^0_x произведения римановых многообразий через соответствующие множества раздела сомножителей. В качестве следствия получено явное выражение для множества раздела C^0_ω грассманиана $G^+_{2,4}$.

§25. Сопряженные точки и точки раздела вдоль произвольной геодезической

25.1. Рассмотрим точку p в римановом многообразии M^n и единичный вектор $X \in T_pM^n$. В касательном пространстве T_pM^n определен самосопряженный оператор

$$L_X : Y \mapsto R(Y, X)X. \tag{1}$$

Рассмотрим ортонормированный базис из собственных векторов $u_1 = X, u_2, \dots, u_n$ оператора L_X. Обозначим $\mu_1 = 0, \mu_2, \dots, \mu_n$ отвечающие им собственные числа. Пусть $E_i(t)$ – такие параллельные векторные поля вдоль нормальной геодезической $\gamma(t) =$

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96-01-00681.

$\exp_p(tX)$, что $E_i(0) = u_i$. Определим функции

$$f_i(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu_i}} \sin \sqrt{\mu_i}\, t & \text{при} \quad \mu_i > 0, \\ t & \text{при} \quad \mu_i = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-\mu_i}} \operatorname{sh} \sqrt{-\mu_i}\, t & \text{при} \quad \mu_i < 0. \end{cases}$$

Из леммы [1], 3.1.2.5 непосредственно следует

25.2. Предложение. *Пусть M^n – риманово симметрическое пространство, J – поле Якоби вдоль геодезической γ с начальными данными $J(0) = 0$, $\dot{J}(0) = \sum\limits_{i=1}^{n} a^i u_i$. Тогда*

$$J = \sum_{i=1}^{n} a^i f_i E_i.$$

Иными словами, поля $Y_i = f_i E_i$ образуют базис пространства тех якобиевых полей вдоль γ, которые обращаются в нуль в точке $\gamma(0)$.

Обозначим T множество параметров t точек $\gamma(t)$ сопряженных с точкой $\gamma(0)$ вдоль геодезиечской γ. Из предложения 25.2 следует, что

$$T = \bigcup_{\mu_i > 0} \left\{ \frac{\pi k}{\sqrt{\mu_i}} \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0. \tag{2}$$

Таким образом, множество T однозначно определяется совокупностью положительных собственных чисел оператора L_X.

Из определения (1) находим

$$\mu_i = K_{X \wedge u_i}, \tag{3}$$

где $K_{X \wedge u_i}$ обозначает секционную кривизну многообразия M^n в двумерном направлении $X \wedge u_i$.

25.3. Рассмотрим каноническое разложение вектора $X \in T_\omega G^+_{p,p+q}$ (см. §11):

$$X = \sum_{i=1}^{r} \lambda^i n_i \wedge (\omega \llcorner e_i), \quad |X| = 1. \tag{4}$$

Можно считать, что $0 < \lambda^1 \leqslant \lambda^2 \leqslant \lambda^r$.

Для удобства читателя приведем формулу 24(1), выражающую кривизну Римана $k(X, Y)$ через инвариантные характеристики пары $X, Y \in T_\omega G^+_{p,p+q}$

$$k(X, Y) = \langle R(Y, X)X, Y \rangle = \langle L_X(Y), Y \rangle = \tag{5}$$

$$= \sum_{i<j\leqslant r}[(\lambda^i-\lambda^j)^2(Y_+^{ij})^2+(\lambda^i+\lambda^j)^2(Y_-^{ij})^2]+\sum_{i=1}^{r}(\lambda^i)^2\alpha_i^2+\sum_{i=1}^{r}(\lambda^i)^2\beta_i^2.$$

В этой формуле при $r=1$ отсутствует первое слагаемое, а при $r=p=q$ – два последних. В силу (5) секционные кривизны K_σ, определяемые собственными направлениями оператора L_X, могут принимать значения

1) При $r=1$ будет $K_\sigma=1$.

2) При $r>1$, $r=p=q$ будет $K_\sigma=(\lambda^i\pm\lambda^j)^2$, $i<j\leqslant r$. (6)

3) При $r>1$, $r\neq p$ или $r\neq q$ будет $K_\sigma=(\lambda^i\pm\lambda^j)$, $i<j\leqslant r$, $K_\sigma=(\lambda^i)^2$, $i\in[1,r]$.

Из формул (2), (3), (6) вытекает

Теорема. *Пусть $\omega\in G^+_{p,p+q}$, $X\in T_\omega G^+_{p,p+q}$, $|X|=1$. Вектор X имеет каноническое разложение* (4). *Тогда множество T параметров точек, сопряженных точке ω вдоль геодезической $\gamma(t)=\exp_\omega(tX)$, имеет вид*

1) $T=\bigcup\{\pi k\}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$, *при* $r=1$.

2) $T=\bigcup\left\{\frac{\pi k}{\lambda^j\pm\lambda^i}\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$, $i<j\leqslant r$ *при* $r>1$, $r=p=q$.

3) $T=\bigcup\left\{\frac{\pi k}{\lambda^j\pm\lambda^i}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi k}{\lambda^i}\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$, $i<j\leqslant r$, $i\in[1,r]$ *при* $r>1$, $r\neq p$ *или* $r\neq q$.

В формулах 2), 3) мы считаем, что параметр $t\in T$ автоматически исключается из объединения, если в его представлении знаменатель обращается в нуль.

25.4. Пусть на геодезической $\gamma(t)=\exp_\omega(tX)$ точка $\tau=\gamma(1)$ является точкой раздела для точки ω вдоль γ. Другими словами, вектор X принадлежит множеству раздела C^0_ω для точки ω в касательном пространстве $T_\omega G^+$ (см. [1], 24.2).

По лемме [1], 24.2.2 при этом выполнено хотя бы одно из условий: а) ω и τ сопряжены вдоль γ; б) точки ω и τ соединены по крайней мере двумя различными кратчайшими.

Теорема. *В вещественных грассманианах $G^+_p(\mathbb{R}^n)$ выполнены оба условия* а) *и* б).

Доказательство. Как показано в §12 для того, чтобы $X\in C^0_\omega$ при $i>1$ необходимо и достаточно выполнения равенства $\lambda^{r-1}+\lambda^r=\pi$ в каноническом разложении для вектора X. Как показано в Части IV, при $r=1$ вектор X касается вполне геодезической в G^+

единичной сферы, стандартно вложенной в объемлющее евклидово пространство, что делает утверждение теоремы очевидным.

Пусть $r > 1$. По формуле 11(8) будет

$$\gamma(t) = (e_1 \cos\lambda^1 t + n_1 \sin\lambda^1 t) \wedge \ldots \wedge (e_r \cos\lambda^r t + n_r \sin\lambda^r t) \wedge X_0, \quad (7)$$

где X_0 – некоторый, не зависящий от t, поливектор. Обозначим $\lambda := \lambda^{r-1}$. Произведение δ двух последних круглых скобок в (7) для точки $\tau = \gamma(1)$ примет вид

$$\delta = (e_{r-1} \cos\lambda + n_{r-1} \sin\lambda) \wedge (-e_r \cos\lambda + n_r \sin\lambda). \quad (8)$$

Рассмотрим подпространство $V = \mathrm{Lin}\,(e_{r-1}, e_r, n_{r-1}, n_r)$. Зададим движение $A(\varphi) \in \mathrm{SO}\,(\mathbb{R}^n)$, полагая, что базис $\{e_{r-1}, e_r, n_{r-1}, n_r\}$ подпространства V переходит в базис $\{e_{r-1}, e_r, n_{r-1} n_r\}(\varphi)$ по правилу

$$\begin{cases} e_{r-1}(\varphi) = e_{r-1} \cos\varphi + e_r \sin\varphi \\ e_r(\varphi) = -e_{r-1} \sin\varphi + e_r \cos\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} n_{r-1}(\varphi) = n_{r-1} \cos\varphi - n_r \sin\varphi \\ n_r(\varphi) = n_{r-1} \sin\varphi + n_r \cos\varphi, \end{cases} \quad (9)$$

а ортогональное дополнение $V^\perp$ остается неподвижным. Семейство движений $A(\varphi)$, $\varphi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ задает геодезическую вариацию кратчайшей $[\gamma(0), \gamma(1)]$. Так как $e_{r-1}(\varphi) \wedge e_r(\varphi) = e_{r-1} \wedge e_r$, то конец $\gamma(0)$ закреплен. Из (8), (9) прямыми вычислениями получаем, что $\delta(\varphi) = \delta$. В произведении (7) при действии преобразования $A(\varphi)$ меняются только две последние скобки, поэтому из последнего равенства следует, что и конец $\gamma(1)$ тоже закреплен. Поле скоростей построенной геодезической вариации при $\varphi = 0$ является нетривиальным полем Якоби, обращающимся в нуль в точках ω и τ. $\square$

Из содержания двух последующих параграфов становится ясным выбор движения $A(\varphi)$. Кроме того, прием изложенный в §27 можно применить для вычисления вариации $A(\varphi)X$ (см. 27.2).

§26. Множество раздела C_ω многообразия $G^+_{2,4}$

26.1. Напомним, что *множеством раздела риманова многообразия M для точки p* называется образ $C_p = \exp_p C^0_p$. В работе [2] описаны множества раздела неориентированных грассманианов. Элемент грассманова многообразия рассматривается как многомерная плоскость, а описание множества раздела дается через соотношения размерностей пересечений плоскостей. Плюккерова модель грассманианов позволяет поставить вопрос об описании множеств раздела как подмножеств евклидовых пространств, причем каждое такое подмножество с точностью до движения задается двумя натуральными параметрами. Так для сфер $G^+_{1,n}$ и $G^+_{n-1,n}$ множества C^0_p есть $(n-2)$-мерные сферы радиуса π, а множества C_p – точки. В §§26, 27 мы рассмотрим простейший нетривиальный случай многообразия $G^+_{2,4}$.

26.2. Фиксируем точку $\omega \in G^+_{2,4} = G^+_2(\mathbb{R}^4)$. Пусть $X \in C^0_\omega$. По паре (ω, X) построим каноническое разложение вектора X

$$\begin{gathered} X = \lambda^1 n_1 \wedge e_2 + \lambda^2 e_1 \wedge n_2 = \lambda^1 \xi_1 + \lambda^2 \xi_2, \quad \omega = e_1 \wedge e_2, \\ 0 \leqslant \lambda^1 \leqslant \lambda^2, \quad \lambda^1 + \lambda^2 = \pi. \end{gathered} \tag{1}$$

$$\gamma(t) = \exp_\omega(tX) = (e_1 \cos \lambda^1 t + n_1 \sin \lambda^1 t) \wedge (e_2 \cos \lambda^2 t + n_2 \sin \lambda^2 t). \tag{2}$$

Мы предполагаем, что пространство $\mathbb{R}^4$ ориентировано, поэтому возможны два варианта.

A1 : Базис $\{e_1, e_2, n_1, n_2\}$ положительно ориентирован.

A2 : Базис $\{e_1, e_2, n_1, n_2\}$ отрицательно ориентирован.

Напомним некоторые сведения про многообразие $G^+_2(\mathbb{R}^4)$. Пространство бивекторов $\Lambda_2(\mathbb{R}^4)$ разлагается в прямую ортогональную сумму двух трехмерных собственных подпространств оператора Ходжа (см. §8)

$$\Lambda_2(\mathbb{R}^4) = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-, \quad \omega = \omega^+ + \omega^-, \quad *\omega^+ = \omega^+, \quad *\omega^- = -\omega^-. \tag{3}$$

Многообразие $G^+_2(\mathbb{R}^4)$ можно представить в виде суммы Минковского

$$G^+_2(\mathbb{R}^4) = S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \tag{4}$$

где $S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ – двумерные сферы радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в пространствах Λ^+, Λ^-.

Рассмотрим вариант A1. В этом случае будет

$$*\omega = n_1 \wedge n_2. \tag{5}$$

Обозначим $\lambda := \lambda^1$, $Y = \frac{1}{2}(\xi_2 - \xi_1)$. Тогда $\lambda^2 = \pi - \lambda$, $\lambda \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Из (2), (3), (5) следует

$$\tau := \gamma(1) = (e_1 \cos\lambda + n_1 \sin\lambda) \wedge (-e_2 \cos\lambda + n_2 \sin\lambda) = -\omega \cos^2\lambda +$$

$$+*\omega\sin^2\lambda+(\xi_2-\xi_1)\cos\lambda\sin\lambda=\frac{1}{2}(*\omega-\omega)+$$

$$+\left[-\frac{1}{2}(\omega+*\omega)\cos 2\lambda+\frac{1}{2}(\xi_2-\xi_1)\sin 2\lambda\right]=$$

$$=-\omega^-+[-\omega^+\cos 2\lambda+Y\sin 2\lambda]. \qquad (6)$$

26.3. По определению точка $\tau(\lambda,Y)$ принадлежит множеству раздела C_ω. Поэтому равенство (6) можно рассматривать как параметризацию части множества C_ω (мы рассматриваем вариант A1). Так как точка ω фиксирована, то в качестве параметров выступают скаляр $\lambda\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ и вектор $Y=\frac{1}{2}(\xi_2-\xi_1)=\frac{1}{2}(e_1\wedge n_2-n_1\wedge e_2)$, принадлежащий касательному пространству $T_\omega G_2^+(\mathbb{R}^4)$. При фиксированной точке ω и положительной ориентации базиса $\{e_1,e_2,n_1,n_2\}$ произвол выбора этого базиса состоит в повороте пары $\{e_1,e_2\}$ на некоторый угол φ и пары $\{n_1,n_2\}$ – на угол ψ. Вычислим как будет меняться вектор Y при этих поворотах

$$Y(\varphi,\psi)=\frac{1}{2}[(e_1\cos\varphi+e_2\sin\varphi)\wedge(-n_1\sin\psi+n_2\cos\psi)-$$

$$-(n_1\cos\psi+n_2\sin\psi)\wedge(-e_1\sin\varphi+e_2\cos\varphi)]=Y\cos(\varphi+\psi)+$$

$$+\frac{1}{2}(e_2\wedge n_2-e_1\wedge n_1)\sin(\varphi+\psi)=Y\cos\beta+Z\sin\beta, \qquad (7)$$

где $\beta:=\varphi+\psi$, $Z:=\frac{1}{2}(e_2\wedge n_2-e_1\wedge n_1)$.

Вектора Y и Z ортогональны и равны по модулю $\frac{1}{\sqrt{2}}$, поэтому вектор Y описывает окружность радиуса $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Заметим, что $*Y=Y$, $*Z=Z$, значит $Y,Z\in\Lambda^+$. Кроме того, эти вектора принадлежат касательному пространству $T_\omega G^+_{2,4}$. Тем самым $Y(\varphi,\psi)$ вращается в двумерной площадке $\sigma^+=T_\omega G^+_{2,4}\cap\Lambda^+$ (см. [3], (6)) и описывает экватор $S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cap\sigma^+$ сферы $S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (см. (4)). Так как вектора Y и Z ортогональны вектору ω^+, то полюса, соответствующие этому экватору находятся в точках $\pm\omega^+$. Подставим выражение (7) для Y в формулу (6). Тогда будет

$$\tau(\lambda,\beta)=-\omega^-+[-\omega^+\cos 2\lambda+(Y\cos\beta+Z\sin\beta)\sin 2\lambda]. \qquad (8)$$

Формула (8) задает параметризацию слоя $\left(-\omega^- + S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ в сумме Минковского (4). Координатными линиями $\beta = \mathrm{const}$ являются меридианы этой сферы, соединяющие полюс $(-\omega) = -\omega^+ - \omega^-$ с полюсом $(\omega^+ - \omega^-)$. Координатными линиями $\lambda = \mathrm{const}$ являются параллели этой сферы.

Вариант А2 (см. 26.2) вполне аналогичен варианту А1. Так как в этом случае $*\omega = -n_1 \wedge n_2$, находим аналог формулы (8)

$$\tau(\lambda, \beta) = -\omega^+ + [-\omega^- \cos 2\lambda + (Y \cos\beta + Z \sin\beta) \sin 2\lambda].$$

Вектора ω^-, Y, Z в (9) образуют ортогональный базис пространства Λ^- и равны по модулю $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому формула (9) задает параметризацию слоя $\left(-\omega^+ + S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$. Резюмируем наши рассмотрения. Справедлива

Теорема. *Множество раздела C_ω грассманиана $G^+_{2,4}$ можно представить в виде объединения двух двумерных сфер, касающихся в точке $(-\omega)$. А именно*

$$C_\omega = \left(-\omega^+ + S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \cup \left(-\omega^- + S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right). \qquad (10)$$

§27. Множество раздела C^0_ω в касательном пространстве многообразия $G^+_{2,4}$

27.1. Топология множества раздела C^0_ω в касательном пространстве $T_\omega G^+_{2,4}$ известна – оно гомеоморфно трехмерной сфере. При изучении метрической геометрии этого множества естественно возникает вопрос о строении фактор-множеств по отображению $\exp_\omega$, суженному на множество C^0_ω. Ответу на этот вопрос и посвящена оставшаяся часть работы.

Пусть $\tau \in C_\omega$ и $X, \tilde{X} \in (\exp_\omega)^{-1}(\tau)$. Из 12.4 следует, что параметр λ в канонических разложениях векторов X и $\tilde{X}$ одинаков. Если коэффициент λ принимает крайние значения 0 или $\frac{\pi}{2}$, то в формулах (8), (9) правая часть не зависит от β. Рассмотрим отдельно эти случаи.

Пусть $\lambda = 0$. Тогда $X = \pi n_1 \wedge e_2 = \pi\xi_1$. В работе [3] показано, что пересечение $T^2 = G^+_{2,4} \cap T_\omega G^+_{2,4}$ является плоским тором, стандартно вложенным в четырехмерное евклидово пространство $T_\omega G^+_{2,4}$ (тор Клиффорда). Значит при $\lambda = 0$ множество

$(\exp_\omega^{-1})(-\omega) \subset C_\omega^0$ представляет из себя тор, гомотетичный тору T^2 с коэффициентом гомотетии π. Из формулы [3], (10) следует, что множество $(\exp_\omega^{-1})(-\omega)$ можно разложить в сумму Минковского двух окружностей

$$(\exp_\omega^{-1})(-\omega) = S_+^1\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + S_-^1\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right). \tag{1}$$

Здесь значок снизу означает принадлежность площадкам σ_+ или σ_-.

По формуле 12(19) диаметр многообразия $G_{2,4}^+$ равен π. Поэтому этот тор можно представить как пересечение C_ω^0 со сферой наименьшего радиуса, содержащей это множество (сфера в пространстве $T_\omega G_{2,4}^+$).

Пусть $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Тогда $X = \frac{\pi}{2}(n_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge n_2) = \frac{\pi}{2}(\xi_1 + \xi_2)$. В случае A1 этот касательный вектор лежит в пространстве Λ^-. Значит множество $(\exp_\omega^{-1})(\omega^+ - \omega_-)$ есть окружность $S_-^1\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$. Аналогично, в случае A2 множество $(\exp_\omega^{-1})(-\omega^+ + \omega^-)$ есть окружность $S_+^1\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$. Радиус инъективности многообразия $G_{2,4}^+$ равен $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (см. 13(6)). Следовательно шар наибольшего радиуса, вписанный в гиперповерхность C_ω^0 (в пространстве $T_\omega G_{2,4}^+$) касается этого множества по двум вышеописанным окружностям.

27.2. Пусть $\lambda \neq 0, \frac{\pi}{2}$ и $\tau \in \left(-\omega^- + S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$. Случай $\tau \in \left(-\omega^+ + S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ рассматривается аналогично. По двум векторам $X, \tilde{X} \in (\exp_\omega^{-1})(\tau)$ выпишем соответствующие формулы 26(6). Так как $\sin 2\lambda \neq 0$, то справедливо $Y = \tilde{Y}$. Вектора $X = \lambda^1 n_1 \wedge e_2 + \lambda^2 e_1 \wedge n_2$ и $\tilde{X} = \lambda^1 \tilde{n}_1 \wedge \tilde{e}_2 + \lambda^2 \tilde{e}_1 \wedge \tilde{n}_2$ могут быть совмещены поворотом пары $\{e_1, e_2\}$ на некоторый угол φ и пары $\{n_1, n_2\}$ – на угол ψ. Из равенства $Y = \tilde{Y}$ и формулы 26(7) следует, что $\varphi + \psi = 0 (\mod 2\pi)$. Поэтому все множество $(\exp_\omega^{-1})(\tau)$ может быть получено из вектора X поворотами указанных пар на углы φ и $(-\varphi)$, когда $\varphi \in [0, 2\pi]$. Найдем параметризацию этого множества.

$$\begin{aligned} X(\varphi) &= \lambda^1 n_1(-\varphi) \wedge e_2(\varphi) + \lambda^2 e_1(\varphi) \wedge n_2(-\varphi) = \\ &= \lambda^1(n_1 \cos\varphi - n_2 \sin\varphi) \wedge (-e_1 \sin\varphi + e_2 \cos\varphi) + \\ &+ \lambda^2(e_1 \cos\varphi + e_2 \sin\varphi) \wedge (n_1 \sin\varphi + n_2 \cos\varphi) = \end{aligned}$$

$$= (\pi - 2\lambda)Y + \pi[a\cos 2\varphi + b\sin 2\varphi], \tag{2}$$

где $a = \frac{1}{2}(e_1 \wedge n_2 + n_1 \wedge e_2)$, $b = \frac{1}{2}(e_1 \wedge n_1 + e_2 \wedge n_2)$.

При нашем выборе τ для $X, \tilde{X}$ реализуется случай A1. Значит $Y = Y^+$, $a, b \in \Lambda^-$, $\langle a, b\rangle = 0$, $|a| = |b| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Из (2) следует

$$\begin{gathered}(\exp_\omega^{-1})(\tau) = (\pi - 2\lambda)Y^+ + S^1_-\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right),\\ \tau \in \left(-\omega^- + S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \setminus \{-\omega\}.\end{gathered} \tag{3}$$

Аналогично, находим

$$\begin{gathered}(\exp_\omega^{-1})(\tau) = (\pi - 2\lambda)Y^- + S^1_+\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right),\\ \tau \in \left(-\omega^+ + S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \setminus \{-\omega\}.\end{gathered} \tag{4}$$

27.3. Многообразие $G^+_{2,4}$ разлагается в сумму Минковского двух двумерных сфер (см. 26(4)). Фиксируем точку $\omega \in G^+_{2,4}$. Тогда множество C_ω представляет из себя объединение слоев суммы 26(4) в точке $(-\omega)$.

Фактормножества многообразия C^0_ω по отображению $\exp_\omega$ образуют семейство $(\exp_\omega^{-1})\tau$, $\tau \in C_\omega$ подмножеств четырехмерного евклидова пространства $T_\omega G^+_{2,4}$. Доказана

Теорема. *При $\tau = -\omega$ фактормножество $(\exp_\omega^{-1})(\tau)$ есть плоский тор, разлагающийся в сумму Минковского* (1). *При $\tau \in \left(-\omega^\pm + S^\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \setminus \{-\omega\}$ множество $(\exp_\omega^{-1})(\tau)$ является транслятом окружности $S^1_\mp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, заданным формулами* (3) *и* (4).

27.4. Отображение $\exp_\omega : C^0_\omega \to C_\omega$ переводит многообразие, гомеоморфное S^3, в пару касающихся двумерных сфер. Опишем структуру этого отображения. Модуль вектора $X = \lambda n_1 \wedge e_2 + (\pi - \lambda)e_1 \wedge n_2$ равен $f(\lambda) = [2\lambda^2 - 2\pi\lambda + \pi^2]^{\frac{1}{2}}$. На отрезке $\lambda \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ эта функция убывает. Обозначим $S^3(\lambda)$ сферу с центром в начале $T_\omega G^+_{2,4}$ и радиусом $f(\lambda)$. Пусть $F(\lambda) := C^0_\omega \cap S^3(\lambda)$. Множество $F(0)$ совпадает с тором (1), который при действии $\exp_\omega$ переходит в точку $(-\omega)$. Этот тор разбивает многообразие C^0_ω на два полнотория. Из формул 26(7), (3), (4) следует, что при $\lambda \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ множество $F(\lambda)$ распадается в объединение двух торов, лежащих в разных полноториях

$$F(\lambda) = \left[S^1_+\left(\frac{\pi-2\lambda}{\sqrt{2}}\right) + S^1_-\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right] \cup \left[S^1_-\left(\frac{\pi-2\lambda}{\sqrt{2}}\right) + S^1_+\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{5}$$

При отображении $\exp_\omega$ каждый из этих торов, факторизуясь по окружностям (3), (4), переходит в параллель (относительно полюса $(-\omega)$) одной из сфер в равенстве 26(10). При $\lambda = \frac{\pi}{2}$ множество $F(\lambda)$ является объединением двух окружностей $S^1_\pm\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$, переходящих в полюса сфер 26(10), противоположные $(-\omega)$.

§28. Множества раздела на произведении римановых многообразий

28.1. Рассмотрим произведение двух замкнутых римановых многообразий $M = M_1 \times M_2$. В этом параграфе под геодезической $\gamma(t)$ будем понимать гладкую кривую $t \mapsto (\gamma(t)$, вдоль которой касательный вектор $\dot\gamma(t)$ переносится параллельно. Тем самым модуль $|\dot\gamma(t)|$ не зависит от t и параметр t на кривой $\gamma(t)$ будет пропорционален натуральному. Сформулируем ряд хорошо известных фактов римановой геометрии.

1) Пусть $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$ – кратчайший геодезический путь на многообразии M. Тогда пути $\gamma_1(t) := Pr_1\gamma(t)$, $\gamma_2(t) := Pr_2\gamma(t)$ являются кратчайшими геодезическими путями на многообразиях M_1, M_2.

2) Пусть $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $t \in [0,1]$ – кратчайшие геодезические пути на многообразиях M_1, M_2. Тогда путь $\gamma(t) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ является кратчайшим геодезическим путем на многообразии M.

В условиях утверждений 1), 2) введем обозначения: $\gamma(0) = x = (x_1, x_2)$, $\gamma(1) = y = (y_1, y_2)$. Тогда $\gamma_i(0) = x_i$, $\gamma_i(1) = y_i$ при $i = 1, 2$. Расстояния между точками x, y в многообразии M и проекциями этих точек на сомножители M_1, M_2 связаны соотношением

$$\rho^2(x,y) = \rho_1^2(x_1,y_1) + \rho_2^2(x_2,y_2), \tag{1}$$

где $\rho = L(\gamma)$, $\rho_1 = L(\gamma_1)$, $\rho_2 = L(\gamma_2)$.

Представим касательное пространство T_xM в виде суммы Минковского ортогональных подпространств, касательных к слоям произведения $M_1 \times M_2$

$$T_x M = T_{x_1} M_1 + T_{x_2} M_2.$$

Для векторов $X = \dot\gamma(0)$, $X_i = \dot\gamma_i(0)$ справедливо

$$X = X_1 + X_2, \quad \rho = |X|, \quad \rho_i = |X_i|.$$

28.2. Рассмотрим множества раздела C_x, C_{x_i} на многообразиях M, M_i. Обозначим $D_{x_i} := M_i \setminus C_{x_i}$.

Теорема. *Множество раздела C_x можно представить в виде дизъюнктного объединения*

$$C_x = (C_{x_1} \times D_{x_2}) \cap (D_{x_1} \times C_{x_2}) \cap (C_{x_1} \times C_{x_2}). \qquad (3)$$

Доказательство. 1) Пусть $y = (y_1, y_2) \in C_x$. Рассмотрим кратчайшую $\gamma(t)$, $t \in [0,1]$, соединяющую точки x и y. Из 28.1 1) следует, что геодезические пути γ_1, γ_2, соединяющие точки x_1 с y_1 и x_2 с y_2 являются кратчайшими. Если $y_1 \notin C_{x_1}$ и $y_2 \notin C_{x_2}$, то пути γ_1, γ_2 можно продолжить, с сохранением свойства быть кратчайшими. Из 28.1 2) вытекает возможность продолжить и кратчайшую γ за точку $y = \gamma(1)$, что противоречит выбору точки $y \in C_x$. Значит левая часть равенства (3) содержится в правой.

2) Пусть $y_1 \in C_{x_1}$. Рассмотрим кратчайшие пути γ_1, γ_2 соединяющие x_1 с y_1 и x_2 с y_2. Из 28.1 2) следует, что кратчайшая γ соединяет точки $x \subset y$. Если бы $\gamma(1) = y \notin C_x$, то в силу 28.1 1) кратчайшую γ, а вместе с ней и кратчайшую γ_1, можно было бы продолжить за точку $\gamma_1(1) = y_1$, что противоречит выбору точки $y_1 \in C_{x_1}$. Аналогично рассматривается случай $y_2 \in C_{x_2}$. Значит правая часть равенства (3) содержится в левой. $\square$

28.3. Обратимся к множествам раздела C_x^0, $C_{x_i}^0$ в касательных пространствах многообразий M, M_i. Так как многообразие M замкнуто, то множество раздела C_x^0 гомеоморфно гиперсфере в касательном пространстве $T_x M$. Обозначим $D_{x_i}^0$ компоненту связности множества $T_x M \setminus C_x^0$, содержащую начало прострранства $T_x M$. Замыкание $\bar D_x^0$ распадается в объединение $\bar D_x^0 = D_x^0 \cup C_x^0$, $C_x^0 = \partial D_x^0$. Аналогичная формула справедлива и для множеств $C_{x_i}^0$, $D_{x_i}^0$, в касательных пространствах многообразий M_1, M_2. Далее под отображениями $\exp_x$, $\exp_{x_i}$ будем понимать сюрьекции

$$\exp_x : \bar D_x^0 \to M, \quad \exp_{x_i} : \bar D_{x_i}^0 \to M_i.$$

При этом, для разложения (2) будет

$$\exp_x X = (\exp_{x_1} X_1, \exp_{x_2} X_2). \tag{4}$$

Из формул (1), (2) вытекают равенства

$$D_x^0 = \exp_x^{-1} D_x,\ C_x^0 = \exp_x^{-1} C_x,\ D_{x_i}^0 = \exp_{x_i}^{-1} D_{x_i},\ C_{x_i}^0 = \exp_{x_i}^{-1} C_{x_i}. \tag{5}$$

Применяя к равенству (3) отображения $\exp_\omega^{-1}$, с использованием (4), (5), получаем представление множества раздела C_x^0 в виде дизъюнктного объединения

$$C_x^0 = (C_{x_1}^0 + D_{x_2}^0) \cap (D_{x_1}^0 + C_{x_2}^0) \cup (C_{x_1}^0 + C_{x_2}^0). \tag{6}$$

В формуле (6) плюс обозначает сумму Минковского в касательном пространстве $T_x M$.

28.4. Многообразие $G_{2,4}^+$ можно представить как риманово произведение двух сфер

$$G_{2,4}^+ = S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{7}$$

Плюккерово вложение 6(2) отождествляет многобразие (10) с суммой Минковского 26(4). Для точки $x = \omega \in G_{2,4}^+$ и многообразий $M = G_{2,4}^+$, $M_1 = S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $M_2 = S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ легко находятся множества

$$\begin{gathered} x_1 = \omega^+,\ x_2 = \omega^-,\ C_{x_1} = -\omega^+,\ C_{x_2} = -\omega^-,\ C_{x_1} \times C_{x_2} = -\omega, \\ D_{x_1} = S^+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \setminus \{-\omega^+\},\ D_{x_2} = S^-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \setminus \{-\omega^-\}. \end{gathered} \tag{8}$$

Подставляя равенства (8) в формулу (3), получаем новое доказательство теоремы 26.3.

28.5. Для множеств раздела в касательных пространствах сфер M_1, M_2 справедливы равенства (см. 27)

$$\begin{aligned} &T_{x_1} M_1 = \sigma^+,\ T_{x_2} M_2 = \sigma^-,\ C_{x_1}^0 = S_+^1\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right),\ C_{x_2}^0 = S_-^1\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right), \\ &D_{x_1}^0 = D_+\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \left\{X \in \sigma^+ \mid |X| < \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right\}, \\ &D_{x_2}^0 = D_-\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) = \left\{X \in \sigma^- \mid |X| < \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Теорема. *Множества раздела C^0_ω в касательном пространстве грассманиана $G^+_{2,4}$ разлагается в дизъюнктное объединение*

$$C^0_\omega = \left[S^1_+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + D_-\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right] \cup \left[D_+\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) + S^1_-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \cup$$
$$\cup \left[S_+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + S^1_-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]. \tag{10}$$

Доказательство. Достаточно подставить (9) в (6). □

В (10) два первых элемента объединения являются полноториями, а последний – тором Клиффорда 27(1) (ср. 27.4).

Литература

1. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию* . С.-Петербург, Наука, 1994.
2. Y.-C. Wong, *Conjugate loci in Grassmann manifolds.* — Bull. AMS. **74, No. 2** (1968), 240–245.
3. А. Н. Глушаков, *Два вопроса внешней геометрии плюккеровых вложений многообразий Грассмана.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 5–12.
4. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Части I, II, III.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 84–129.
5. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Части IV, V.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **252** (1998).

Kozlov S. E. Geometry of real Grassmannian manifolds. VI.

Using invariants of the canonical decomposition of the tangent vector of an arbitrary geodesic in the real Grassmannian variety $G^+_{p,n}$, we give a complete description of the set of conjugate points. For an arbitrary shortest curve, a nontrivial variation with fixed endpoints is constructed. The separation sets for the Grassmannian $G^+_{2,4}$ and its tangent bundle are found.

Санкт-Петербургский
Государственный университет

Поступило 19 августа 1998 г.