Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

С. Е. Козлов

ПОВОРОТ ОДНОМЕРНОГО НАПРАВЛЕНИЯ В ФИЗИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Введение. Рассмотрим периодическое движение точки по замкнутому контуру в трехмерном евклидовом пространстве. В релятивистской модели Минковского такое движение описывается мировой линией определенного вида (см. п.1.1). В работе [1] введено понятие *поворота одномерного направления физического пространства* для времениподобной кривой. В настоящей заметке дана оценка снизу этого поворота при условии периодичности движения точки по замкнутому контуру (см. п.1.1).

Автор благодарен А.В.Осипову, доказательством которого неравенства (19) мы воспользовались в этой работе.

1.1. Периодические частицы. Пусть M есть четырехмерное векторное (с естественной аффинной структурой) пространство Минковского. Дадим инвариантное определение мировой линии γ, определяющей периодическое движение точки по замкнутой кривой в трехмерном физическом пространстве E. Кривая $\gamma : s \mapsto M$, $s \in \mathbb{R}$ называется *периодической частицей*, если для нее выполнены следующие требования:

1) $\gamma \in C^3$, $\gamma'^2 = 1$, $\gamma' \wedge \gamma'' \neq 0$;

2) Существует такой времениподобный вектор $\xi \neq 0$, что $\gamma(\mathbb{R}) + \xi = \gamma(\mathbb{R})$ (периодичность); (1)

3) $\gamma' \wedge \xi \neq 0$ (регулярность движения точки в физическом пространстве).

Наличие периодической частицы γ позволяет построить изометрию пространства Минковского M на прямую ортогональную сумму

$$M = T \oplus E, \tag{2}$$

где $T = \mathrm{Lin}\,\xi$ – одномерное евклидово пространство, а $E = \xi^\perp = M/T$ – трехмерное антиевклидово пространство (физическое пространство). Заметим, что последнее равенство означает

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96-01-00431.

отождествление при помощи канонического изоморфизма. Отображение

$$\mathrm{Pr}\ : M \to E$$

можно рассматривать как проекцию пространства M на свое фактор-пространство M/T, или как ортогональную проекцию на подпространство $\xi^{\perp}$.

Утверждение. *Кривая*

$$\tilde{\gamma}(s) := \mathrm{Pr}\,\gamma(s) \tag{3}$$

является C^3-гладкой регулярной периодической кривой, с некоторым периодом $S > 0$, в физическом пространстве E.

Доказательство. Из 3) (1) следует, что кривая $\tilde{\gamma}$ является C^3-гладкой и регулярной. Рассмотрим кривую $\bar{\gamma}(\bar{s}) = \gamma(s) - \xi$, $\bar{s} \in \mathbb{R}$. В силу 2) (1) параметризации $\gamma(s)$ и $\bar{\gamma}(\bar{s})$ суть натуральные параметризации одной и той же кривой. Поэтому найдется такое $S \neq 0$, что $\gamma(s) = \bar{\gamma}(s+S) = \gamma(s+S) - \xi$, откуда

$$\tilde{\gamma}(s) = \tilde{\gamma}(s+S). \qquad \square \tag{4}$$

Далее через S мы будем обозначать наименьшее положительное число, удовлетворяющее равенству (4). При этом

$$\gamma(s+S) = \gamma(s) + \tilde{\xi},\ \tilde{\xi} = \xi/n,\ n \in \mathbb{N},\ <\gamma', \tilde{\xi}> > 0. \tag{5}$$

1.2. Две специальные параметризации периодической частицы. Рассмотрим инерциальную систему отсчета с осью времени направленной по вектору $e_0 := \xi/|\xi|$ (для любого вектора η по определению $|\eta| := \sqrt{|\eta^2|}$). Если система единиц измерения выбрана так, что скорость света $c = 1$, то координата некоторого события по оси $T = \mathrm{Lin}\,\xi = \mathrm{Lin}\,e_0$ интерпретируется как время этого события в данной системе отсчета.

Из (2), (3), (5) следует

$$\gamma(s) = t(s)e_0 + \tilde{\gamma}(s), \qquad t'(s) > 0, \tag{6}$$

где $t(s)$ есть время события $\gamma(s)$. Кривая γ лежит на цилиндре, направляющая которого есть замкнутая кривая $\tilde{\gamma} \subset E$, а образующая коллинеарна вектору $e_0 \perp E$. Вся кривая γ может быть получена из участка $\gamma([0,S])$ трансляцией на вектора $m\tilde{\xi}$, $m \in \mathbb{Z}$. При этом $\tilde{\gamma}([0,S]) = \tilde{\gamma}(\mathbb{R})$.

Кривая γ времениподобна, поэтому можно перейти к ее e_0-кинематической параметризации (см. [2])

$$\gamma_0(t) = te_0 + \tilde{\gamma}_0(t). \tag{7}$$

Пусть замена переменной $s = s(u)$, $\frac{ds}{du} := \dot{s} > 0$ переводит параметризацию $\tilde{\gamma}(s)$ в натуральную параметризацию $\rho(u) := \tilde{\gamma}(s(u))$. Тем самым возникает третья параметризация кривой γ

$$r(u) = \tau(u)e_0 + \rho(u), \ \left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 = \dot{\rho}^2 = -1. \tag{8}$$

Очевидно, функции $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}_0$, ρ являются, соответственно, $S, T_0 = |\tilde{\xi}|$, L-периодическими. Здесь L – длина направляющей $\tilde{\gamma}$, $s \in [0, S]$. Формы метрик этих параметризаций удовлетворяют соотношению

$$ds^2 = dt^2 - du^2. \tag{9}$$

Функции $a := \frac{dt}{du} > 1$ и $v = \frac{1}{a}$ являются L-периодическими функциями параметра u. Функция v есть пространственная скорость движения точки по замкнутому контуру $\tilde{\gamma}$. Следовательно, v меньше скорости света $c = 1$. Из (9) следует

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{a^2 - 1}. \tag{10}$$

2.1. Вторая кривизна времениподобной кривой. Из условия 1) (1) следует, что кривизна $k_0 = |\gamma''|$ кривой γ отлична от нуля. Введем обозначения $n_0 := \gamma'$, $n_1 := \gamma''/k_0$. Эти вектора ортонормированы, поэтому $n_0^2 = -n_1^2 = 1$. Пусть $n_1' - k_0 n_0 \neq 0$. Тогда, полагая $k_1 := |n_1' - k_0 n_0|$, $n_2 := (n_1' - k_0 n_0)/k_1$, приходим к формулам

$$n_0' = k_0 n_1, \ n_1' = k_0 n_0 + k_1 n_2, \tag{11}$$

где вектора n_0, n_1, n_2 ортонормированы (ср. с [3], гл.4). Если $k_1 = 0$, то вектор n_2 определен не однозначно. Из (12) следует

$$\gamma' = n_0, \ \gamma'' = k_0 n_1, \ \gamma''' = k_o' n_1 + k_0(k_0 n_0 + k_1 n_1). \tag{12}$$

Скалярное произведение в M канонически индуцирует Лоренц-инвариантное псевдоевклидово скалярное произведение во внешней алгебре $\Lambda(M)$ (см. [1]). По определению модуль любого поливектора равен квадратному корню из модуля его скалярного квадрата. Для параметризаций (6), (8) из (11) следует

$$k_1 = \frac{|\gamma' \wedge \gamma'' \wedge \gamma'''|}{|\gamma' \wedge \gamma''|^2} = \frac{|\dot r \wedge \ddot r \wedge \dddot r|}{|\dot r \wedge \ddot r|^2}. \tag{13}$$

Скаляр k_1 назовем *второй кривизной* кривой γ.

2.2. Двумерное ориентированное подпространство Минковского $\sigma \subset M$ физически интерпретируется как *одномерное направление физического пространства* (см. [4], с.13). Каждой площадке σ взаимно однозначно соответствует бивектор ω со скалярным квадратом, равным (-1) (см. [1]). Под поворотом направления физического пространства (см. [1], с.150) периодической частицы γ будем понимать интеграл

$$\Omega(\gamma) = \int_0^S |\omega'|\, ds, \text{ где } \omega = \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{|\gamma' \wedge \gamma''|}. \tag{14}$$

Из (12) непосредственно следует

$$\omega = n_0 \wedge n_1,\ \omega' = k_1 n_0 \wedge n_2,\ |\omega'| = k_1. \tag{15}$$

Поэтому, с учетом (10), (15)

$$\Omega(\gamma) = \int_0^S |\omega'| ds = \int_0^S k_1 ds = \int_0^L k_1 \sqrt{a^2 - 1}\, du. \tag{16}$$

2.3. Вычисление второй кривизны k_1. В параметризации (8) функция $\rho = \rho(u)$ задает натуральную параметризацию замкнутой кривой $\tilde\gamma$ в физическом пространстве E. Пусть кривизна этой кривой $k = k(\tilde\gamma) \neq 0$. Тогда для этой кривой справедливы формулы Френе

$$\dot t = kn,\ \dot n = -kt + \tau b,\ \dot b = -\tau n. \tag{17}$$

Формулы (13), (17) позволяют найти функцию $k_1 = k_1(k, \tau, a)$. Приведем соответствующие вычисления

$$\dot r = e_0 a + t,\ \ddot r = e_0 \dot a + kn,\ \dddot r = e_0 \ddot a + \dot k n + k(-kt + \tau b).$$

$$\dot r \wedge \ddot r = \dot a t \wedge e_0 + ak e_0 \wedge n + kt \wedge n.$$

$$\dot r \wedge \ddot r \wedge \dddot r = (ak^3 - \dot a \dot k + \ddot a k) e_0 \wedge t \wedge n +$$

$$+(ak^2\tau)e_0 \wedge n \wedge b - (\dot{a}k\tau)e_0 \wedge t \wedge b + (k^2\tau)t \wedge n \wedge b.$$

Пусть $\Delta := |\dot{r} \wedge \ddot{r}| = [k^2(a^2-1) + \dot{a}^2]^{\frac{1}{2}}$. Тогда

$$(\dot{r} \wedge \ddot{r} \wedge \dddot{r})^2 = k^2\tau^2\Delta^2 + [ak^3 - \dot{a}\dot{k} + \ddot{a}k]^2,$$

$$k_1^2 = \frac{k^2\tau^2}{\Delta^2} + \left[\frac{\ddot{a}k - \dot{a}\dot{k} + ak^3}{\Delta^2}\right]^2. \tag{18}$$

Если кривизна $k = 0$, то нельзя использовать формулы Френе (17). Приведем вычисление k_1 специально для этого случая

$$k^2 = -t^2 \implies \dot{k}^2 = -\dot{t}^2 \implies |\dot{t}| = |\dot{k}|,$$

$$< t, \dot{t} >= 0 \implies < t, \ddot{t} >= 0,$$

$$|\dot{r} \wedge \ddot{r} \wedge \dddot{r}| = |t \wedge e_0\dot{a} \wedge \ddot{t}| = |\dot{a}\dot{t}| = |\dot{a}\dot{k}|, \; k_1 = |\dot{a}\dot{k}|/\Delta^2.$$

Таким образом, формула (18) остается справедливой и в случае $k = 0$.

3.1. Лемма. *Пусть $f : u \mapsto f(u) \in \mathbb{R}$ является C^2-гладкой, L-периодической функцией и $f(u) > 1$. Тогда для любой C^1-гладкой, L-периодической, неотрицательной функции k, при условии $\dot{f}^2 + k^2 \neq 0$, справедливо неравенство*

$$\int_0^L \frac{|\ddot{f}k - \dot{f}\dot{k} + fk^3|}{[(f^2-1)k^2 + \dot{f}^2]}\sqrt{f^2-1}\,du \geqslant \frac{f_0}{\sqrt{f_0^2-1}}\int_0^L k\,du, \tag{19}$$

где $f_0 = \max_{u\in\mathbb{R}} f(u)$.

Доказательство. Пусть $k \neq 0$. Тогда

$$\frac{\ddot{f}k - \dot{f}\dot{k} + fk^3}{[(f^2-1)k^2 + \dot{f}^2]}\sqrt{f^2-1} = \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\dot{f}}{k\sqrt{f^2-1}}\right)\right]^{\cdot} + \frac{fk}{\sqrt{f^2-1}},$$

откуда следует неравенство (19). При помощи аппроксимации $k(\varepsilon) := k + \varepsilon$ убеждаемся в справедливости (19) для функции k, удовлетворяющей условию леммы. $\square$

3.2. Теорема. *Для любой периодической частицы γ с периодом S и скоростью пространственного движения $v = \frac{1}{a}$ справедлива оценка*

$$\Omega(\gamma) \geqslant \frac{2\pi}{\sqrt{1-v_0^2}}, \quad \text{где} \quad v_0 = \min_{x\in\mathbb{R}} v(x), \tag{20}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда кривая γ трехмерна, цилиндр $(\gamma + \operatorname{Lin}\xi)$ выпуклый, а скорость v – постоянна.

Доказательство. Для $f = a$ из (16), (18), (19) следует

$$\Omega(\gamma) = \int_0^L k_1\sqrt{a^2-1}\,du \geqslant \int_0^L \frac{ak}{\sqrt{a^2-1}}\,du \geqslant \frac{1}{\sqrt{1-v_0^2}}\int_0^L k\,du,$$

По теореме Фенхеля [5] последний интеграл не меньше 2π, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда кривая $\tilde{\gamma}$ плоская и выпуклая. Отсюда следует утверждение теоремы. □

3.3. Асимптотика индикатрисы направлений равномерной периодической частицы при $v \to 0$. Кривая

$$\omega = \omega(s) = \frac{\gamma' \wedge \gamma''}{|\gamma' \wedge \gamma''|}(s) \subset \Lambda(M)$$

называется *индикатрисой направлений в физическом пространстве* частицы γ (см. [1]). Это замкнутая кривая в плюккеровой модели грассманова многообразия $G^+_{2,4}$, снабженного Лоренц-инвариантной псевдоримановой метрикой. Длина этой кривой по определению (14) равна повороту $\Omega(\gamma)$. Переходя к параметру u, находим

$$\omega = \frac{\dot r \wedge \ddot r}{\Delta} = \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\, t \wedge n.$$

При $v \to 0,\ \dot v = 0$

$$\omega(u) \to \omega_0(u) = e_0 \wedge n(u) \subset e_0 \wedge S^2(E),$$

где $S^2(E)$ – единичная сфера в физическом пространстве E. Очевидно, вложение

$$\zeta\ :\ S^2(E) \to \Lambda(M),\ x \mapsto e_0 \wedge x$$

является изометрическим. Кроме того, из [1] 6.1 следует, что образ $\zeta(S^2(E))$ есть вполне геодезическая поверхность в грассмановом многообразии $G^+_{2,4}$. Этот образ есть единичная сфера в некотором антиевклидовом трехмерном подпространстве пространства $\Lambda(M)$.

Для равномерной частицы ($v = \text{const}$) из условия $\gamma' \wedge \gamma'' \neq 0$ следует, что $k \neq 0$. Поэтому для замкнутой кривой $\tilde{\gamma} \subset E$ определена регулярная индикатриса главных нормалей γ^n. В силу сказанного, пары $\gamma^n \subset S^2(E)$ и $\omega_0 \subset \zeta(S^2(E))$ конгруэнтны как подмножества антиевклидовых трехмерных пространств. Кривая γ^n делит сферу на две равновеликие части. Если γ^n не имеет самопересечений, то это хорошо известный факт. Если же γ^n имеет самопересечения, то эти части и их равновеликость нужно понимать в обобщеном смысле (см. [6]). Поэтому тем же свойством обладает и пара $\omega_0 \subset \zeta(S^2(E))$.

Литература

1. С. Е. Козлов, *Топология и Лоренц-инвариантная псевдориманова метрика многообразия направлений в физическом пространстве.* Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 141–151.
2. С. Е. Козлов, *Математические основы специальной теории относительности и пространство Лобачевского.* Изд. СПбГУ, СПб. (1995).
3. П. К. Рашевский, *Риманова геометрия и тензорный анализ.* М., (1953).
4. Р. И. Пименов, *Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени).* Зап. научн. семин. ЛОМИ **6** (1968), 1–496.
5. W. Fenchel, *Über Krümmung und Windung geschhlossener Raumkurven.* Math. Ann. **101** (1929) 238–252.
6. В. И. Арнольд, *Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов.* УМН, 1995, т.50, вып.1 (301).

Kozlov S. E. Rotation of the one-dimensional direction in the physical space for a periodic particle.

We give an invariant definition of the world line (of a particle) in Minkowski space corresponding to a periodic motion of a particle in physical 3-space. We obtain the sharp lower estimate for the rotation of the one-dimensional direction of the partical in the physical space as a function of the velocity of the particle.

Санкт-Петербургский
Государственный университет

Поступило 12 декабря 1997 г.