Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

Н. Ю. Нецветаев

О РАЗЛОЖЕНИИ КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ С КВАДРАТИЧНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В СВЯЗНУЮ СУММУ

Введение

Мы изучаем глобальное топологическое строение комплексных проективных гиперповерхностей с квадратичными особенностями (ГПКО). Если не оговорено противное, всюду предполагается, что размерность гиперповерхности отлична от 2.

Пусть $A \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — конечное множество, $s := \operatorname{card}(A)$ — его мощность. Обозначим через $\mathfrak{S}_n(A; d)$ множество всех ГПКО $X \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ степени d с $\operatorname{Sing} X = A$. Нетрудно видеть, что $\mathfrak{S}_n(A; d)$ является открытым по Зарискому (возможно, пустым) множеством в некотором проективном пространстве, а потому оно неприводимо и связно (ср. [2]). Отсюда следует, что топологический тип ГПКО X зависит лишь от ее степени и расположения особых точек, но не от конкретного выбора самой гиперповерхности X.

Таким образом, мы имеем корректно поставленную задачу: для заданных n, A и d описать глобальное топологическое строение гиперповерхностей из $\mathfrak{S}_n(A; d)$.

С этой задачей проще всего иметь дело, если количество особых точек s не слишком велико, или степень не слишком мала или гиперповерхность в некотором смысле "типична" или "общего положения". Оказывается, что в таком случае топологический тип гиперповерхности определен простейшими возможными инвариантами, а именно размерностью, степенью и количеством особых точек. С другой стороны, описать топологическое строение того или иного объекта значит предъявить его топологическую модель, что не просто сделать уже для неособой гиперповерхности.

Пусть $X \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — неособая гиперповерхность степени d. Из сказанного выше следует, что ее дифференциально-

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 98-01-00832 и грант поддержки научных школ).

топологический тип определен числами n и d: $X \cong X_n(d)$. В качестве модельной можно взять гиперповерхность, заданную "уравнением Ферма":

$$X_n(d) := \left\{ (z_0 : z_1 : \cdots : z_{n+1}) \in \mathbb{C}P^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n+1} z_i^d = 0 \right\}.$$

Строение гиперповерхности $X_n(d)$ достаточно подробно изучалось У. Браудером, Р. С. Кулкарни, А. С. Либгобером, Дж. У. Вудом и другими (см. ссылки в [2]).

Пусть $n \neq 2$. Тогда $X_n(d)$ допускает разложение в (дифференциальную) связную сумму вида

$$X_n(d) \cong M_n(d) \# a(S^n \times S^n),$$

где $b_n(M_n(d)) = 0$ или 2, если n нечетно, и

$$b_n(M_n(d)) - |\operatorname{sign} X_n(d)| \leq 5,$$

если n четно. (Здесь и ниже $b_n(\cdot) := \operatorname{rk} H_n(\cdot)$ есть число Бетти, а $\operatorname{sign}(\cdot)$ — сигнатура.)

Можно показать, что многообразие $M_n(d)$определено однозначно с точностью до диффеоморфизма (см. [7, 8]).

Хорошо известно, что в окрестности каждой квадратичной особой точки существуют подходящие голоморфные координаты $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, в которых росток гиперповерхности задается уравнением $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 0$. Легко видеть, что аффинный квадратичный конус в $\mathbb{C}^{n+1}$ можно описать как результат стягивания в точку графика нулевого сечения в касательном расслоении n-мерной сферы S^n. С другой стороны, это касательное расслоение изоморфно нормальному расслоению диагонали Δ в $S^n \times S^n$. Следовательно, окрестность квадратичной особой точки канонически (в естественном смысле) гомеоморфна окрестности особой точки (т.е. точки, не имеющей евклидовой окрестности) пространства $(S^n \times S^n)/\Delta$, и, таким образом, это последнее может быть названо "компактной формой" квадратичной особенности. (Отметим, что здесь следует проследить за ориентацией. Всюду далее мы предполагаем, что многообразие $S^n \times S^n$, в котором стягивается диагональ Δ, ориентировано надлежащим образом.)

Определение. Назовем ГПКО X *топологически стандартной*, если она допускает разложение в (дифференциальную) связную сумму вида

$$X = X_n(d; s) = M(n; d)\#(a - s)(S^n \times S^n)\#s(S^n \times S^n/\Delta).$$

Как мы видим, топологический тип топологически стандартной особой гиперповерхности описан с той же точностью, что и топологический тип неособой гиперповерхности, откуда и выбор термина.

Обозначения. Пусть $A = \{P_1, \dots, P_s\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}$. Определим число $\phi_n(A) = \phi_n(\{P_1, \dots, P_s\})$ как наименьшую возможную степень гиперповерхности Y такой, что P_i является изолированной особой точкой для Y при каждом $i = 1, \dots, s$.

Если точки $P_1, \dots, P_s$ находятся "в общем положении", то число $\phi_n(\{P_1, \dots, P_s\})$ зависит только от n и s, и мы обозначаем его через $\phi(n; s)$.

Примеры. (1) Очевидно, $\phi_n(A) \leqslant 2 \cdot \mathrm{card}(A) = 2s$. (Для каждой точки $P_i \in A$ выберем квадратичный конус Q_i с вершиной в P_i, который не проходит через остальные точки из A; тогда $\bigcup_{i=1}^{s} Q_i$ будет искомой гиперповерхностью степени $2s$.)

(2) Пусть $n \geqslant 2$, $d \geqslant 3$. Если точки множества A находятся в общем положении (т.е. никакие $n+2$ из них не лежат в гиперплоскости), то $\phi_n(A) \leqslant 3[\frac{\mathrm{card}(A)-1}{n+2}] + 3$. (Это можно доказать похожим образом, только вместо особых квадрик нужно использовать особые кубики.)

Наш главный результат следующий.

Теорема 0.1. *Пусть $n > 2$ и пусть $A \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — конечное множество. Если $d > \phi_n(A)$, то любая ГПКО $X \in \mathfrak{S}_n(A; d)$ топологически стандартна.*

В частности, пусть $\psi_n(A) := \min\{d : \mathfrak{S}_n(A; d) \neq \emptyset\}$. Если $d > \psi_n(A)$, то каждая гиперповерхность $X \in \mathfrak{S}_n(A; d)$ топологически стандартна.

Следствие. *Пусть $X \subset \mathbb{C}P^{n+1}$, $n > 2$,— гиперповерхность степени $\neq 2$ с s квадратичными особенностями. Пусть X удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) $\deg X > 2s$;

(2) $\deg X > \phi_n(\operatorname{Sing} X)$;
(3) *особые точки гиперповерхности X находятся в достаточно общем положении и* $\deg X > \phi(n; s)$;
(4) *особые точки гиперповерхности X находятся в общем положении (в обычном смысле) и* $\deg X \geqslant 3[\frac{s-1}{n+2}]+4$ *(или, что то же самое,* $s \leqslant [\frac{\deg X - 1}{3}](n+2)$*).*

Тогда гиперповерхность X топологически стандартна.

Доказательство теоремы 0.1 состоит из пяти шагов. Пусть X — ГПКО такая, что $\deg(X) > \phi_n(\operatorname{Sing}(X))$. Тогда:

(1) количество особых точек гиперповерхности X ограничено сверху гомологическими характеристиками гиперповерхности $X_n(d)$ (неравенство (3.1));
(2) гиперповерхность X гомологически стандартна в некотором точно определенном смысле (теорема 4.5);
(3) расположение исчезающих циклов в группе гомологий неособой гиперповерхности, полученной из X возмущением, стандартно (теорема 5.0);
(4) X допускает разложение в связную сумму описанного вида (предложение 6.1);
(5) это разложение единственно с точностью до диффеоморфизма в силу теорем сокращения.

В §1 мы обсуждаем понятие диффеоморфности для особых гиперповерхностей, которое позволяет нам сделать более точными наши утверждения о топологическом типе особых гиперповерхностей, а в §2 перечисляем некоторые факты о неособых гиперповерхностях, нужные для дальнейшего изложения.

Теорема 0.1 и следствие из нее обобщают результаты, анонсированные автором в [9]. С определенными изменениями результаты настоящей работы допускают перенесение на случай полных пересечений (см. заметку О. А. Иванова и автора в настоящем сборнике).

§1. Диффеоморфизм и жесткая изотопия. Типичные гиперповерхности

Ниже мы в основном ограничим наше рассмотрение гиперповерхностями с квадратичными особенностями, хотя почти все нижеследующее может быть с надлежащими изменениями перенесено на случай произвольных изолированных особенностей.

Следующее определение представляется наиболее подходящим для топологического изучения гиперповерхностей с изолированными особенностями.

Определение. Будем говорить, что две гиперповерхности с квадратичными особенностями *диффеоморфны*, если между ними существует гомеоморфизм f, такой, что

(1) f является диффеоморфизмом вне особых точек, и
(2) в некоторых окрестностях соответствующих особых точек существуют подходящие голоморфные координаты x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1}; y_1, y_2, $\ldots$, y_{n+1}, в которых гиперповерхности задаются уравнениями $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 0$ и $\sum_{i=1}^{n+1} y_i^2 = 0$, а f задается формулой $x_i = y_i$, $i = 1, \ldots, n+1$.

Другими словами, гомеоморфизм f должен быть (локально) продолжим до диффеоморфизма некоторых окрестностей гиперповерхностей, голоморфного в окрестностях особых точек. Легко видеть, что такой диффеоморфизм также является PL-гомеоморфизмом при надлежащем выборе триангуляций гиперповерхностей.

Достаточное условие диффеоморфности дается жесткой изотопностью.

Определение. Под *жесткой изотопией* мы понимаем 1-параметрическое семейство гиперповерхностей с особенностями фиксированного типа. (Достаточно того, чтобы числа Милнора особых точек в процессе деформации не менялись.)

Очевидно, что жестко изотопные гиперповерхности диффеоморфны. Было бы интересно найти две гиперповерхности, которые были бы диффеоморфны, но не жестко изотопны.

В свою очередь, простейший способ установить жесткую изотопность — это доказать, что соответствующее пространство модулей неприводимо. Так, мы видим, что все неособые гиперповерхности фиксированной размерности и степени диффеоморфны. Более общим образом, существует несколько случаев, когда жестко-изотопический тип (а с ним и топологический и дифференциальный типы) особой гиперповерхности однозначно определен ее размерностью, степенью и количеством особых точек. Для простоты ограничимся рассмотрением лишь квадратичных особенностей.

Обозначения. Пусть $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{C}P^{n+1}$. Определим $\psi(n;\ \{P_1, \dots, P_s\})$ как минимальную возможную степень гиперповерхности Y в $\mathbb{C}P^{n+1}$ с квадратичными особенностями и такой, что $\operatorname{Sing} Y = \{P_1, \dots, P_s\}$. Если точки $P_1, \dots, P_s$ находятся "в достаточно общем положении", то число $\psi(n; \{P_1, \dots, P_s\})$ зависит только от n и s, и мы обозначаем его через $\psi(n; s)$.

Предложение. *Жестко-изотопический класс гиперповерхности степени d с квадратичными особыми точками $P_1, \dots, P_s \in \mathbb{C}P^{n+1}$ определен однозначно в любом из следующих случаев:*

(1) *особые точки P_i фиксированы;*

(2) *особые точки P_i находятся в достаточно общем положении и степень d достаточно велика: $d \geqslant \psi(n; s)$.*

(3) *особые точки P_i произвольны и степень d достаточно велика.*

Случай (1) был указан А. Димкой (ср. [2]). Случаи (2) и (3) можно доказать путем некоторого обобщения его рассуждений. Ср. [12].

В вышеперечисленных случаях (1–3) мы будем говорить о *типичных* гиперповерхностях.

§2. Неособые гиперповерхности

В дальнейшем мы пользуемся гомологиями и когомологиями только с целыми коэффициентами. Через $b_n(X)$ мы обозначаем число Бетти $\operatorname{rk} H_n(X)$.

Пусть $X \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — неособая гиперповерхность степени d. Ее дифференциально-топологический тип определен числами n и d: $X \cong X_n(d)$. В качестве модельной мы возьмем гиперповерхность, заданную "уравнением Ферма"

$$X_n(d) = \{z_0^d + z_1^d + \ldots + z_{n+1}^d = 0\}.$$

Строение многообразия $X_n(d)$ детально изучалась В. Браудером, Р. С. Кулкарни, А. С. Либгобером, Дж. У. Вудом и другими (см. [6] и [2] и приведенные там ссылки). Здесь мы лишь упомянем еще раз основные факты. Из теоремы Лефшеца о гиперплоском сечении легко следует, что если $i \neq n$, то $H_i X = H_i \mathbb{C}P^n$. Напомним, что

$$H_i \mathbb{C}P^n = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } i \text{ четно, } i \leqslant 2n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть y — образующая группы $H^2X = \mathbb{Z}$. При четном n пусть $h \in H_nX$ — гомологический класс, двойственный классу $y^{n/2}$. Класс h примитивен (неделим).

Пусть $n \neq 2$. Тогда $X_n(d)$ допускает разложение в связную сумму вида

$$X_n(d;s) \cong M_n(d)\#a(S^n \times S^n),$$

где $b_n(M_n(d)) = 0$ или 2, если n нечетно, и $b_n(M_n(d))$ – $|\operatorname{sign} X_n(d)| \leq 5$, если n четно. Можно показать, что многообразие $M_n(d)$ определено однозначно с точностью до диффеоморфизма (см. [7, 8]).

Нам также требуется некоторая связь между гомологиями гиперповерхностей $X_n(d)$ и $X_n(d+1)$.

Пусть $X_d \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — неособая гиперповерхность, пусть $H \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — трансверсальная к ней гиперплоскость и пусть X_{d+1} — неособая гиперповерхность, полученная малым возмущением гиперопверхности $X_d \cup H$. Мы можем считать, что возмущение происходит в тоненькой трубчатой окрестности пересечения $X_d \cap H$, а дополнение подвергается лишь малой изотопии. Тогда "компактифицированную аффинную часть" $X_d \setminus U(H)$, а значит, и диффеоморфную ее внутренности настоящую аффинную часть $X'_d = X_d \setminus H$, можно считать лежащей в X_{d+1}. Включение определено не однозначно, но произвол в его выборе здесь для нас не важен.

Теорема 2.1. *Пусть $X_d \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — неособая гиперповерхность, $H \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — гиперплоскость, X_{d+1} — возмущение гиперповерхности $X_d \cup H$, $X'_d = X_d \setminus H$ — ее аффинная часть.*

"Включение" $X'_d \to X_{d+1}$ индуцирует в гомологиях включение на прямое слагаемое, причем в случае четного n это слагаемое вместе с алгебраическим классом кратного гиперплоского сечения h_{d+1} также порождает прямое слагаемое. Другими словами:

(1) *алгебраический класс $h_{d+1} \in H_nX_{d+1}$ неделим,*

(2) *гомоморфизм включения $H_nX'_d \to H_nX_{d+1}$ — мономорфизм на примитивную подрешетку, и*

(3) *$\langle h_{d+1}\rangle \oplus H_nX'_d \subset H_nX_{d+1}$ — тоже примитивная подрешетка.*

Справедливость утверждения теоремы не зависит от конкретного выбора X_d, H и X_{d+1}, и, следовательно, мы можем взять, например, $X_d = X_n(d)$ и $H = \{z_0 = 0\}$ и рассмотреть какое-нибудь конкретное возмущение, которое можно успешно смоделировать на топологическом уровне. (Аналогичное утверждение верно для полных пересечений и даже в гораздо более общей ситуации.)

Доказательств теоремы довольно громоздко и никак не связано с основной частью статьи. Мы предполагаем поместить его в другом месте.

§3. Оценки количества особых точек

Пусть $Y \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — алгебраическая гиперповерхность степени d, имеющая только квадратичные особые точки. Классической является задача о максимальном возможном числе $\mathfrak{N}_m(d)$[1] особых точек такой гиперповерхности. Точное значение числа $\mathfrak{N}_m(d)$ известно в немногих случаях: для точек на прямой $\mathfrak{N}_1(d) = \left[\frac{d}{2}\right]$; для плоских кривых: $\mathfrak{N}_2(d) = \frac{1}{2}d(d-1)$; для кубических гиперповерхностей во всех размерностях $\mathfrak{N}_m(3) = C_{m+1}^{[m/2]}$.

Чмутову [1] принадлежит довольно точная при больших d оценка числа $\mathfrak{N}_m(d)$ снизу. Варченко [11] доказал универсальную оценку сверху, в качестве гипотезы высказанную Арнольдом: $\mathfrak{N}_m(d)$ не превосходит числа Арнольда $A_m(d)$, определяемого чисто комбинаторно:

$$A_m(d) \stackrel{\text{def}}{=}$$
$$\operatorname{card}\left\{(x_1, \ldots, x_{m+1}) \in \mathbb{Z}^{m+1} \cap (0,d)^{m+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{m+1} x_i = \left[\tfrac{md}{2}\right] + 1\right\}.$$

При $d = 3$ эта оценка является точной [5].

Напомним, что через $X_n(d)$ мы обозначаем неособую гиперповерхность степени d в $\mathbb{C}P^{n+1}$; $b_n(X_n(d))$ и $\operatorname{sign}(X_n(d))$ — ее среднее число Бетти и сигнатура.

С точки зрения топологии гиперповерхностей, при четном n представляет интерес соотношение между числом $\mathfrak{N}_m(d)$ и индексами инерции квадратичной формы (индекса пересечения) $b_n^+(X_n(d))$ и $b_n^-(X_n(d))$:

$$b_n^{\pm}(X_n(d)) = \frac{b_n(X_n(d)) \pm \operatorname{sign}(X_n(d))}{2}.$$

[1] Здесь мы считаем, что натуральные числа m и n связаны равенством $m = n+1$ для того, чтобы, сохранив стандартные обозначения для чисел Арнольда, можно было считать, что n — это размерность гиперповерхности.

В работе [4] приведено доказательство следующего результата.

Предложение 3.1. *Если n четно, то неравенство*

$$A_m(d) \leqslant \min\{b_n^+(X_n(d)) - 1, b_n^-(X_n(d))\}$$

выполнено в том и только в том случае, если $(n-4)(d-2) \geqslant 18$ и $(n,d) \neq (6,12)$. В частности, оно выполняется при $n \geqslant 6$, $d \geqslant 13$ и при $n \geqslant 22$, $d \geqslant 3$.

Как следствие оценки Варченко получаем, что при указанных в теореме ограничениях на размерность гиперповерхности и ее степень верно неравенство

$$\mathfrak{N}_m(d) < \min\{b_n^+(X_n(d)) - 1, b_n^-(X_n(d))\}.$$

Заметим, что, как показывают примеры Калькера и Горюнова [3], это неравенство не выполняется при $d=3$, $n \leqslant 20$ и при $d=4$, $n \leqslant 11$, а также при $n \leqslant 2$.

Ц учетом таблиц чисел Арнольда, приведенных в [4], из теоремы вытекает

Следствие. *Неравенство*

$$A_m(d-1) < \min\{b_n^+(X_n(d)) - 1, b_n^-(X_n(d))\}$$

выполнено при $n \geqslant 4$.

В силу оценки Варченко отсюда следует, что при $n \geqslant 4$ имеет место неравенство

$$\mathfrak{N}_m(d-1) < \min\{b_n^+(X_n(d)) - 1, b_n^-(X_n(d))\}. \tag{3.1}$$

Это неравенство и понадобится нам в дальнейшем.

§4. Гомологически стандартные гиперповерхности

Главные наши результаты в этом параграфе — сформулированная в его конце теорема 4.5 и следствие из нее. Для их доказательства нам потребуются некоторые вспомогательные определения и результаты.

Пусть $X \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — особая гиперповерхность степени d (возможно, имеющая неизолированные особенности), и пусть $\widetilde{X} \subset$

$\mathbb{C}P^{n+1}$ — неособая гиперповерхность той же степени, достаточно близкая к X (т.е. она получена из X "малым возмущением").

Для каждой *изолированной* особой точки $P \in X$ определена ее *решетка Милнора* L, а также гомоморфизм $\mathrm{in}\colon L \to H_n(\widetilde{X})$, сохраняющий форму пересечений, определенную на L.

Определение. Пусть $\Sigma = \{P_1, \dots, P_k\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — некоторый набор изолированных особых точек гиперповерхности X, и пусть $L_1, \dots, L_k$ — их решетки Милнора. Будем говорить, что набор Σ *гомологически стандартен*, если гомоморфизм

$$\mathrm{in}_\Sigma = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{in}_i\colon \bigoplus_{i=0}^{k} L_i \to H_n(\widetilde{X})$$

является мономорфизмом, а его образ $A \subset H_n(\widetilde{X})$ — примитивная подрешетка, и, кроме того, если n четно, то подрешетка A вместе с алгебраическим классом $h \in H_n(\widetilde{X})$ порождает примитивную подрешетку, т.е. $\mathrm{Tors}(H_n(\widetilde{X})/(A \oplus \langle h \rangle)) = 0$.

Очевидно, что любое подмножество гомологически стандартного набора особых точек также является гомологически стандартным набором.

Предложение 4.1. *Пусть $\{X_t\}_{|t|<r}$, $X_t \subset \mathbb{C}P^{n+1}$,— однопараметрическое семейство (особых) гиперповерхностей данной степени, и пусть $\Sigma = \{P_1, \dots, P_k\} \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — гомологически стандартный набор изолированных особых точек гиперповерхности X_0. Тогда для достаточно малых t набор тех особых точек гиперповерхности X_t, которые расположены близко к $P_1, \dots, P_k$, гомологически стандартен. Более точно, существуют такие $\epsilon > 0$ и $t_0 > 0$, что для каждого $t < t_0$ множество $\mathrm{Sing}(X_t) \cap U_\epsilon(\Sigma)$ является гомологически стандартным набором особых точек гиперповерхности X_t. (Здесь $U_\epsilon(\Sigma)$ обозначает ϵ-окрестность множества Σ.)*

Доказательство. Достаточно использовать тот хорошо известный факт что если мультиособенность f примыкает к особенности g, то решетка Милнора мультиособенности f является примитивной подрешеткой решетки Милнора особенности g (ср. [2]). •

Для доказательства нашего главного результата нам нужно следующее несложное утверждение, которое также следует из упомянутого факта о примыкающих особенностях.

Предложение 4.2. *В случае аффинных гиперповерхностей с изолированными особенностями гомоморфизм включения решеток Милнора особенностей в гомологии близкой неособой гиперповерхности является включением на прямое слагаемое.* •

Главный наш технический результат следующий.

Теорема 4.3. *Пусть $W \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — особая гиперповерхность. Если W содержит гиперплоскость, то любой набор изолированных особых точек гиперповерхности W гомологически стандартен.*

Доказательство. Представим возмущение в следующем виде:

$$W = X \cup H \rightsquigarrow X_d \cup H \rightsquigarrow X_{d+1} = \widetilde{X},$$

где X_d и X_{d+1} — неособые гиперповерхности. Пусть $X'_d = X_d \setminus H$ — аффинная часть гиперповерхности X_d. (Она очевидно гомотопически эквивалентна дополнению $X_d \setminus U(H)$.) Тогда для решеток Милнора имеем гомоморфизмы

$$L := \bigoplus_{i=0}^{k} L_i \to H_n(X'_d) \to H_n(X_{d+1}).$$

В силу предложения 4.2 и теоремы 2.1 оба они, а следовательно, и их композиция являются включениями на прямое слагаемое. Это доказывает теорему 4.3 для нечетного n.

Если n четно, из теоремы 2.1 следует, что образ группы $H_n(X'_d)$ в $H_n(X_{d+1})$ порождает в совокупности с алгебраическим классом примитивную подрешетку, и в силу предложения 2.2 то же верно для образа решетки L. •

Пусть $X \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ — гиперповерхность с изолированными особенностями. Из теоремы Лефшеца о гиперплоском сечении следует, что если $i \neq n$, $n+1$, то $H_i X = H_i \mathbb{C}P^n$. Пусть y — образующая группы $H^2 X = \mathbb{Z}$. Если n четно, пусть $h \in H_n X$ – гомологический класс, двойственный по Пуанкаре классу $y^{n/2}$. (Этот класс мы также называем *алгебраическим*.)

Определение. Будем говорить, что гиперповерхность X *гомологически стандартна*, если выполнены условия (1–3):

(1) $\operatorname{Tors} H_n X = 0$,
(2) $H_{n+1} X = H_{n+1} \mathbb{C}P^n$,
(3) при четном n алгебраический класс $h \in H_n X$ неделим.

Замечания. Пусть X — гиперповерхность с квадратичными особенностями.

1. Если гиперповерхность X гомологически стандартна, то все ее гомологические группы однозначно определены ее размерностью, степенью и количеством особых точек: $H_iX = H_i\mathbb{C}P^n$ при $i \neq n$, а H_nX — свободная абелева группа ранга $b_nX = b_nX(n,d) - s$.

2. Условие (2) автоматически выполнено, если n четно.

3. Условие (3) выполнено, если $\deg X \notin 2\mathbb{Z}$.

Предложение 4.4. *ГПИО X гомологически стандартна тогда и только тогда, когда набор всех ее особых точек гомологически стандартен.* •

Главная наша цель в этом параграфе — доказательство следующей теоремы.

Теорема 4.5. *Пусть $X \subset \mathbb{C}P^{n+1}$ есть ГПКО. Если существует гиперповерхность Y степени, меньшей $\deg X$, и такая, что каждая особая точка ГПКО X является изолированной особой точкой гиперповерхности Y, то X гомологически стандартна.*

Доказательство. Пусть T — произвольная гиперповерхность степени $\deg X - \deg Y$, не проходящая через особые точки ГПКО X. Рассмотрим приводимую гиперповерхность $W = Y \cup T$. Из теоремы 4.3 следует, что $\operatorname{Sing} X$ — гомологически стандартный набор особых точек гиперповерхности W.

Пусть X задана уравнением $f = 0$, а W — уравнением $g = 0$. Рассмотри пучок гиперповерхностей $\{X_t\}$, где X_t задано уравнением $t \cdot f + (1-t)g = 0$. Очевидно, $X_0 = W$ и $X_1 = X$. Также ясно, что для всех t, кроме конечного числа значений, скажем, $t_1, \ldots, t_K$, гиперповерхность X_t имеет лишь квадратичные особенности, $\operatorname{Sing} X_t = \operatorname{Sing} X$, и, следовательно, X_t и X диффеоморфны.

В силу предыдущего предложения, ГПКО X_t гомологически стандартны для каждого малого $t \notin \{t_1, \ldots, t_K\}$, и потому они гомологически стандартны для всех $t \notin \{t_1, \ldots, t_K\}$. •

По поводу определения чисел $\phi(n; \{P_1, \ldots, P_s\})$ и $\phi(n; s)$, участвующих в формулировке нижеприведенного следствия, см. введение.

Следствие. *Пусть $X \subset \mathbb{C}P^{n+1}$, $n \geqslant 1$,— ГПКО с s особыми точками. Если ГПКО X удовлетворяет одному из следующих условий:*

(1) $\deg X > 2s$,
(2) $\deg X > \phi(n; \operatorname{Sing} X)$,
(3) *особые точки ГПКО X находятся "в достаточно общем положении" и* $\deg X > \phi(n; s)$,
(4) *особые точки ГПКО X находятся в общем положении (в обычном смысле) и* $\deg X \geqslant 3[\frac{s-1}{n+2}] + 4$ *(или, что то же,* $s \leqslant [\frac{\deg X}{3}](n+2)$,

то она гомологически стандартна.

§5. Вспомогательное алгебраическое утверждение

Нам потребуется следующее алгебраическое утверждение, легко вытекающее из известных результатов о целочисленных квадратичных формах. В силу его важности для настоящей работы мы назовем его теоремой.

Теорема 5.0. *Пусть L — унимодулярная целочисленная решетка сигнатуры $(t_+L,\ t_-L)$, пусть $h \in L$ — характеристический элемент с $h^2 > 0$, и пусть фиксировано число $\epsilon = \pm 1$. Пусть даны элементы*

$$a_1, \dots, a_r \in h^\perp; \quad a_i \cdot a_j = 2\epsilon\delta_{ij}; \quad i, j = 1, \dots, r,$$

такие, что подрешетка $A := \langle h; a_1, \dots, a_r \rangle$, порожденная элементами $a_1, \dots, a_r$ и h, примитивна, т.е. $\operatorname{Tors}(L/A) = 0$. *Предположим, что выполнены следующие неравенства (в случае пар понимаемые покоординатно):*

$$(t_+L, t_-L) \geqslant (r, r+1), \tag{$*$}$$

$$\operatorname{rk} L = t_+L + t_-L \geqslant 2r + 4, \tag{$**$}$$

$$(t_+L, t_-L) \geqslant \begin{cases} (r+2, 1), & \epsilon = +1, \\ (2, r+1), & \epsilon = -1. \end{cases} \tag{$***$}$$

Тогда найдутся элементы $b_1, \dots, b_r \in h^\perp$ такие, что

$$a_i \cdot b_j = \delta_{ij}; \quad b_i \cdot b_j = 0; \quad i, j = 1, \dots, r.$$

Замечание. Достаточно потребовать, чтобы вместе с неравенством $(*)$ выполнялось неравенство

$$\epsilon(t_+(L) - t_-(L)) \geqslant 3 + \epsilon, \qquad (****)$$

или чтобы было выполнено неравенство $(t_+L, t_-L) \underset{\neq}{\geqslant} (r+2, r+1)$.

Для доказательства нам потребуются некоторые леммы (для краткости мы формулируем их в удобном для нас виде, причем леммы 5.2 и 5.3 даны заведомо не в полной общности).

Лемма 5.1 (Никулин [10], следствие 1.13.5 (отщепление)). *Пусть S — четная неопределенная решетка. Если $\operatorname{rk} S \geqslant \ell(D(S)) + 3$, то $S \cong U \oplus T$ для некоторой решетки T. (Здесь U — гиперболическая плоскость с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.)*

Следствие 1. *Пусть S — четная неопределенная решетка сигнатуры $(t_{(+)}, t_{(-)})$. Если $\min\{t_{(+)}, t_{(-)}\} \geqslant r$ и $\operatorname{rk} S \geqslant 2r + \ell(D(S)) + 1$, то $S \cong \underbrace{U \oplus \cdots \oplus U}_{r \text{ слагаемых}} \oplus T$ для некоторой решетки T.*

Доказательство. В силу леммы 1, в S найдется гиперболическая плоскость U. Отщепив ее, далее продолжим по индукции. В конце концов мы найдем искомую подрешетку $\underbrace{U \oplus \cdots \oplus U}_{r \text{ слагаемых}} \subset S$, Как и всякая унимодулярная подрешетка, она отщепляется прямым слагаемым.

Следствие 2. *Пусть L — унимодулярная решетка сигнатуры $(t_+L,\, t_-L)$, $h \in L$ — характеристический элемент с $h^2 > 0$. Если $(t_+L, t_-L) \geqslant (r+1, r)$ и $\operatorname{rk} L \geqslant 2r + 3$, то $h^\perp \cong \underbrace{U \oplus \cdots \oplus U}_{r \text{ слагаемых}} \oplus T$ для некоторой решетки T.*

Доказательство. Достаточно заметить, что число образующих дискриминантной группы решетки $h^\perp$ равно 1: $\ell(D(H^\perp)) = 1$, и воспользоваться предыдущим следствием.

Лемма 5.2 (Никулин [10], теорема 1.13.2). *Четная знаконеопределенная решетка S с точностью до изоморфизма определена своими сигнатурой $(t_{(+)}, t_{(-)})$ и дискриминантной группой $D(S)$ (с фиксированной на ней дискриминантной формой), если $\operatorname{rk} S \geqslant \ell(D(S)) + 2$.*

Лемма 5.3 (Никулин [10], теорема 1.14.2). *Пусть S — четная неопределенная решетка с дискриминантной группой $D(S)$. Если $\operatorname{rk} S \geqslant \ell(D(S)) + 2$, то гомоморфизм $O(S) \to O(D(S))$ сюрвективен. (Через $O(D(S))$ обозначена группа автоморфизмов группы $D(S)$, сохраняющих дискриминантную форму.)*

Лемма 5.4. *Пусть L — унимодулярная решетка, а A и A_1 — две ее изоморфные невырожденные подрешетки с изоморфными ортогональными дополнениями. Если естественный гомоморфизм $O(A^\perp) \to O(D(A^\perp))$ является эпиморфизмом, то любой изоморфизм между решетками A и A_1 продолжается до автоморфизма решетки L.*

Доказательство. Зафиксируем изоморфизм $f\colon A \to A_1$. Воспользуемся тем, что имеется канонический изоморфизм $D(A) \cong D(A^\perp)$ (при этом дискриминантные формы отличаются знаком). Рассмотрим индуцированный изоморфизм $f_\#\colon D(A) \to D(A_1)$ и соответствующий изоморфизм $f_\#^\perp : D(A^\perp) \to D(A_1^\perp)$. Так как решетки $A^\perp$ и $A_1^\perp$ изоморфны и $O(A^\perp) \to O(D(A^\perp))$ — эпиморфизм, то найдется изоморфизм $f^\perp : A^\perp \to A_1^\perp$, индуцирующий $f_\#^\perp$. Рассмотрим изоморфизм

$$f \oplus f^\perp : A \oplus A^\perp \to A_1 \oplus A_1^\perp$$

и соответствующий ему изоморфизм $f \otimes \mathbb{Q}\colon L \otimes \mathbb{R} \to L \otimes \mathbb{R}$. Из условия совпадения $f_\#$ и $f_\#^\perp$ легко следует, что $f \otimes \mathbb{Q}(L) = L$. Ч.т.д.

Лемма 5.5. *Если, в условиях теоремы, выполнены неравенства $(**)$ и $(***)$, то расположение векторов a_i в решетке L определено однозначно с точностью до автоморфизма, оставляющего элемент h на месте.*

Доказательство. Рассмотрим решетку $W := A^\perp$. В силу характеристичности элемента h это — четная решетка. Неравенство $(***)$ равносильно тому, что $t_\pm(W) \geqslant 1$ (т.е. решетка W — знаконеопределенная). Далее, в силу неравенства $(*)$,

$$\operatorname{rk} W = \operatorname{rk} L - \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} L - r - 1 \geqslant r + 3,$$

и

$$\ell(D(W)) = \ell(D(A)) \leqslant \operatorname{rk} A = r + 1,$$

и, таким образом, $\operatorname{rk} W \geqslant \ell(D(W)) + 2$. Следовательно, в силу леммы 5.2, решетка W определена однозначно, а в силу леммы 5.3 естественный гомоморфизм $O(W) \to O(D(W))$ — эпиморфизм. Поэтому, в силу леммы 5.4, любые два вложения решетки A в L переводятся друг в друга автоморфизмом решетки L, ч.т.д.

Доказательство теоремы. В силу следствия 2 из леммы 5.1 в $h^{\perp}$ найдется подрешетка $\underbrace{U \oplus \dots \oplus U}_{r \text{ слагаемых}}$. Выберем в найденных гиперболических плоскостях образующие a_i', b_i' с матрицей $\begin{pmatrix} 2\epsilon & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $i = 1, \dots, r$. Осталось воспользоваться леммой 5.5, в силу которой найдется автоморфизм $\phi \colon L \to L$ такой, что $a_i' \overset{\phi}{\mapsto} a_i$, и мы можем положить $b_i = \phi(b_i')$, $i = 1, \dots, r$.

§6. Разложение гомологически стандартных ГПКО в связную сумму

Предложение 6.1. *Пусть X — гомологически стандартная ГПКО и пусть выполнено одно из следующих условий (1–3):*

(1) *n нечетно,*

(2) *n четно, $(n-4)(d-2) > 17$ и $(n,d) \neq (6,12)$.*

(3) *n четно $n \geqslant 4$ и $s < \min\{b_n^+(X_n(d)) - 1, b_n^-(X_n(d))\}$,*

Тогда ГПКО X и топологически стандартна, т.е. существует разложение в связную сумму

$$X \cong X_n(d;s) \cong M_n(d)\#(a-s)(S^n \times S^n)\#s(S^n \times S^n/\Delta), \qquad (*)$$

где Δ — диагональ, а многообразие $M_n(d)$ и число a зависят только от n и d (ср. введение).

Замечание. Ясно, что условие (2) влечет условие (3). Кроме того, очевидно, что из существования разложения $(*)$ вытекает неравенство $\operatorname{card}(\operatorname{Sing}(X)) \leqslant \min\{b_n^+(X_n(d)),\, b_n^-(X_n(d))\}$.

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая, когда n четно, поскольку случай нечетного n по существу такой же и даже проще.

В силу теоремы 5.0, из гомологической стандартности гиперповерхности следует, что расположение исчезающих циклов в группе гомологий близкой неособой гиперповерхности стандартно, что в свою очередь позволяет нам описать топологическую структуру особой гиперповерхности.

Пусть s — число особых точек гиперповерхности X и пусть $a_1, \ldots, a_s \in H_n(X_n(d))$ — исчезающие циклы (мы отождествляем гиперповерхность Ферма $X_n(d)$ с неособой гиперповерхностью, близкой к X). Каждый исчезающий цикл a_i реализуется "исчезающей n-мерной сферой" $S_i \subset X_n(d)$. (Заметим, что эти сферы попарно дизъюнктны.)

Применяя теорему 5.0, мы найдем некоторые классы $b_1, \ldots, b_s \in H_n(X_n(d))$. Их тоже можно реализовать попарно дизъюнктными "двойственными" сферами $S'_1, \ldots, S'_s$ так, чтобы $S'_i \cap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и S'_i трансверсально пересекало бы S_j ровно в одной точке.

Граница окрестности объединения $S'_i \cup S_i$ есть $(2n+1)$-мерная сфера, отщепляющая связное слагаемое $S^n \times S^n$, которое содержит исчезающую сферу S_i в качестве диагонали Δ. В силу теорем сокращения (см. [7]), такое разложение единственно с точностью до диффеоморфизма, ч.т.д. •

Литература

1. S. V. Chmutov, *Examples of projective surfaces with many singularities.* — J. Alg. Geom. **1** (1992), 191–196.
2. A. Dimca, *Singularities and Topology of Hypersurfaces.* Springer, 1992.
3. V. V. Goryunov, *Singular quartics with many nodes.* — Advances Soviet Math. **21** (1994), 147–161.
4. О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, *Оценки числа особенностей комплексной гиперповерхности и смежные вопросы.* — Записки науч. семин. ПОМИ **231** (1995), 180–190.
5. A. Kalker, *Cubic fourfolds with fifteen ordinary double points.* Ph.D. Thesis, Leiden, 1986.
6. R. S. Kulkarni and J. W. Wood, *Topology of nonsingular complex hypersurfaces.* — Adv. Math. **35** (1980), 239–263.
7. Н. Ю. Нецветаев, *Диффеоморфность и стабильная диффеоморфность односвязных многообразий.* — Алгебра и анализ **2**, № 2 (1990), 112–120.
8. N. Yu. Netsvetaev, *Diffeomorphism criteria for smooth manifolds and algebraic varieties.* — Contemporary Math. **431,** (Part 3) (1992), 453–459.
9. N. Yu. Netsvetaev, *Homology and cohomology of hypersurfaces with quadratic singular points in generic position.* — Am. Math. Soc. Transl. (2) **174** (1996), 229–233.
10. В. В. Никулин, *Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **43**, № 1 (1979), 111–117.
11. А. Н. Варченко, *О полунепрерывности спектра и оценке сверху числа особых точек проективной гиперповерхности.* — Докл. АН СССР **270**, № 6 (1983), 1294–1297.

12. В. А. Васильев, *Стабильные когомологии дополнений к дискриминантам деформаций особенностей гладких функций.* — В кн.: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 33 (Итоги науки и техн.). М., ВИНИТИ АН СССР, 1988, с. 3–29.

Netsvetaev N. Yu. On the connected sum decomposition of complex hypersurfaces with quadratic singularities.

We study the global topological structure of hypersurfaces in $\mathbb{C}P^{n+1}$, $n \geqslant 3$, with quadratic singularities and prescribed set of singular points. Under certain restrictions on the degree, we give a precise topological description of such a hypersurface by means of decomposing it into a connected sum. In this case, the topological type of the hypersurface is determined by its dimension, degree, and the number of singular points.