Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

В. В. Макеев

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ПЛОСКОСТЕЙ, СВЯЗАННЫЕ С ВЫПУКЛЫМИ КОМПАКТАМИ

Тремя авторами [1–3] была независимо установлена нижеследующая топологическая лемма 1 и даны ее геометрические применения. Данная работа содержит несколько новых результатов в этом направлении.

Обозначим G_{kn} многообразие Грассмана неориентированных k-плоскостей, проходящих через некоторую точку в $\mathbb{R}^n$. Обозначим $\gamma_{kn} : E_{kn} \to G_{kn}$ каноническое расслоение: слоем над точкой $e \in G_{kn}$ является она же, рассматриваемая как k-мерное векторное пространство.

Лемма 1. *Индекс пересечения по модулю 2 циклов $c_1, \dots, c_{n-k+1}$ тотального пространства E_{kn} канонического расслоения γ_{kn} над многообразием Грассмана, гомологичных по модулю 2 нулевому сечению этого расслоения, равен 1.*

Следствие. *Индекс пересечения по модулю 2 циклов $c_1, \dots, c_{n-k+1} \in H_{k(n-k)}(E_{kn}; \mathbb{Z}_2)$, пересекающихся трансверсально со слоем пространства E_{kn} общего положения в нечетном числе точек равен 1.*

Лемма 2. *Пусть каждой тройке взаимно перпендикулярных проходящих через точку $O \in \mathbb{R}^3$ плоскостей поставлена в соответствие непрерывно зависящая от этих плоскостей тройка точек – по одной из каждой плоскости. Тогда для некоторых трех взаимно перпендикулярных плоскостей соответствующее им троеточие является ортогональной проекцией на них некоторой точки пространства $\mathbb{R}^3$.*

Доказательство. Для всякой правосторонней декартовой системы координат $Oxyz$ с началом в точке O обозначим (x_1, y_1), (y_2, z_1), (z_2, x_2) координаты соответствующих трех точек в плоскостях Oxy, Oyz, Ozx соответственно. Мы должны доказать, что в некоторой системе координат выполяняются условия: $x_1 = x_2$,

$y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$. Можно ограничиться случаем, когда координатные функции точек гладко зависят от системы координат (в остальных случаях лемма получается предельным переходом). В ситуации общего положения, то есть когда $(0,0,0)$ есть регулярное значение отображения $(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$, имеется лишь конечное число искомых систем координат и соответственно после надлежащей факторизации конечное число троек попарно перпендикулярных плоскоестей. По стандартным соображениям вычет по модулю 2 числа искомых троек попарно перпендикулярных плоскостей всегда одинаков в ситуации общего положения. Докажем, что этот вычет равен единице.

Для всякого гладкого сечения s_{23} канонического расслоения $\gamma_{23} : E_{23} \to G_{23}$ каждой тройке (E_1, E_2, E_3) попарно ортогональных плоскостей мы можем сопоставить троеточие $(s_{23}(E_1)$, $s_{23}(E_2)$, $s_{23}(E_3))$. Соответствиями такого рода мы в дальнейшем и ограничимся. Равенство $z_1 = z_2$ выделяет среды декартовых систем координат в ситуации общего положения гладкое компактное двумерное подмногообразие M. Имеется проекция $\pi : M \to E_{23}$, пусть в системе координат $Oxyz$ координаты соответствующего троеточия суть (x_1, y_1), (x_2, z_1), (z_2, x_2), тогда $\pi(Oxyz)$ – точка в плоскости Oxy с координатами (x_2, y_2). Если систему координат заменить на другую с той же плоскостью Oxy и тем же набором координатных плоскостей, то $\pi(Oxyz)$ не меняется. Поэтому $\pi : M \to E_{23}$ индуцирует проекцию $\pi' : M' \to E_{23}$ многообразия соответствующих троек координатных плоскостей. Докажем, что $\pi'(M')$ пересекается со слоем E_{23} общего положения в нечетном числе точек. Это следует из того, что при повороте системы координат $Oxyz$ вокруг оси Oz на 90^0 величина $z_1 - z_2$ меняет знак, а значит в ситуации общего положения обращается в ноль нечетное число раз.

По следствию леммы 1 циклы $\pi'(M')$ и $s_{23}(G_{23})$ пересекаются, что и означает, что для соответствующей системы координат $Oxyz$ выполняется $z_1 = z_2$, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, что и требовалось.

Замечание. Лемму 2 можно переформулировать на язык векторных расслоений.

Построим шестимерное векторное расслоение γ над пространством B ортонормированных положительно ориентированных реперов в $\mathbb{R}^3$ В качестве слоя над тройкой векторов $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$, отложенных от точки $O \in \mathbb{R}^3$ возьмем прямую сумму $E_1 \oplus E_2 \oplus E_3 \subset$

$(\mathbb{R}^3)^3$ трех двумерных пространств, первое из которых натянуто на векторы $(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$, второе на пару векторов $(\overline{e}_1, \overline{e}_3)$ и третье соответственно на $(\overline{e}_2, \overline{e}_3)$. Тотальное пространство E рассматриваемого расслоения, очевидно, есть девятимерное подмногообразие $B \times (\mathbb{R}^3)^3$. Обозначим B_1 факторпространство пространства B, получаемое отождествлением тех реперов $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$, для которых соответствующие им тройки двумерных пространств (E_1, E_2, E_3) отличаются разве лишь порядком. Отождествим также слои над склеиваемыми точками базы B, совмещая совпадающие слагаемые E_i. Мы построили шестимерное векторное расслоение γ_1 над пространством B_1 троек попарно перпендикулярных проходящих через точку $O \in \mathbb{R}^3$ плоскостей. В тотальном пространстве E имеется инвариантное относительно вышеописанных отождествлений трехмерное подрасслоение, слои которого состоят из векторов $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$, являющихся ортогональными проекциями некоторого вектора $\overline{a} \in \mathbb{R}^3$ на плоскости E_i соответственно. После факторизации получается трехмерное подрасслоение γ_2 расслоения γ_1. Факторрасслоение $\gamma_3 = \gamma_1/\gamma_2$ является трехмерным векторным расслоением над B_1.

Проведенное выше рассуждение доказывает, что гладкое сечение расслоения γ_3 общего положения имеет нечетное число нулей, то есть, что старший класс Штифеля–Уитни $w_3(\gamma_3) \neq 0$.

Ромбододекаэндром называется многогранник, ограниченный двенадцатью плоскостями, проведенным через ребра некоторого куба и составляющими равные углы с гранями, смежными с этими ребрами.

Следствие 1. *Любое подмножество $A \subset \mathbb{R}^3$ диаметра d умещается в ромбододекаэдре с расстоянием d между параллельными гранями.*

Для каждой плоскости P из произвольной тройки взаимно перпендикулярных плоскостей (P, Q, R) проведем две пары, перпендикулярных к P параллельных плоскостей со следующими свойствами. Плоскости в разных парах перпендикулярны друг другу и составляют углы в 45^0 с плоскостями Q и R. Параллельные плоскости равноудалены от множества A и удалены друг от друга на расстояние d. Построенные плоскости высекают в плоскости P квадрат со стороной d и с центром в некоторой точке $O(P)$. По лемме 2 для некоторой тройки (P, Q, R) попарно перпендикулярных плоскостей точки $O(P)$, $O(Q)$, $O(R)$ являются ортогональными проекциями на эти плоскости некоторой точки $O \in \mathbb{R}^3$. Тогда соответствующие шесть пар параллельных плоскостей, ассоциированных с (P, Q, R), ограничивают ромбододекаэдр с центром в точке O, содержащей множество A. $\square$

Предложенное доказательство следствия значительно проще первоначального, план которого описан в [5]. Предложенное рассуждение позволяет также проще получить основной результат [5], утверждающий, что вокруг всякого выпуклого тела в $\mathbb{R}^3$, кроме тел некоторого специального типа, можно описать аффинный образ ромбододекаэдра. Основной частью доказательства [5] является доказательство утверждения, что количество аффинных образов ромбододекаэдра, описанных вокруг выпуклого тела с гладкой границей общего положения, нечетно. Из приведенных выше рассуждений видно, что число аффинных образов ромбододекаэдра, описанных вокруг тела постоянной ширины с гладкой границей обшего положения, нечетно.

Хорда выпуклого тела называется аффинным диаметром, если ее концы лежат в параллельных опорных плоскостях этого тела.

Теорема 1. *У любого выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ некоторые три взаимно перпендикулярные аффинные диаметры пересекаются в одной точке.*

Докажаем теорему для выпуклых тел с гладкой границей положительной гауссовой кривизны. Такое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ имеет единственный аффинный диаметр любого наперед заданного направления, который непрерывно зависит от этого направления. Всякой тройке попарно перпендикулярных плоскостей сопоставим тройку точек, в которых эти плоскости пересекают прямые, натянутые на перпендикулярные к плоскости аффинные диаметры тела K. Теперь теорема следует непосредственно из леммы 2. Для произвольного выпуклого тела теорема получается предельным переходом. $\square$

Следующая теорема обобщает хорошо известное утверждение о возможности разбиения плоской выпуклой фигуры на четыре части равной площади парой перпендикулярных прямых.

Теорема 2. *Для любых $n-1$ непрерывно распределенных в $\mathbb{R}^n$ масс $M_1, \dots, M_{n-1}$ найдется такая $(n-2)$-мерная плоскостть $E \subset \mathbb{R}^n$, что для любого $1 \leqslant i \leqslant n-1$ существуют две взаимно перпендикудярные гиперплоскости, одна из которых E, делящие массу M_i на* *четыре равных части.*

Докажем теорему для распределений масс, имеющих гладкую плотность с компактным выпуклым носителем.

Пусть G_{2n} – многообразие Грассмана неориентированных 2-плоскостей, проходящих через точку $O \in \mathbb{R}^n$. Ортогонально спроектируем распределения масс $M_1, \ldots, M_{n-1}$ в плоскости $g \in G_{2n}$. То есть для всякой $g \in G_{2n}$ и $1 \leqslant i \leqslant n-1$ рассмотрим распределения массы M_i' в плоскости g с плотностью $\psi_i(x) = \int_{E(x)} \varphi_i(x)\, d\mu$, где φ_i – плотность распределения массы M_i, а $E(x)$ – ортогональное дополнение к плоскости g в точке $x \in g$. Мы должны доказать, что найдется такая плоскость $g \in G_{2n}$ и точка $x \in g$, что для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ существует пара ортогональных прямых, проходящих в g через точку x и делящих массу M_i' на четыре равные части.

Обозначим M – многообразие пар ортогональных прямых, лежащих во всевозможных плоскостях $g \in G_{2n}$. Для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и распределения массы M_i общего положения множество пар прямых $M' \subset M$, делящих массу M_i' на четыре равные части, есть гладкое компактное подмногообразие M коразмерности 3. Спроектируем M' в тотальное пространство E_{2n}, сопоставив паре ортогональных прямых из $g \in G_{2n}$ их точку пересечения. Покажем, что проекция M' в E_{2n} имеет нечетное число общих точек с плоскостью из G_{2n} общего положения. Докажем, что для распределения массы общего положения на плоскости, имеющего гладкую плотность с компактным выпуклым носителем, существует нечетное число пар прямых (соответственно нечетное число их точек пересечения), делящих эту массу на четыре равные части.

Для указанного распределения массы и произвольной прямой на плоскости, найдется единственная параллельная ей прямая, делящая рассматриваемую массу пополам. Рассмотрим упорядоченную пару ортогональных прямых l_1 и l_2, каждая из которых делит данную массу пополам. Очевидно, что массы заключенные в первом и третьем квадранте относительно l_1 и l_2, а также во втором и четвертом попарно равны. Обозначим их соответственно a и b. При одновременном повороте направлений l_1 и l_2 на 90^0 гладкая функция этих направлений $(a-b)$ меняет знак (квадранты меняются ролями). Поэтому $(a-b)$ для распределения массы общего положения имеет нечетное число нулей, что и требовалось доказать.

Теперь теорема 2 вытекает из следствия леммы 1, примененного к $(n-1)$ циклам-проекциям циклов M^i в многообразии E_{2n}.

Нижеследующая теорема 3 обобщает хорошо известное утверждение [6] о возможности разбиения плоской выпуклой фигуры на шесть частей равной площади тремя пересекающимися в одной точке прямыми.

Теорема 3. *Для любых $n-1$ непрерывно распределенных в $\mathbb{R}^n$ масс $M_1, \dots, M_{n-1}$ найдется такая $(n-2)$-мерная плоскость $E \subset \mathbb{R}^n$, что для каждого $1 \leqslant i \leqslant n-1$ существуют три содержащие E гиперплоскости, делящие массу M_i на шесть равных частей.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 2.

Как и при доказательстве теоремы 2, считаем распределения масс M_i имеющими гладкую плотность с компактными выпуклыми носителями для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и ортогонально спроектируем их на плоскость $f \in G_{2n}$. Докажем, что найдется такая плоскость $g \in G_{2n}$ и точка $x \in g$, что для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ существуют три прямые, проходящие через точку x и делящие массу M_i' на шесть равных частей, где M_i' – проекция M_i в плоскость $g \in G_{2n}$.

Обозначим M многообразие троек пересекающихся в одной точке прямых, лежащих в плоскостях $g \in G_{2n}$. Для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ и распределения массы M_i общего положения множество троек прямых $M^i \subset M$, делящих массу M_i' на шесть равных частей есть гладкое компактное подмногообразие M коразмерности 5. Спроектируем M^i в тотальное пространство E_{2n}, сопоставив тройке пересекающихся прямых их точку пересечения. Покажем, что проекция M^i в E_{2n} имеет нечетное число общих точек с плоскостью из G_{2n} общего положения. Это следует из того, что распределение массы общего положения с гладкой плотностью с компактным выпуклым носителем на плоскости имеет нечетное число, так называемых, шестидольных точек, через которые можно провести три прямые, делящие данную массу на шесть равных частей. Это легко усмотреть из доказательства существования шестидольных точек [6, 7]. Они, как и в доказательстве предыдущей теоремы, находятся во взаимно-однозначном соответствии с нулями некоторой гладкой функции, принимающей на концах промежутка значения разного знака. Такая функция в ситуации общего положения имеет нечетное число нулей.

Теперь теорема 3 вытекает из следствия леммы 1, примененного к $(n-1)$ циклам проекциям циклов M^i в многообразии E_{2n}.

Следующая теорема 4 является простым обобщением основного результата [8].

Теорема 4. *Для выпуклых компактов $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ найдутся такие n гиперплоскостей $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, что параллельные им пары опорных для K_1 и K_2 гиперплоскостей содержат концы n попарно перпендикулярных аффинных диаметров компактов K_1 и K_2 соответственно.*

Докажем теорему для выпуклых компактов K_1 и K_2 с гладкой границей положительной гауссовой кривизны. Для остальных выпуклых компактов теорема получается простым предельным переходом.

Пусть $G_{n-1,n}$ – многообразие Грассмана неориентированных $(n-1)$-плоскостей, проходящих через точку $O \in \mathbb{R}^n$. Пусть M – многообразие неупорядоченных наборов из n раздичных точек $G_{n-1,n}$. Очевидно, M – некомпактное гладкое многообразие размерности $n(n-1)$. Обозначим M_i для $i = 1, 2$ компактное гладкое $\frac{n(n-1)}{2}$-мерное подмногообразие M, состоящее из наборов $(n-1)$-плоскостей, параллельных опорным $(n-1)$-плоскостям компакта K_i, проведенным в концах n попарно-ортогональных аффинных диаметров K_i. Выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей положительной гауссовой кривизны имеет единственный аффинный диаметр, параллельный наперед заданному направлению и гладко зависящий от этого направления. Отсюда нетрудно вывести, что M_i диффеоморфны многообразиям неупорядоченных наборов попарно-ортогональных, проведенных через некоторую точку в $\mathbb{R}^n$, прямых. Индекс пересечения по модулю 2 циклов M_1 и M_2 в M не зависит от выбора компактов K_1 и K_2, так как любые два такие компакта гладко деформируемы друг в друга. В [8] доказано, что если K_1 – шар, а K_2 – эллипсоид с попарно различными осями, то M_1 и M_2 трансверсально пересекаются в одной точке. Поэтому индекс пересечения M_1 и M_2 равен 1 по модулю 2. Значит $M_1 \cap M_2 \neq \varnothing$. Теорема 4 доказана. $\square$

Замечания. 1. Если в теореме 4 один из компактов является шаром, то получается основная теорема [8].

2. Опорные гиперплоскости в теореме 4 не обязательно являются различными.

Теорема 5. *Для двух центрально-симметричных и непрерывно распределенных в $\mathbb{R}^n$ масс с общим центром симметрии найдутся* *три плоскости, делящие одновременно эти массы на восемь равных частей.*

Пусть G_{23} – многообразие Грассмана неориентированных плоскостей, проходящих через общий центр симметрии распределения масс – точку $O \in \mathbb{R}^n$. Пусть M – многообразие неупорядоченных троек различных "точек" из G_{23}.

Будем считать, что рассматриваемые распределения масс имеют компактные носители и, что массы, заключенные внутри частей, на которые плоскости "точки" $m \in M$ разбивают пространство, являются гладкими положительными функциями от "точки" m. В остальных случаях теорема получается предельным переходом.

Для распределения масс общего положения множество троек плоскостей $m \in M$, разбивающих эти массы на восемь равных частей, есть компактное трехмерное подмногообразие $M_1(M_2)$ многообразия M. Компактность M_i следует из положительности масс и компактности их носителей, а трехмерность из того, что M_i определяется тремя независимыми условиями: равны объемы тела K_i, заключенные в четырех парах симметричных трехгранных углов, образованных тройкой плоскостей $m \in M$. Индекс пересечения по модулю 2 циклов M_1 и M_2 в M не зависит от выбора компактов общего положения. Докажем, что этот индекс пересечения равен 1.

Пусть K_1 – шар, а K_2 – эллипсоид с попарно-различными осями. Тогда M_1 и M_2 трансверсально пересекаются в одной точке – тройке плоскостей, натянутой на главные оси эллипсоида K_2. Проверка условия трансверсальности и общности положения K_1 и K_2 совершенно аналогична, выполненной в [8]. $\square$

Следствия. 1. Для выпуклого центрально-симметричного компакта $K \subset \mathbb{R}^3$ найдутся три плоскости, делящие на восемь равных частей и его объем и площаль поверхности.

Для доказательства рассмотрим для произвольного натурального n пару тел (K_1, K_2^n), где $K_1 = K$, а K_2^n есть окрестность радиуса $\frac{1}{n}$ границы компакта K. По теореме найдется тройка плоскостей m_n, делящая одновременно объемы K_1 и K_2^n на восемь равных частей. Из последовательности троек плоскостей m_n можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой тройке m проходящих через центр симметрии тела K плоскостей, которая и является искомой. $\square$

2. Для непрерывно центрально-симметрично распределенной в $\mathbb{R}^n$ массы найдутся три взаимно-перпендикулярные плоскости, делящие эту массу на восемь равных частей.

Для доказательства достаточно рассмотреть еще одну сферически симметрично непрерывно распределенную массу и воспользоваться теоремой 5. $\square$

Три попарно перпендикулярные плоскости разбивают трехмерное пространство на восемь равных октантов. Повернем одновременно четыре из этих октантов, имеющие общий луч, на некоторый угол вокруг этого луча. Полученную конфигурацию октантов будем называть *скрученной*.

Теорема 6. *Для всякого непрерывного распределения массы в* $\mathbb{R}^3$ *найдется скрученная система октантов, разбивающая массу на восемь равных частей.*

Теорему 6 достаточно доказать для распределений массы в пространстве, имеющих гладкую плотность с компактным носителем. В остальных случаях доказательство получается предельным переходом.

Скрученные системы октантов образуют некомпактное семимерное многообразие M. Условие равенства заключенных в октантах масс для распределения с плотностью общего положения выделяет в M компактное нульмерное многообразие N, то есть конечный набор точек. Компактность указанного множества точек вытекает из следующего очевидного утверждения. Если в каждом из покрывающих пространство октантов с общей вершиной заключена положительная масса, то общая вершина октантов принадлежит выпуклой оболочке носителя плотности распределенной массы. Вычет по модулю 2 числа точек множества N не зависит от выбора плотности общего положения, так как они гладко деформируемы друг в друга. Докажем, что этот вычет равен единице.

Как следует из доказательства предыдущей теоремы центрально-симметрично распределенная масса общего положения разделяется на восемь равных частей нечетным числом троек, взаимно-перпендикулярных плоскостей, проходящих через центр симметрии распределения. Скрученные системы октантов, разделяющие массу на восемь равных частей разбиваются на пары симметричных относительно центра симметрии распределения. $\square$

Замечание. В работе [9] сформулирована сходная теорема о возможности вписать в произвольный выпуклый компакт в $\mathbb{R}^3$ скрученную правильную четырехугольную призму с наперед заданным отношением ребер. Доказательство в [9], основанное на вычислении целочисленного индекса пересечения, ошибочно. Однако, доказательство без труда получается после надлежащей факторизации и вычисления индекса пересечения по модулю 2.

Литература

1. E. Fadell, S. Husseini, *An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk–Ulam and Bourgin–Yang theorems.* — Ergodic Theory Dynamical Systems **8** (1998), 73–85.
2. R. T. Živalevič, S. T. Vrečica, *An extension of the ham sandwich theorem.* — Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 183–186.
3. В. Л. Дольников, *Трансверсали семейств множеств в $\mathbb{R}^n$ и связь между теоремами Хелли и Борсука.* — Мат. сб. **184, No. 5** (1993), 111–131.
4. В. Л. Дольников, *Об одном обобщении теоремы о бутерброде.* — Мат. заметки **52, вып. 2** (1992), 27–37.
5. В. В. Макеев, *Об аффинных образах ромбододекаэдра, описанных вокруг трехмерного выпуклого тела.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997), 191–195.
6. R. Buck, E. Buck, *Equipartition of convex sets.* — Math. Mag. **22** (1948/49), 195–198.
7. И. М. Яглом, В. Г. Болтянский, *Выпуклые фигуры.* Гостехиздат, М., 1951.
8. R. Rattray, *An antipodal point, orthogonal point theorem.* — Ann. Math. **60** (1954), 502–512.
9. H. Griffits, *The topology of square pegs in round holes.* — Proc. London Math. Soc. **62, No. 3** (1991), 647–672.

Makeev V. V. Special configurations of planes associated with convex compact.

Topological methods are applied for proving several combinatorial geometry properties of convex compact sets. It is proved that if $K_1, \ldots, K_{n-1}$ are convex compacta in $\mathbb{R}^n$, then there is an $(n-2)$-plane $E \subset \mathbb{R}$ such that for $i = 1, 2, \ldots, n-1$ there exist three (two orthogonal) hyperplanes through E dividing each of K_i into six (four) parts of equal volume. It is also proved that for every two bounded centrally symmetric continuous distributions of masses in R^3 with common center of symmetry there are three planes through this center, dividing both masses into eight equal parts.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 13 апреля 1998 г.