Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

Н. Ю. Нецветаев

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ЛЕФШЕЦА О ГИПЕРПЛОСКОМ СЕЧЕНИИ

Хорошо известна теорема Лефшеца о гиперплоском сечении (см., например, [4]). У нее имеется бесчисленное количество обобщений, в которых обобщается ситуация и/или учитывается наличие особенностей на рассматриваемых многообразиях.

Здесь мы приводим одно такое обобщение, доказательство которого основано на модификации теории Морса и идейно близко к приведенному в [4] доказательству классической теоремы Лефшеца (ср. [2]).

Пусть M – полное кэлерово многообразие положительной секционной кривизны, $\dim_{\mathbb{C}} M = m$, и пусть A и B – его неособые комплексные подмногообразия, $\dim_{\mathbb{C}} A = p$, $\dim_{\mathbb{C}} B = q$. Пусть $p + q - m \geqslant 0$. Обозначим через $I(A, B)$ пространство (кусочно-гладких) путей в M с началом в A и концом в B. Имеем естественное включение $A \cap B \subset I(A, B)$ (при котором каждой точке соответствует постоянный путь со значениями в ней).

Теорема 1. *Пара $(I(A, B), A \cap B)$ гомотопически $(p+q-m)$-связна.*

Следствие. *Гомоморфизм включения $\mathrm{in}_*\colon \pi_r(A, A \cap B) \to \pi_r(M, B)$ является изоморфизмом при $r \leqslant p + q - m$ и эпиморфизмом при $r = p+q-m+1$. (Аналогичное утверждение выполняется для групп гомологий и когомологий с произвольными коэффициентами.)*

В случае, когда $M = \mathbb{C}P^m$ – проективное пространство, а B – гиперплоскость в нем, получаем теорему Лефшеца, поскольку, очевидно, пара $(\mathbb{C}P^m, \mathbb{C}P^{m-1})$ является $(2m-1)$-связной. В случае, когда $M = \mathbb{C}P^m$, а B – произвольно, получаем одну теорему Фултона и Лазарсфелда, в дальнейшем обобщавшуюся Зоммезе и ван де Веном (ср. [5]).

Доказательство теоремы 1. Доказательство основано на модификации теории Морса (ср. [4]).

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 98-01-00832 и грант поддержки научных школ).

Будем рассматривать $I(A,B)$ как гладкое “многообразие”. (При необходимости можно перейти к его конечномерной “аппроксимации”, состоящей из кусочно-геодезических кривых.) Рассмотрим на “многообразии” $I(A,B)$ функцию действия L: $I(A,B) \to \mathbb{R}$. Ее абсолютные минимумы – это в точности точки пересечения многообразий A и B.

Теорема 1 вытекает из следующих двух утверждений.

Утверждение 1. *Индексы критических точек (возможно, вырожденных!) функции действия $L\colon I(A,B) \to \mathbb{R}$, отличных от точек минимума, не меньше, чем $p+q-m+1$.*

Утверждение 2. *Пусть M – гладкое многообразие, $f\colon M \to \mathbb{R}$ – гладкая собственная неотрицательная числовая функция на M, причем $\min_{x\in M} f(x) = 0$, и пусть k – некоторое натуральное число. Предположим, что для всякой критической точки $x \in \operatorname{Crit} f$, не являющейся точкой минимума, в касательном пространстве T_xM найдется подпространство размерности k, на котором гессиан функции f отрицательно определен. Предположим, кроме того, что множество минимумов $f^{-1}(\{0\})$ является подкомплексом некоторой триангуляции многообразия M. Тогда пара $(M, f^{-1}(\{0\}))$ является гомотопически $(k-1)$-связной.*

Утверждение 2 доказывается непосредственно (ср. [5]). Мы возмущаем функцию f, чтобы она стала морсовской, и получаем, что $(k-1)$-связной является пара (M,U), где U – произвольно малая окрестность множества минимумов $f^{-1}(\{0\})$. Условие триангулируемости является техническим и может быть ослаблено.

Доказательство утверждения 1. Оставшаяся часть заметки посвящена доказательству утверждения 1.

Каждая критическая точка функции L – это геодезическая γ с началом $a \in A$ и концом $b \in B$, ортогональная в каждой из этих точек соответствующему подмногообразию. Мы предъявим пространство векторных полей, на которых индексная форма I_γ отрицательно определена.

Пусть $\mathcal{T}_\gamma(I(A,B))$ – “касательное пространство” к $I(A,B)$ в точке γ и $\mathbb{T}_\gamma \subset \mathcal{T}_\gamma(I(A,B))$ – его подпространство, определяемое вариациями геодезической γ с нормальным полем скоростей, параллельным вдоль γ. Заметим, что в силу кэлеровости многообразия M параллельный перенос сохраняет комплексную структуру и, следовательно, $\mathbb{T}_\gamma$ является комплексным векторным пространством.

Пусть $T_a(A)$ и $T_b(B)$ – касательные пространства к многообразиям A и B в точках a и b, соответственно. Пространство $\mathbb{T}_\gamma$ естественным образом отождествляется с некоторыми подпространствами в этих пространствах, и на нем определены вторые фундаментальные формы многообразий A и B в точках a и b. Нас будут интересовать формы относительно касательного вектора кривой γ.

Лемма 1. $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{T}_\gamma \geqslant p+q-m+1$.

Доказательство. Пусть $T'_a(A) \subset (d\gamma/dt)^\perp \subset T_b(M)$ – результат переноса касательного пространства $T_a(A)$ к многообразию A в точке a вдоль геодезической γ. Имеем

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{T}_\gamma = \dim_{\mathbb{C}}(T'_a(A) \cap T_b(B)) \geqslant \\ \dim_{\mathbb{C}}(T'_a(A)) + \dim_{\mathbb{C}}(T_b(B)) - \dim_{\mathbb{C}} \left(\left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^\perp \right) \\ = p+q-(m-1) = p+q-m+1.\end{aligned}$$

Наглядно это означает, что на концах геодезической γ касательные пространства T_aA и T_bB содержат “параллельные” комплексные подпространства размерности по крайней мере $p+q-m+1$.

Лемма 2. *Вторая форма комплексного подмногообразия относительно любой нормали есть вещественная часть комплексной квадратичной формы и в подходящих координатах имеет вид*

$$\operatorname{Re} \sum z_i^2.$$

Это свойство выражает хорошо известную “седлообразность” комплексных поверхностей.

Лемма 3. *Пространство $\mathbb{T}_\gamma$ содержит подпространство N по крайней мере половинной размерности (т.е. вещественной размерности по крайней мере $p+q-m+1$), на котором разность вторых форм подмногообразий A и B относительно нормали, идущей вдоль γ, неположительна.*

Это следует из лемм 1 и 2.

Лемма 4. *Сужение индексной формы I_γ геодезической γ на подпространство параллельных вариаций $\mathbb{T}_\gamma$ строго меньше разности вторых форм подмногообразий A и B (на ненулевых элементах).*

Это следует из положительности кривизны многообразия M в силу известной формулы второй вариации функционала действия, см. [1], следствие 2 из леммы 11.1.2.

Из лемм 3 и 4 следует, что индексная форма отрицательно определена на N, и, таким образом, индекс геодезической γ не меньше, чем $p+q-m+1$. Это и значит, что у критических точек функции действия $L\colon I(A,B)\to\mathbb{R}$, отличных от точек минимума, индексы не меньше $p+q-m+1$. Утверждение 1, а с ним и теорема 1, доказаны.

Замечание. Теорема 1, по-видимому, допускает обобщение по нескольким направлениям. Прежде всего, это формулировки, имеющиеся у Зоммезе и ван де Вена.

Благодарности. Полезным обсуждением предмета статьи автор обязан Ю. Д. Бураго, С. В. Иванову, Г. Я. Перельману и Ольге Шестиперовой.

Список литературы

1. Р. Л. Бишоп, Р. Дж. Криттенден, *Геометрия многообразий.* М., Мир, 1967.
2. М. Громов, *Дифференциальные соотношения с частными производными.* М., Мир, 1990.
3. W. Klingenberg, *Riemannian geometry.* Berlin–New York, Gruyter, 1982.
4. Дж. Милнор, *Теория Морса.* М., Мир, 1965.
5. A. J. Sommese, A. Van de Ven, *Homotopy groups of pullbacks of varieties.* — Nagoya Math. J. **102** (1986), 79–90.

Netsvetaev N. Yu. A generalization of the Lefschetz hyperplane section theorem.

The well-known Lefschetz theorem is generalized to the case of two intersecting varieties. The proof is based on a modification of the Morse theory.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 14 июня 1998 г.