Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

В. М. Нежинский

АНАЛОГ ГРУППЫ МИЛНОРА ЗАЦЕПЛЕНИЯ В ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ

§1. Введение

1.1. Формулировка проблемы. Пусть $n, s, p_1, \dots, p_s$ – натуральные числа. *Сингулярным зацеплением типа* $(p_1, \dots, p_s)$ *в* S^n называется последовательность непрерывных отображений

$$f_1 : S^{p_1} \to S^n, \dots, f_s : S^{p_s} \to S^n$$

с попарно непересекающимися образами. Сингулярные зацепления $(f_1, \dots, f_s)$ и $(f_1', \dots, f_s')$ называются *псевдогомотопными*, если существует последовательность непрерывных отображений

$$F_1 : S^{p_1} \times I \to S^n \times I, \dots, F_s : S^{p_s} \times I \to S^n \times I$$

с попарно непересекающимися образами, такая что

$$F_i(x, 0) = (f_i(x), 0) \quad \text{и} \quad F_i(x, 1) = (f_i'(x), 1)$$

для $x \in S^{p_i}$ и $i = 1, \dots, s$.

Проблема, которой посвящена работа – это проблема псевдогомотопической классификации сингулярных зацеплений типа $(p_1, \dots, p_s)$ в S^n. Мы будем заниматься лишь случаем

$$p_1 = \dots = p_{s-1}, \quad n = 2p_1 + 1.$$

1.2. Перечень результатов, имеющихся в литературе. Автору известны следующие результаты, имеющие отношение к псевдогомотопической классификации сингулярных зацеплений типа $(k, \dots, k, p)$ в S^{2k+1}, где k и p – натуральные числа.

Пусть сначала $k = 1$ и $p = 1$. В работе Милнора [8] имеется *гомотопическая* классификация двух- и трехкомпонентных одномерных сингулярных зацеплений в $\mathbb{R}^3$. В статье Левина [6] содержится гомотопическая классификация четырехкомпонентных

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 98-01-00832 и грант поддержки научных школ).

одномерных зацеплений в S^3. В работе Хабеггера и Лина [1] доказано существование алгоритма, который для любых двух одномерных зацеплений в S^3 устанавливает, гомотопны они или нет. Если в приведенных выше формулировках слова гомотопическая и гомотопны заменить словами псевдогомотопическая и псевдогомотопны соответственно, словосочетание одномерные зацепления заменить словосочетанием одномерные сингулярные зацепления и символ $\mathbb{R}^3$ заменить символом S^3, то полученные формулировки тоже будут верны. Что формулировки остаются верными после первой замены – следует из работы Лина [7] (см. [7], Theorem), остальное очевидно.

Пусть далее $k > 1$. Для двухкомпонентных сингулярных зацеплений (типа (k, p) в S^{2k+1}) и для многокомпонентных сингулярных зацеплений (типа $(k, \ldots, k, p)$ в S^{2k+1}) с $p < 2k-1$ имеются редукции нашей проблемы к стандартной гомотопической задаче. Редукция в случае двухкомпонентных сингулярных зацеплений с $p < 2k - 1$ содержится в статье Скотта [13] (см. [13], Theorem из §2), с $p < 3k - 2$ – в работах Кошорке [3, 5] (см. [3], Prop. E и [5], Theorem 5.1), в общем случае – в работах автора [9, 10] (см. [9], теорема Б, или [10], теорема из пункта 2.3). Редукция в случае многокомпонентных сингулярных зацеплений с $p < 2k - 1$ по существу содержится в статьях Кошорке [2, 4, 5] (см. [4], Main Theorem и Prop. 1.7, [5], Theorem A, и [2], Prop. 2.19); ср. также с работой автора [11] (см. [11], подпункты 1 и 6).

1.3. Краткое содержание работы. На протяжении всей статьи мы будем считать фиксированными натуральные числа $k > 1$, p и r.

Основные результаты работы можно разбить на три части.

(1). Построена редукция проблемы псевдогомотопической классификации произвольных $(r+1)$-компонентных сингулярных зацеплений типа $(k, \ldots, k, p)$ в S^{2k+1} к проблемам псевдогомотопической классификации

(a) произвольных r-компонентных сингулярных зацеплений типа $(k, \ldots, k)$ в S^{2k+1};

(b) произвольных двухкомпонентных сингулярных зацеплений типа (k, p) в S^{2k+1};

(c) таких $(r + 1)$-компонентных сингулярных зацеплений

$$(f_1, \ldots, f_r, f)$$

типа $(k,\dots,k,p)$ в S^{2k+1}, что их сингулярные подзацепления

$$(f_i, f)$$

псевдогомотопны тривиальным сингулярным зацеплениям ($i = 1,\dots,r$), а сингулярные подзацепления

$$(f_1,\dots,f_r)$$

имеют фиксированный псевдогомотопический тип.

(2) Сформулирована теорема, решающая проблему псевдогомотопической классификации сингулярных зацеплений вида (a). Проблема псевдогомотопической классификации сингулярных зацеплений вида (b) сведена к стандартной гомотопической проблеме. Построена короткая точная последовательность, сводящая в благоприятных случаях проблему псевдогомотопической классификации сингулярных зацеплений вида (c) к стандартной алгебро-гомотопической задаче.

(3) Для некоторых натуральных чисел $k(>1)$, p и r построены полные наборы псевдогомотопических инвариантов $(r+1)$-компонентных сингулярных зацеплений типа $(k,\dots,k,p)$ в S^{2k+1}. Замечу, что среди наших инвариантов есть аналоги инвариантов Милнора [8] и Левина [6] одномерных зацеплений.

1.4. Расположение материала. Эта статья, помимо настоящего введения, содержит три параграфа и добавление. Первая серия результатов, перечисленных в п. 1.3 составляет основное содержание §2, вторая – §4, третья – добавления; §3 содержит подготовительный материал, нужный для §4 и добавления.

Поскольку главная цель статьи – анонсировать результаты, доказательства некоторых теорем опущены. Подробному изложению материала §§2–4, содержащему как формулировки, так и доказательства, будет посвящена статья [12].

§2. Геометрические результаты

Обозначим через $M(r,k,p)$ множество псевдогомотопических классов $(r+1)$-компонентных сингулярных зацеплений типа $(k,\dots,k,p)$ в S^{2k+1}. Нетрудно доказать, что *если $r=1$ или $p<2k-1$, то покомпонентное связное суммирование превращает множество $M(r,k,p)$ в абелеву группу.* (Первое доказано в [10], второе очевидно.)

Оказывается (и в этом состоит наш первый результат), ограничения на числа r и p существенны:

при $r=2$ *и* $p=2k-1$ *покомпонентное связное суммирование определено в* $M(r,k,p)$ *неоднозначно, а при* $r=2$ *и* $p=2k$, *вообще говоря, не определено.*

Первое ясно из рис. 1, второе – из рис. 2.

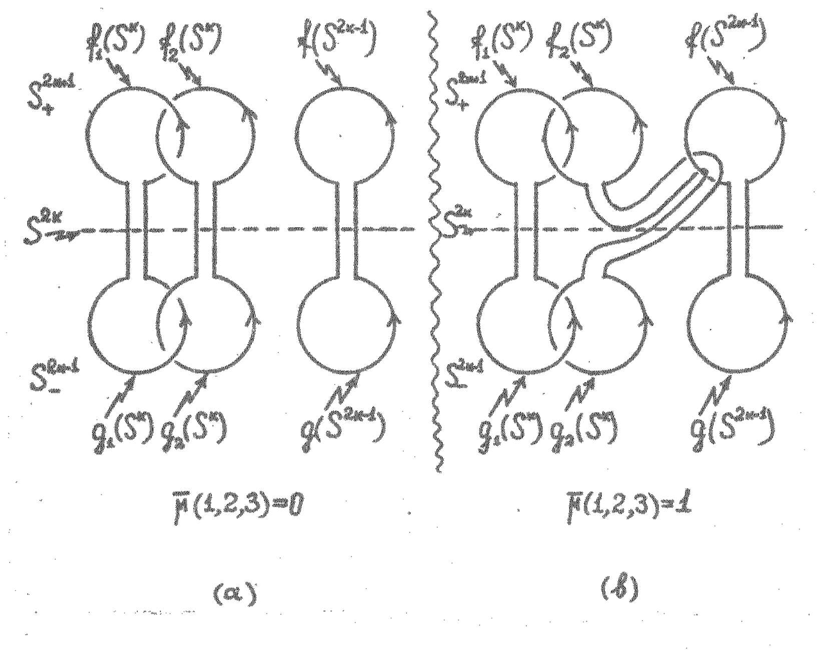

Рис. 1.

(Через $\bar\mu(1,2,3)$ и $\nu(1,2,3)$ обозначены определяемые в добавлении настоящей статьи псевдогомотопические инварианты зацеплений типа $(k,k,2k-1)$ в S^{2k+1} и $(k,k,2k)$ в S^{2k+1}, соответственно. Замечу, что в наших случаях

$$\bar\mu(1,2,3)\in\pi_{2k-1}(S^{2k-1})=\mathbb{Z}$$

и

$$\nu(1,2,3)\in\pi_{2k}(S^{2k})=\mathbb{Z}.)$$

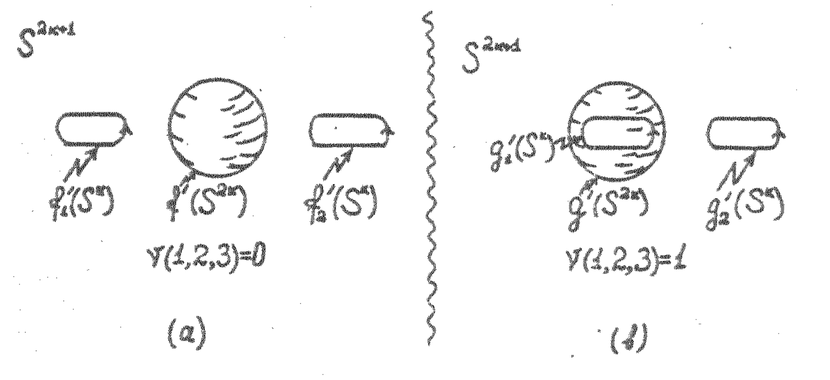

Рис. 2.

Сингулярное зацепление называется *тривиальным*, если оно состоит из постоянных отображений. Назовем сингулярное зацепление $(f_1,\dots,f_r,f)$ *простым*, если для каждого натурального числа $i \leqslant r$ сингулярное зацепление (f_i,f) псевдогомотопно какому-нибудь тривиальному зацеплению. Обозначим через $\tilde{M}(r,k,p)$ подмножество множества $M(r,k,p)$, составленное из псевдогомотопических классов простых сингулярных зацеплений.

Теорема 1 (a). *Существует каноническая биекция множества $M(r,k,p)$ на множество*

$$\tilde{M}(r,k,p)\times\underbrace{M(1,k,p)\times\ldots\times M(1,k,p)}_{r\ \text{сомножителей}}$$

Доказательство см. в [12], п. 2.2.1.

Положим $M(r,k)=M(r-1,k,k)$ и определим отображение

$$\delta:\tilde{M}(r,k,p)\to M(r,k)$$

правилом: псевдогомотопическому классу простого сингулярного зацепления $(f_1,\dots,f_r,f)$ типа $(k,\dots,k,p)$ в S^{2k+1} ставится в соответствие псевдогомотопический класс сингулярного зацепления $(f_1,\dots,f_r)$ (типа $(k,\dots,k)$ в S^{2k+1}).

Теорема 1 (b). *Отображение δ – сюръекция.*

Это очевидно.

§3. Гомотопические результаты

3.1. Группа $\mathcal{G}_p(r,A)$. Через $B(r)$ мы будем обозначать букет r экземпляров сферы S^k, через in_i – стандартное вложение сферы S^k в букет $B(r)$ в качестве i-й сферы.

Пусть $A=(a_{ij})$ – целочисленная $(r-1)\times r$-матрица, $1\leqslant i\leqslant r-1$ и $1\leqslant j\leqslant r$, такая что

$$a_{ii}=0 \quad \text{и} \quad a_{ij}=(-1)^{k+1}a_{ji}$$

для $1\leqslant i,j\leqslant r-1$. Обозначим через $X(r,A)$ клеточное пространство, полученное приклеиванием к букету $B(r)$ шаров D^{2k} посредством отображений

$$[a_{i1}\mathrm{in}_1+\ldots+a_{ir}\mathrm{in}_r,\mathrm{in}_i],\quad 1\leqslant i\leqslant r-1$$

(здесь знак $+$ обозначает сумму сфероидов, знак $[\ ,\ ]$ – произведение Уайтхеда отображений). Далее, обозначим через $Y(r,A)$ клеточное пространство, полученное приклеиванием к $X(r,A)$ шаров D^{2k} посредством отображений

$$[\mathrm{in}_j,\mathrm{in}_j],\quad 1\leqslant j\leqslant r.$$

Наконец, имеем включение

$$\mathrm{in}: X(r,A)\hookrightarrow Y(r,A).$$

Мы полагаем:

$$\mathcal{G}_p(r,A)=\mathrm{Im}\{\mathrm{in}_*:\pi_p(X(r,A))\to\pi_p(Y(r,A))\}.$$

Замечу, что

$$\mathcal{G}_p(1,\varnothing)=\mathrm{Im}\{\mathrm{in}_*:\pi_p(S^k)\to\pi_p(S^k_2)\},$$

где символ $Y(1,\varnothing)$ заменен более стандартным символом S^k_2 (см., например, [14]).

3.2. Теорема о разложении группы $\mathcal{G}_p(r,A)$. Пусть i – натуральное число, не превосходящее r. Пусть

$$\mathrm{in}_i^{\sim}: Y(1,\varnothing)\to Y(r,A)$$

– стандартное вложение, продолжающее сквозное отображение

$$S^k\xrightarrow{\mathrm{in}_i}B(r)\hookrightarrow Y(r,A),$$

а

$$\mathrm{ar}_i : Y(r, A) \to Y(1, \varnothing)$$

– отображение, являющееся композицией стандартной ретракции

$$Y(r, A) \to \mathrm{in}_i^{\sim}(Y(1, \varnothing))$$

и гомеоморфизма

$$\mathrm{in}_i^{\sim}(Y(1, \varnothing)) \to Y(1, \varnothing), \quad x \mapsto (\mathrm{in}_i^{\sim})^{-1}(x).$$

Определим гомоморфизм

$$\eta_i : \mathcal{G}_p(r, A) \to \mathcal{G}_p(1, \varnothing)$$

правилом: если $u \in \mathcal{G}_p(r, A)$ и $f : S^p \to Y(r, A)$ – какой-нибудь представитель класса u, то $\eta_i(u)$ есть класс отображения $\mathrm{ar}_i \circ f$. Что это определение корректно и что η_i – гомоморфизм – очевидно. Положим

$$\tilde{\mathcal{G}}_p(r, A) = \mathrm{Ker}\,\eta_1 \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}\,\eta_r.$$

Теорема 2. *Существует канонический изоморфизм группы $\mathcal{G}_p(r, A)$ на группу*

$$\tilde{\mathcal{G}}_p(r, A) \oplus \underbrace{\mathcal{G}_p(1, \varnothing) \oplus \ldots \oplus \mathcal{G}_p(1, \varnothing)}_{r\,слагаемых}$$

Доказательство см. в [12], п. 6.1.

3.3. Вычисление группы $\mathcal{G}_p(1, \varnothing)$. Пусть

$$E : \pi_p(S^k) \to \pi_{p+1}(S^{k+1})$$

– гомоморфизм надстройки. Определим гомоморфизм

$$\iota : \mathcal{G}_p(1, \varnothing) \to E\pi_p(S^k)$$

формулой

$$\mathrm{in}_*(u) \mapsto Eu, \quad u \in \pi_p(S^k).$$

Теорема 3 (a). *Это определение корректно. Гомоморфизм ι есть эпиморфизм, а если $p \leqslant 3k - 2$, то и изоморфизм.*

Доказательство см. в [12], п. 3.3.

3.4. Точная последовательность для группы $\tilde{\mathcal{G}}_p(r,A)$. Определим гомоморфизмы

$$\varkappa_1(A)\colon \bigoplus^{r-1}\pi_p(S^{2k-1}) \to \bigoplus^{r(r-1)/2}\pi_p(S^{2k-1}),$$
$$\varkappa_2(A)\colon \bigoplus^{r-1}\pi_p(S^{2k}) \to \bigoplus^{r(r-1)/2}\pi_p(S^{2k})$$

формулой

$$\begin{aligned}(u_1,\dots,u_{r-1}) \mapsto &(a_{12}(u_1-u_2),\dots,a_{1r-1}(u_1-u_{r-1}),a_{1r}u_1,\\ &a_{23}(u_2-u_3),\dots,a_{2r-1}(u_2-u_{r-1}),a_{2r}u_2,\\ &\dots\dots\dots\\ &a_{r-2,r-1}(u_{r-2}-u_{r-1}),a_{r-2,r}u_{r-2},\\ &a_{r-1,r}u_{r-1}).\end{aligned}$$

Имеем включение

$$\mathrm{in}^{\sim}\colon B(r)\hookrightarrow Y(r,A).$$

Для $p<3k-2$ определим следующим образом гомоморфизм

$$\hat{\mu}\colon \operatorname{Coker}\varkappa_1(A)\to\tilde{\mathcal{G}}_p(r,A).$$

Пусть $u\in\operatorname{Coker}\varkappa_1(A)$ и пусть

$$(v_{12},v_{13},\dots,v_{1r},v_{23},\dots,v_{2r},\dots,v_{r-1,r}),$$

где $v_{ij}\in\pi_p(S^{2k-1})$, – какой-нибудь представитель класса u. Тогда

$$\hat{\mu}(u)=\mathrm{in}^{\sim}_*\left\{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}[\mathrm{in}_j,\mathrm{in}_i]_*(v_{ij})\right\}.$$

Что $\hat{\mu}$ гомоморфизм – очевидно. Что это определение корректно – будет доказано в [12] (см. [12], п. 6.2).

Положим

$$Z=B(r)\cup(Y(r,A)\setminus X(r,A))$$

и определим отображение

$$\mathrm{apr}\colon Y(r,A)\to\bigvee^{r-1}S^{2k}$$

как композицию проекции

$$Y(r,A) \to Y(r,A)/Z$$

и стандартного гомеоморфизма

$$Y(r,A)/Z \to \bigvee^{r-1} S^{2k}.$$

Далее, для каждого натурального числа $i \leqslant r-1$ определим отображение

$$\mathrm{apr}_i : \bigvee^{r-1} S^{2k} \to S^{2k}$$

как композицию ретракции букета $\bigvee^{r-1} S^{2k}$ на i-ю сферу букета и стандартного гомеоморфизма i-й сферы на S^{2k}. Наконец, для $p < 3k-2$ определим гомоморфизм

$$\hat{\nu} : \tilde{\mathcal{G}}_p(r,A) \to \operatorname{Ker} \varkappa_2(A)$$

формулой

$$u \mapsto ((\mathrm{apr}_1 \circ \mathrm{apr})_*(u), \dots, (\mathrm{apr}_{r-1} \circ \mathrm{apr})_*(u)),$$

где $u \in \tilde{\mathcal{G}}_p(r,A)$. Что это определение корректно, т.е. что $\operatorname{Im} \hat{\nu} \subset \operatorname{Ker} \varkappa_2(A)$, – будет доказано в [12] (см. [12], п. 6.2).

Теорема 3 (b). *Если $p < 3k-2$, то последовательность*

$$0 \to \operatorname{Coker} \varkappa_1(A) \xrightarrow{\hat{\mu}} \tilde{\mathcal{G}}_p(r,A) \xrightarrow{\hat{\nu}} \operatorname{Ker} \varkappa_2(A) \to 0$$

точна.

Доказательство см. в [12], п. 6.2.

Замечу, что если $p = 2k-1$, то гомоморфизм $\hat{\mu}$ есть изоморфизм. Это следствие теоремы 3 (b) и того, что поскольку $\pi_{2k-1}(S^{2k}) = 0$, то при $p = 2k-1$ группа $\operatorname{Ker} \varkappa_2(A)$ тривиальна.

§4. Основные редукции

4.1. Гомоморфизм λ. Обозначим через $\mathfrak{M}(r,k)$ множество целочисленных матриц (a_{ij}) размера $(r-1)\times r$ ($1 \leqslant i \leqslant r-1$ и $1 \leqslant j \leqslant r$), таких что

$$a_{ii} = 0 \quad \text{и} \quad a_{ij} = (-1)^{k+1} a_{ji}$$

для $1 \leqslant i,j \leqslant r-1$. Нетрудно видеть, что операция сложения превращает множество $\mathfrak{M}(r,k)$ в абелеву группу.

Гомоморфизм

$$\lambda : M(r,k) \to \mathfrak{M}(r,k)$$

определяется следующим правилом. Если $u \in M(r,k)$ и $(f_1, \dots, f_r)$ – какой-нибудь представитель класса u, то $\lambda(u)$ есть матрица (m_{ij}), такая что m_{ij} есть коэффициент зацепления отображения f_i с f_j, если $i \neq j$, и нуль, если $i = j$. Что это определение корректно и что λ гомоморфизм – очевидно.

Теорема 4 (a). *Гомоморфизм λ есть изоморфизм.*

Доказательство см., например, в [12], п. 4.1.

4.2. Гомоморфизм ξ. Гомоморфизм

$$\xi : M(1,k,p) \to \mathcal{G}_p(1,\varnothing)$$

определяется следующим образом. Пусть $u \in M(1,k,p)$. Ясно, что существует такой представитель (f_1, f) класса u, что f_1 есть гладкое вложение. Пусть

$$g : S^k \to S^{2k+1} \setminus \operatorname{Im} f_1$$

– какое-нибудь гладкое вложение, такое что коэффициент зацепления подмногообразия $g(S^k)$ с $f_1(S^k)$ равен 1. Простая стандартная проверка показывает, что g – гомотопическая эквивалентность. Пусть

$$g' : S^{2k+1} \setminus \operatorname{Im} f_1 \to S^k$$

– какое-нибудь непрерывное отображение, гомотопически обратное к g. Рассмотрим отображение

$$S^p \to Y(1,\varnothing), \quad x \mapsto \operatorname{in}(g'(f(x))).$$

Класс этого отображения и есть $\xi(u)$. Что это определение корректно и что ξ гомоморфизм – очевидно.

Теорема 4 (b). *Гомоморфизм ξ есть изоморфизм.*

Это несложное следствие теоремы 2.3 из [10]. Доказательство см. в [12], п. 4.2.

Следствие. *Если* $p \leqslant 3k-2$, *то сквозной гомоморфизм*

$$M(1,k,p) \xrightarrow{\xi} \mathcal{G}_p(1,\varnothing) \xrightarrow{\iota} E\pi_p(S^k)$$

есть изоморфизм.

Действительно, достаточно сопоставить предыдущую теорему с теоремой 3 (a).

4.3. Точная последовательность для множества $\delta^{-1}(u)$**.** Обозначим через pt_1 южный полюс сферы S^k. Для $i=1,\dots,r-1$ определим отображение

$$\rho_i : M(r,k,p) \to \pi_p(S^{2k})$$

следующим образом. Пусть $v \in M(r,k,p)$ и $(f_1,\dots,f_r,f)$ – какой-нибудь представитель класса v. Ясно, что существует гладкое вложение

$$g_1 : D^{2k+1} \to S^{2k+1},$$

такое что

$$g_1(0) = f_i(\mathrm{pt}_1) \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} g_1 \cap (\operatorname{Im} f_r \cup \operatorname{Im} f) = \varnothing.$$

Пусть

$$g_2 : S^{2k+1} \setminus (f_i(\mathrm{pt}_1) \cup f_r(\mathrm{pt}_1)) \to S^{2k}$$

– какая-нибудь гомотопическая эквивалентность, такая что

$$g_2(g_1(x)) = x, \quad x \in S^{2k} (= \partial\mathcal{D}^{2k+1}).$$

Тогда $\rho_i(v)$ есть гомотопический класс отображения

$$S^p \to S^{2k}, \quad x \mapsto g_2(f(x)).$$

То, что это определение корректно, проверяется простым стандартным рассуждением.

В дальнейшем в этом пункте мы всюду будем считать, что $p < 3k-2$. Мы будем также считать фиксированным элемент

$$u \in M(r,k).$$

Определим отображение

$$\tilde{\tilde{\nu}}(u) : \delta^{-1}(u) \to \operatorname{Ker} \varkappa_2(\lambda(u))$$

формулой

$$v \mapsto (\rho_1(v), \dots, \rho_{r-1}(v))$$

(для $v \in \delta^{-1}(u)$). Что это определение корректно, т.е. что

$$(\rho_1(v), \dots, \rho_{r-1}(v)) \in \operatorname{Ker} \varkappa_2(\lambda(u)),$$

– доказано в [12] (см. [12], п. 4.5).

Лемма. *Пусть $p < 3k-2$. Тогда существует каноническая биекция*

$$\hat{\nu}^{-1}(0) \to \tilde{\tilde{\nu}}^{-1}(0),$$

где

$$\hat{\nu} : \tilde{\mathcal{G}}_p(r, \lambda(u)) \to \operatorname{Ker} \varkappa_2(\lambda(u))$$

– гомоморфизм с $A = \lambda(u)$ из п. 3.4, продолжимая до сюрвекции

$$\hat{\pi} : \tilde{\mathcal{G}}_p(r, \lambda(u)) \to \delta^{-1}(u),$$

такой что

$$\tilde{\tilde{\nu}} \circ \hat{\pi} = \hat{\nu}.$$

Это доказано в [12] (см. [12], §7).

Определим отображение

$$\tilde{\tilde{\mu}} : \operatorname{Coker} \varkappa_1(\lambda(u)) \to \delta^{-1}(u)$$

формулой

$$\tilde{\tilde{\mu}} = \hat{\pi} \circ \hat{\mu}.$$

Теорема 4 (c). *Пусть $p < 3k-2$. Тогда последовательность множеств*

$$0 \to \operatorname{Coker} \varkappa_1(\lambda(u)) \xrightarrow{\tilde{\tilde{\mu}}} \delta^{-1}(u) \xrightarrow{\tilde{\tilde{\nu}}(u)} \operatorname{Ker} \varkappa_2(\lambda(u)) \to 0$$

точна; сверх того, отображение $\tilde{\tilde{\mu}}$ инъективно.

Это следует из теоремы 3 (b) и предыдущей леммы.

Следствие. *Если $p = 2k-1$, то отображение $\tilde{\tilde{\mu}}$ биективно.*

Это очевидно, поскольку при $p = 2k-1$ группа $\operatorname{Ker} \varkappa_2(\lambda(u))$ нулевая.

Добавление. Псевдогомотопические инварианты сингулярных зацеплений

Пусть

$$L = (f_1, \dots , f_r, f)$$

– сингулярное зацепление типа $(k, \dots , k, p)$ в S^{2k+1}. Для различных натуральных чисел i и j, не превосходящих r, положим

$$\bar{\mu}(ij)(L)$$

равным коэффициенту зацепления отображений f_i и f_j. Для натурального числа $i \leqslant r$ рассмотрим сингулярное зацепление (f_i, f), обозначим через v_i его псевдогомотопический класс и положим

$$\bar{\mu}(ir + 1)(L) = \iota(\xi(v_i))(\in E\pi_p(S^k)).$$

Далее, для натуральных чисел $i < j$, не превосходящих числа r, рассмотрим сингулярное зацепление (f_i, f_j, f), обозначим через v'_{ij} его псевдогомотопический класс и положим

$$\nu(i, j, r + 1)(L) = \rho_1(v'_{ij})(\in \pi_p(S^{2k})).$$

Наконец, для натуральных чисел $i < j$, не превосходящих числа r, обозначим через v''_{ij} образ класса v'_{ij} при сквозном отображении

$$M(2, k, p) \to \tilde{M}(2, k, p) \times M(1, k, p) \times M(1, k, p) \to \tilde{M}(2, k, p),$$

где первое отображение – каноническая биекция (см. теорему 1 (a) из §2), второе – проекция. Предположим, что

$$p < 3k - 2$$

и что

$$\nu(i, r, r + 1)(L) = 0 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant r - 1,$$

и положим

$$\bar{\mu}(i\ j\ r + 1)(L) = \tilde{\tilde{\mu}}^{-1}(v''_{ij})(\in \pi_p(S^{2k-1})/\{(\bar{\mu}(i, j)(L))\pi_p(S^{2k-1})\}).$$

Теорема 5. *Пусть L' – сингулярное зацепление (типа $(k,\dots,k,p)$ в S^{2k+1}), псевдогомотопное сингулярному зацеплению L. Тогда:*

$$\begin{aligned}
&\bar\mu(i,j)(L')=\bar\mu(i,j)(L), && 1\leqslant i,j\leqslant r;\\
&\bar\mu(i,r+1)(L')=\bar\mu(i,r+1)(L), && 1\leqslant i\leqslant r;\\
&\nu(i,j,r+1)(L')=\nu(i,j,r+1)(L), && 1\leqslant i<j\leqslant r;
\end{aligned}$$

если

$$\nu(i,r,r+1)(L)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant r-1,$$

то

$$\nu(i,r,r+1)(L')=0,\quad 1\leqslant i\leqslant r-1$$

и

$$\bar\mu(i,j,r+1)(L')=\bar\mu(i,j,r+1)(L),\quad 1\leqslant i<j\leqslant r.$$

Это очевидно.

В заключение сформулирую результаты, относящиеся к обращению теоремы 5.

(i) *Пусть $r=1$ и $p\leqslant 3k-2$. Если*

$$\bar\mu(1,2)(L')=\bar\mu(1,2)(L)(\in E\pi_p(S^k)),$$

то сингулярное зацепление L' псевдогомотопно сингулярному зацеплению L.

Действительно, достаточно сопоставить определение инварианта $\bar\mu(1,2)$ с следствием к теореме 4 (b) (см. п. 4.2).

(ii) *Пусть $r=2$ и $p=2k-1$. Если*

$$\bar\mu(1,2)(L')=\bar\mu(1,2)(L)(\in\mathbb{Z}),$$

$$\bar\mu(1,3)(L')=\bar\mu(1,3)(L),\bar\mu(2,3)(L')=\bar\mu(2,3)(L)\{\in\pi_{2k}(S^{k+1})\},$$

$$\bar\mu(1,2,3)(L')=\bar\mu(1,2,3)(L)\{\in\pi_{2k-1}(S^{2k-1})/(\bar\mu(1,2)\pi_{2k-1}(S^{2k-1}))\},$$

то сингулярное зацепление L' псевдогомотопно сингулярному зацеплению L.

Действительно, достаточно для $p=2k-1$ сопоставить теорему 1 (a) со следствиями к теоремам 4 (b) и 4 (c) и с определениями инвариантов $\bar\mu(i,j)$ и $\bar\mu(1,2,3)$.

Добавлю, что для $k=p=1$ аналогичный результат в литературе имеется; см. [8, последний абзац на с. 193].

Пусть теперь $r = 3$ и $p = 2k-1$. Обозначим через w образ псевдогомотопического класса сингулярного зацепления $L = (f_1, f_2, f_3, f)$ при сквозном отображении

$$M(3,k,2k-1) \to \tilde{M}(3,k,2k-1) \times M(1,k,2k-1) \times M(1,k,2k-1)\times$$
$$\times M(1,k,2k-1) \to \tilde{M}(3,k,2k-1),$$

где первое отображение – каноническая биекция (см. теорему 1 (a)), второе – проекция. Кроме того, обозначим через u псевдогомотопический класс сингулярного зацепления (f_1, f_2, f_3). Согласно следствию к теореме 4 (c), элемент

$$\tilde{\bar{\mu}}^{-1}(w) \in \operatorname{Coker}(\varkappa_1(\lambda(u)))$$

определен корректно. Пусть

$$(\mu(1,2,4), \mu(1,3,4), \mu(2,3,4)) \in$$
$$\in \pi_{2k-1}(S^{2k-1}) \oplus \pi_{2k-1}(S^{2k-1}) \oplus \pi_{2k-1}(S^{2k-1})$$

– какой-нибудь представитель класса $\tilde{\bar{\mu}}^{-1}(w)$. Положим

$$\tau(L) = \bar{\mu}(1,3)(L)\bar{\mu}(2,3)(L)\mu(1,2,4) - \bar{\mu}(1,2)(L)\bar{\mu}(2,3)(L)\mu(1,3,4)+$$
$$+\bar{\mu}(1,2)(L)\bar{\mu}(1,3)(L)\mu(2,3,4)(\in \pi_{2k-1}(S^{2k-1}) \cong \mathbb{Z}).$$

(iii) *Если сингулярное зацепление L' (типа $(k,k,k,2k-1)$ в S^{2k+1}) псевдогомотопно сингулярному зацеплению L, то*

$$\tau(L') = \tau(L).$$

Если сингулярное зацепление L'' типа $(k,k,k,2k-1)$ таково, что

$$\bar{\mu}(i,j)(L'') = \bar{\mu}(i,j)(L)(\in \mathbb{Z}) \text{ *для* } (i,j) = (1,2),(1,3),(2,3),$$
$$\bar{\mu}(i,4)(L'') = \bar{\mu}(i,4)(L)(\in \pi_{2k}(S^{k+1})) \text{ *для* } i = 1,2,3,$$
$$\bar{\mu}(i,j,4)(L'') = \bar{\mu}(i,j,4)(L)(\in \pi_{2k-1}(S^{2k-1})/\{(\bar{\mu}(i,j)(L))\pi_{2k-1}(S^{2k-1})\})$$
$$\text{*для* } (i,j) = (1,2),(1,3),(2,3),$$
$$\tau(L'') = \tau(L),$$

то оно псевдогомотопно сингулярному зацеплению L.

Все это нетрудно вывести из теоремы 1 (a) и следствий к теоремам 4 (b) и 4 (c).

Добавлю, что для $k = 1$ подобный результат (в случае, когда целые числа $\bar{\mu}(1,2)(L)$, $\bar{\mu}(1,3)(L)$ и $\bar{\mu}(2,3)(L)$ попарно взаимно просты) имеется в [6, p. 380, case 5].

Литература

1. N. Habegger, X.-S. Lin, *The classification of links up to homotopy.* — J. Am. Math. Soc. **23** (1990), 389–419.
2. U. Koschorke, *Link maps and the geometry of their invariants.* — Manuscr. Math. **61** (1988), 383–415.
3. U. Koschorke, *On link maps and their homotopy classification.* — Math. Ann. **286** (1990), 753–782.
4. U. Koschorke, *Link homotopy with many components.* — Topology **30** (1991), 267–281.
5. U. Koschorke, *Homotopy, concordance and bordism of link maps.* В кн.: *Global Analysis in Modern Mathematics.* 1993, pp. 283–299.
6. J. P. Levine, *An approach to homotopy classification of links.* — Trans. Am. Math. Soc. **306** (1988), 361–387.
7. X.-S. Lin, *On equivalence relations of links in 3-manifolds.* Preprint, 14 p.
8. J. Milnor, *Link groups.* — Ann. Math. **59** (1954), 177–195.
9. В. М. Нежинский, *Зацепление отображений.* В кн.: *Бакинская межд. топол. конф. Тезисы (часть II).* Баку, 1987, с. 215.
10. В. М. Нежинский, *Группы классов псевдогомотопных сингулярных зацеплений. I.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 114–124.
11. В. М. Нежинский, *Псевдогомотопия зацеплений коразмерностей больших двух.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **208** (1993), 136–151.
12. В. М. Нежинский, *Сингулярные зацепления сфер размерностей $k, \dots, k, p$ в $2k+1$-мерной сфере.* — Алгебра и анализ (в печати).
13. G. P. Scott, *Homotopy links.* — Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **32**, Nos. **3/4** (1968), 186–190.
14. Х. Тода, *Композиционные методы в теории гомотопических групп сфер.* М., 1982.

Nezhinskij V. M. Analogue of Milnor link group in higher-dimensional link theory.

We study singular links of several k-spheres and a p-sphere in the $(2k+1)$-sphere. For $k > 1$ we construct a theory of such singular links parallel to J. Milnor's one-dimensional link theory.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступило 24 марта 1998 г.