Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

**Г. Ю. Панина**

# КАНОНИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОГРАННЫХ ФУНКЦИЙ И ВОПРОСЫ РАВНОСОСТАВЛЕННОСТИ В ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье изучается равносоставленность многогранных функций и многогранников в четномерном проективном пространстве. Используются методы комбинаторной интегральной геометрии [2, 3, 5]. Мы рассматриваем четномерное проективное пространство $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ с естественной группой движений. Многогранной функцией, грубо говоря, называется кусочно-постоянная функция $F$, области постоянства которой суть многогранники, порожденные разбиением $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ конечным множеством $\mathcal{E}$ проективных гиперплоскостей (точное определение – см. 1.3). Естественно отождествлять многогранник $K$ и его характеристическую функцию $I_K$, так что многогранная функция обобщает понятие многогранника.

Две многогранные функции $F$ и $F'$ называются равносоставленными, если существуют представления

$$F(x) = \sum_i F_i(x), \quad F'(x) = \sum_i F_i(t_i(x)),$$

где $t_i$ – элементы группы движений, а $F_i$ – некоторые многогранные функции, причем эти равенства выполнены для всех точек $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, кроме некоторого многообразия размерности не выше $n-1$.

Очевидно, равносоставленность многогранников влечет равносоставленность их характеристических функций. Пока еще остается открытым вопрос справедливости обратного утверждения: влечет ли равносоставленность характеристических функций равносоставленность самих многогранников.

Множество всех многогранных функций представляет собой векторное пространство. Оказывается, у него существует удобный базис: существует единственное разложение многогранных

---

Работа поддержана грантом ISF NT4000.

функций в сумму

$$F = \sum_i r_F(X_i) I_{X_i},$$

где $I_{X_i}$ – характеристические функции некоторых базовых множеств $X_i$, которые устроены весьма просто (см. 5.2 и 5.4).

Теорема 6.4 дает некоторое необходимое и достаточное условие равносоставленности многогранных функций в четномерном проективном пространстве: она сводит $n$-мерную задачу о равносоставленности к $(n-1)$-мерной.

## §1. Исходные понятия

**1.1.** Пусть $\mathbb{R}^n$ – $n$-мерное вещественное пространство;

$E^{n-1}$ – множество всех гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$;

$\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ – $n$-мерное проективное вещественное пространство с естественной группой движений и с фиксированной точкой 0;

$E\mathrm{P}^{n-1}$ – множество всех его $(n-1)$-мерных проективных подпространств, которые мы называем *проективными гиперплоскостями* (или просто *гиперплоскостями*, если из контекста ясно, что речь идет о $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$).

**1.2. Бюффоновы множества и функции.** Пусть $\mathcal{P}$ – конечное множество точек в $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{P}$ *невырождено*, если никакие $n+1$ точек не лежат в одной гиперплоскости.

Две гиперплоскости $e$ и $e'$ называются *эквивалентными относительно* $\mathcal{P}$, если для всяких точек $P$, $Q$, $R \in \mathcal{P}$ справедливо: $P \in e \iff P \in e'$ и $e$ разделяет $Q$ и $R \iff e'$ разделяет $Q$ и $R$. Класс эквивалентности гиперплоскостей называется *атомом*, если а) он ограничен (по расстоянию до начала координат) и б) элементы этого класса не содержат точек из $\mathcal{P}$. Кольцо множеств, порожденное атомами, называется *кольцом Бюффона* и обозначается $\mathcal{B}(\mathcal{P})$. Элементы этого кольца называются *Бюффоновыми множествами. Бюффоновой функцией* относительно $\mathcal{P}$ называется функция $F$, заданная на $E^{n-1}$ такая, что а) $e$ не пересекает выпуклую оболочку $\mathcal{P} \Longrightarrow f(e) = 0$; б) $e$ эквивалентна $e'$, $e$ не содержит точек из $\mathcal{P} \Longrightarrow f(e) = f(e')$.

Будем говорить, что две бюффоновы функции *равны*, если их значения совпадают на $E^{n-1}$ всюду, кроме множества размерности не выше $n-1$.

Пространство бюффоновых функций обозначается $\mathcal{BF}(\mathcal{P})$.

С многогранником $K$ с вершинами в $\mathcal{P}$ связана бюффонова функция $I_{[K]}$ – характеристическая функция множества $[K] = \{e \mid e \cap K \neq \varnothing\}$.

**1.3. Многогранные функции.** Пусть $\mathcal{E}$ – конечное множество проективных гиперплоскостей в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.

**1.3.1. Определение.** *Будем говорить, что $\mathcal{E}$ невырождено, если*

а) *никакие $(n+1)$ гиперплоскостей не пересекаются в одной точке и*

б) *ни одна из этих гиперплоскостей не содержит точку 0.*

**1.3.2. Определение.** *Любое конечное $\mathcal{E}$ индуцирует естественное разбиение $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ на многогранники $K_i$ $(i = 0, \dots, m)$. Пусть $0 \in K_0$. Многогранной функцией относительно $\mathcal{E}$ называется функция $F$, заданная на $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, представимая в виде:*

$$F = \sum_{i=1}^{m} F_i \, I_{K_i},$$

*где $I_{K_i}$ – характеристическая функция многогранника $K_i$. Две многогранные функции будем считать равными, если они совпадают всюду, кроме множества размерности не выше $n-1$.*

## §2. Приведение комбинаторной формулы Амбарцумяна к каноническому виду. Единственность канонического разложения

**2.1.** Пусть $A$ – бюффоново множество относительно невырожденного множества точек $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}^n$, причем $n$ четно. В статье [5] изучается комбинаторное представление характеристической функции $I_A$ множества $A$. Доказана следующая теорема: если гиперплоскость $e$ не содержит точек из $\mathcal{P}$, то

$$I_A(e) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{\Delta_i^j \text{ – симплекс} \\ \text{размерности } i \\ \text{с вершинами из } \mathcal{P}}} I_{[\Delta_i^j]}(e) c_A(\Delta_i^j), \tag{2.1}$$

где коэффициенты $c_A(\Delta_i^j)$ явно вычисляются с помощью некоторого алгоритма. Представление (2.1) не единственно, т.е. для множества $A$ существуют разные наборы коэффициентов $c_A(\Delta_i^j)$, оставляющие справедливым тождество (2.1).

**2.2. Замечание.** Пусть $\Delta_i^j$ – симплекс четной размерности с вершинами в $\mathcal{P}$. Применяя (2.1) для $\Delta_i^j$, имеем

$$I_A(\Delta_i^j) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{\Delta_k^l \text{ – грань } \Delta_i^j \\ \text{размерности } k}} I_{[\Delta_k^l]}(e). \tag{2.2}$$

Используя многократно разложение (2.2) четномерных симплексов, сумму (2.1) можно привести к виду, где участвуют лишь нечетномерные симплексы. Таким образом, существует представление

$$I_A(e) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ нечетно}}}^{n-1} \sum_{\substack{\Delta_i^j \text{ – симплекс} \\ \text{размерности } i \\ \text{с вершинами из } \mathcal{P}}} I_{[\Delta_i^j]}(e) r_A(\Delta_i^j). \tag{2.3}$$

Мы покажем, что разложение по нечетномерным симплексам (2.3) единственно. Будем называть его *каноническим* представлением.

**2.3. Теорема единственности.** *Пусть $A$ – бюффоново множество относительно базисной невырожденной системы точек $\mathcal{P}$ в $\mathbb{R}^n$, причем $n$ четно. Пусть $\{r_A(\Delta_i^j)\}$ и $\{r'_A(\Delta_i^j)\}$ – два набора чисел, где $\Delta_i^j$ пробегает множество нечетномерных симплексов с вершинами в $\mathcal{P}$. Пусть оба набора удовлетворяют (2.3). Тогда эти наборы тождественны: для всякого $\Delta_i^j$ справедливо: $\{r_A(\Delta_i^j)\} = \{r'_A(\Delta_i^j)\}$.*

Для доказательства нам потребуется следующая лемма, устанавливающая размерность пространства бюффоновых функций.

**Лемма.** *Количество атомов в бюффоновом кольце $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ равно*

$$\binom{N}{2} + \binom{N}{4} + \cdots + \binom{N}{n-2},$$

*где $N$ – число элементов $\mathcal{P}$.*

**Доказательство леммы.** Для $P_1, \dots, P_i \in \mathcal{P}$ пусть $\mathbb{E}^n(P_1, \dots, P_i)$ – множество всех гиперплоскостей, содержащих точки $P_1, \dots, P_i$; $\mathbb{E}^n(\mathcal{P})$ – множество гиперплоскостей, пересекающих выпуклую оболочку $\mathcal{P}$; $A(\mathcal{P}) = \mathbb{E}^n(\mathcal{P}) \setminus \bigcup_i \mathbb{E}^n(P_i)$. Легко вычислить эйлерову характеристику этих множеств:$-\chi(A(\mathcal{P}))$ = количеству атомов в $\mathcal{B}(\mathcal{P})$; $\chi(\mathbb{E}^n(\mathcal{P}))=2$;

$$\chi(\mathbb{E}^n(P_1,\ldots,P_i))=\begin{cases}0, & \text{если } i \text{ четно;}\\ 1, & \text{если } i \text{ нечетно.}\end{cases}$$

Вместе с тем,

$$\chi(\mathbb{E}^n(\mathcal{P}))=\chi(A(\mathcal{P}))+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}\sum_{i_1,\ldots,i_k}\chi\left(\mathbb{E}^n(P_{i_1},\ldots,P_{i_k})\right).$$

Отсюда следует утверждение леммы. □

Перейдем к доказательству теоремы. Из леммы следует, что число атомов в $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ равно числу нечетномерных симплексов. Но характеристические функции атомов образуют базис пространства бюффоновых функций. Следовательно, функции $I_{[\Delta_i^j]}$ (где $i$ нечетно) тоже образуют базис. □

**2.4. Определение.** *Для бюффонового множества $A$ обозначим через $\{r_A(\Delta_i^j)\}$ набор коэффициентов канонического разложения $I_A$. Что касается исходного разложения (2.1), то коэффициенты $c_A$ нам тоже понадобятся. Будем писать $r_A = \mathrm{Red}\, c_A$ и говорить, что коэффициенты $r_A$ есть редуцированные коэффициенты $c_A$.*

## §3 Комбинаторное разложение для $[K]$

Пусть $K$ – многогранник с вершинами из $\mathcal{P}$. Тогда $[K]=\{e\in\mathbb{E}^n \mid e\cap K\neq\varnothing\}$ – бюффоново множество относительно $\mathcal{P}$. Используя алгоритм вычисления комбинаторных коэффициентов из [5], несложно убедиться в справедливости следующих фактов.

**3.1. Лемма.** *В указанных выше обозначениях для коэффициентов $c_{[K]}$ справедливо:*

$$c_{[K]}(\Delta_i^j)=\begin{cases}(-1)^{i+1}, & \textit{если } \Delta_i^j \textit{– грань } K;\\ 0, & \textit{в остальных случаях.}\end{cases}\quad\square$$

**3.2. Лемма.** *Для коэффициентов $r_{[K]}$ справедливо:*

$$r_{[K]}(\Delta_i^j)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}z_k(\Delta_i^j,K)\left(\frac{1}{2}\right)^k,\\ \textit{если } \Delta_i^j \textit{ – грань } K,\ i \textit{ нечетно;}\\ 0, \quad \textit{в остальных случаях.}\end{cases}$$

*Здесь* $z_k(\Delta_i^j, K)$ *– число цепочек длины* $k$ *вида* $\Delta_{i_1}^{l_1} \supset \ldots \supset \Delta_{i_k}^{l_k} \supset \Delta_i^k$, *где все* $\Delta_{i_m}^{l_m}$ *– четномерные грани* $K$. $\square$

## §4 Каноническое разложение для вырожденной системы. Нечетномерный случай

**4.1.** Пусть $\mathcal{P}$ – вырожденное конечное множество точек из четномерного пространства $\mathbb{R}^n$; для $i = 2, \ldots, n$ пусть $\Delta_i^j$ – симплекс размерности $i$ с вершинами из $\mathcal{P}$. Каждая бюффонова функция $f$ очевидно допускает представление в виде линейной комбинации функций $I_{[\Delta_i^j]}$, но не единственное. Однако можно выбрать некоторый меньший базисный набор указанных выше симплексов $\delta(\mathcal{P})$, делающий это представление единственным.

**4.2. Пример.** Пусть $n$ нечетно, $\mathcal{P}$ – невырожденное конечное множество точек в $\mathbb{R}^n$. Погрузив $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n-1}$, будем рассматривать $\mathcal{P}$ как вырожденную систему из четномерного пространства. Зафиксируем точку $P_o \in \mathcal{P}$. Покажем, что базисным набором может служить следующий набор симплексов: $\delta(\mathcal{P}) = \{\Delta_i^j \mid \Delta_i^j$ – симплекс размерности $i$ с вершинами из $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$; $i = 1, 3, \ldots, n-2\}$ $\cup \{\mathrm{conv}\,(\Delta_i^j \cup \{\mathcal{P}_0\}) \mid \Delta_i^j$ – симплекс размерности $i$ с вершинами из $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_0$; $i = 0, 2, 4, \ldots, n-1\}$.

Действительно, всякая бюффонова функция допускает разложение, связанное с $\delta(\mathcal{P})$. Докажем линейную независимость функций $I_{[\Delta_i^j]}$. Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 2.1, легко найти число атомов кольца бюффона $\mathcal{B}(\mathcal{P})$:

$$-1 + \binom{N}{1} + \binom{N}{3} + \cdots + \binom{N}{n},$$

где $N$ – число элементов множества $\mathcal{P}$.

Число элементов $\delta(\mathcal{P})$ равно

$$\binom{N-1}{2} + \binom{N-1}{4} + \ldots \binom{N-1}{n-1} + \binom{N-1}{1} + \binom{N-1}{3} + \ldots \binom{N-1}{n}.$$

Эти два числа равны, следовательно функции $I_{[\Delta_i^j]}$ для симплексов из $\delta(\mathcal{P})$ образуют базис пространства бюффоновых функций.

**4.3.** Обозначим через $\Delta(\mathcal{P})$ множество нечетномерных симплексов с вершинами в $\mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ – пространство формальных сумм вида $\sum\limits_{\Delta_i \in \Delta(\mathcal{P})} c_i \Delta_i$, где $c_i$ – вещественные коэффициенты.

Пусть подпространство $\mathcal{M}_0(\mathcal{P}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{P})$ таково, что

$$\sum_{\Delta_i \in \Delta(\mathcal{P})} c_i \Delta_i \in \mathcal{M}_0(\mathcal{P}) \Longleftrightarrow \sum_{\Delta_i \in \Delta(\mathcal{P})} c_i I_{\Delta_i} = 0.$$

Очевидно, $\mathcal{BF}(\mathcal{P}) \cong \mathcal{M}(\mathcal{P})/\mathcal{M}_0(\mathcal{P})$.

Назовем сумму $\sum\limits_{\Delta_i \in \Delta(\mathcal{P})} c_i \Delta_i$ *гиперплоской*, если существует такая гиперплоскость $e$, что $c_i \neq 0 \Longrightarrow \Delta_i \subset e$.

**4.4. Теорема.** *Просранство $\mathcal{M}_0$ порождено набором гиперплоских элементов.*

**Доказательство.** Заметим вначале, что если $\mathcal{P}$ невырождено, то пространство $\mathcal{M}_0$ нулевое. В случае вырожденного $\mathcal{P}$ укажем явно искомый набор. Сдвинем чуть-чуть точки $\mathcal{P}$ так, чтобы получилось невырожденное множество $\mathcal{P}'$. Пусть $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ и $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ – множества атомов колец $\mathcal{B}(\mathcal{P})$ и $\mathcal{B}(\mathcal{P})$, соответственно. Рассмотрим следующие естественные отображения:

биекция $d : \Delta(\mathcal{P}) \to \Delta(\mathcal{P}')$,

инъекция $a : \mathcal{A}(\mathcal{P}) \to \mathcal{A}(\mathcal{P}')$,

изоморфизм $s : \mathcal{M}(\mathcal{P}) \to \mathcal{BF}(\mathcal{P}')$,

сюръективный гомоморфизм пространств $p : \mathcal{BF}(\mathcal{P}) \to \mathcal{BF}(\mathcal{P}')$. Каждый атом $A$ из $\mathcal{A}(\mathcal{P}')\backslash a(\mathcal{A}(\mathcal{P}))$ порождает следующим образом гиперплоский элемент $m(A)$ из $\mathcal{M}_0$: если $I_A = \sum\limits_{\Delta(\mathcal{P}')} c_i(A) I_{[d(\Delta_i)]}$, то положим $m(A) = \sum\limits_{\Delta(\mathcal{P}')} c_i(A)\Delta_i$. Множество таких $m(A)$ для всех $A \in \mathcal{A}(\mathcal{P}') \setminus a(\mathcal{A}(\mathcal{P}))$ образуют искомый базис $\mathcal{M}_0$. $\square$

## §5. Переход к двойственным формулам в проективном пространстве

**5.1. Конструкция отображения двойственности.** Рассмотрим естественное вложение $\alpha$ пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, отображающее плоскости в проективные плоскости. Оно порождает отображение $\alpha' : E^{n-1} \to E\mathrm{P}^{n-1}$. Пусть $\beta : E\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ – отображение, сопоставляющее каждой гиперплоскости ее полюс. Нам понадобятся композиции $\varphi = \beta^{-1} \circ \alpha' : E^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ и $\varphi' = \beta \circ \alpha : \mathbb{R}^n \to E\mathrm{P}^{n-1}$.

**5.2. Базовые множества.** Пусть $e_1, \ldots, e_k$ – проективные гиперплоскости общего положения. Пусть $0(e_1, \ldots, e_k)$ – компонента связности $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \setminus (e_1 \cap \ldots \cap e_k)$, содержащая точку 0. Пусть

$X(e_1,\dots,e_k)=\mathbb{R}\mathrm{P}^n\setminus 0(e_1,\dots,e_k)$. Множество $X(e_1,\dots,e_k)$ будем называть *базовым множеством размерности* $k$. Для конечного набора проективных гиперплоскостей $\mathcal{E}$ обозначим через $\mathcal{X}_k(\mathcal{E})$ множество всех базовых множеств размерности $k$, порожденных гиперплоскостями из $\mathcal{E}$.

**5.3. Лемма.** 1) *Гиперплоскость* $e$ *содержит точку* $P\iff\varphi(e)\in\varphi'(P)$.

2) *Гиперплоскость* $e$ *разделяет точки* $P$ *и* $P'\iff\varphi(e)\in X(\varphi'(P_1),\varphi'(P_2))$.
3) *Гиперплоскость пересекает симплекс с вершинами* $P_1,\dots,P_k$ $\iff\varphi(e)\in X(\varphi'(P_1),\dots,\varphi'(P_2))$.
4) *Точки* $P_1,\dots,P_k$ *лежат в общем положении* $\iff$ *гиперплоскости* $\varphi'(P_1),\dots,\varphi'(P_k)$ *лежат в общем положении.*
5) $f$ *– бюффонова функция относительно* $\mathcal{P}\iff f\circ\varphi^{-1}$ *– многогранная функция относительно* $\varphi'(\mathcal{P})$. $\square$

Вот так выглядит теорема 2.3, переведенная с помощью отображения $\varphi$ в проективное пространство.

**5.4. Теорема.** *Пусть* $F$ *– многогранная функция относительно системы гиперплоскостей* $\mathcal{E}$ *общего положения в* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. *Имеет место единственное каноническое разложение:*

$$F(x)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1\\ i\ \text{нечетно}}}^{n-1}\ \sum_{X_i^j\in\mathcal{X}_i(\mathcal{E})} r_F(X_i^j)\,I_{X_i^j}(x). \tag{5.1}$$

(Напомним, что $I_{X_i^j}$ – характеристическая функция множества $X_i^j$.) При этом коэффициенты $r_F$ являются редукцией (см. 2.4) коэффициентов $c_F$, вычисленных для бюффоновой функции $F\circ\varphi^{-1}$. $\square$

**5.5. Пример.** Пусть $K$ – многогранник в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, не содержащий точку $0$. Обозначим через $\mathcal{X}_k(K)$ множество таких базовых множеств $X(e_1,\dots,e_k)$, что $\bigcap\limits_{i=1}^{k} e_i$ содержит некоторую $(n-k)$-мерную грань $K$. Тогда

$$I(K)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\mathcal{X}_k(K)} c_K\left(X(e_1,\dots,e_k)\right) I_{X(e_1,\dots,e_k)},$$

где

$$c_K\left(X(e_1,\dots,e_k)\right)=\begin{cases}1, & \text{если } K\subset X(e_1,\dots,e_k);\\ 0, & \text{иначе.}\end{cases}$$

С помощью редукции получаем: $r_K=\mathrm{Red}(c_K)$.

**5.6. Пример.** Пусть $K$ – треугольник в $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ (см. Рис. 1). Тогда

$$I_K=\frac{1}{2}\left[I_{X(e_1,e_3)}+I_{X(e_1,e_3)}-I_{X(e_2,e_3)}\right].$$

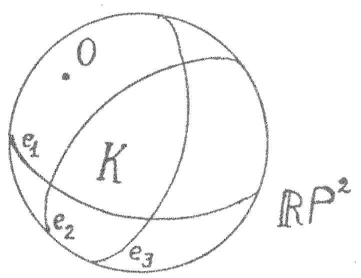


Рис. 1.

## §6. Равносоставленность многогранных функций

**6.1. Определение.** *Пусть $F$ и $G$ – многогранные функции на $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$, обращающиеся в 0 в некоторой окрестности точки 0. Будем называть их равносоставленными, если существуют следующие представления $F$ и $G$ в виде сумм многогранных функций:*

$$F(x)=\sum_{k=1}^{p}F_k(x),\quad G(x)=\sum_{k=1}^{p}F_k(t_k(x)),$$

*где $t_k$ – элементы группы движений $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$.*

Напомним классическое определение равносоставленности многогранников.

**6.2. Определение.** *Два многогранника $K$ и $K'$ равносоставлены, если $K$ и $K'$ можно разбить на многогранники $K_1,\dots,K_m$ и $K_1',\dots,K_M'$ соответственно, так что каждый $K_1$ конгруэнтен $K_1'$.*

**6.3. Отображение $\psi$, понижающее размерность.** Обозначим через $\mathcal{MN}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$ пространство всех многогранных функций, заданных на $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Построим отображение $\psi : \mathcal{MN}(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \to \mathcal{MN}(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1})$, определенное с точностью до класса эквивалентности относительно равносоставленности.

1. Пусть $X = X(e_1, \dots, e_k)$ – базовое множество, $P$ – произвольная точка из пересечения $e_1 \cap \dots \cap e_k$. Будем говорить, что $P$ – *полюс* множества $X$. Отождествим полярную к $P$ гиперплоскость с пространством $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ и положим

$$\psi(X) = \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \cap X.$$

2. Если $f$ – многогранная функция, допускающая представление $f = \sum_i t_i I_{X_i}$, то положим $\psi(f) = \sum_i t_i I_{\psi(X_i)}$.

**6.4. Теорема.** *Две многогранные функции $F$ и $F'$, заданные на четномерном проективном пространстве, равносоставлены тогда и только тогда, когда их образы $\psi(F)$ и $\psi(F')$ равносоставлены в $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$.*

**Доказательство.** Поскольку обе функции $F$ и $F'$ допускают представление (5.1), то равносоставленность $\psi(F)$ и $\psi(F')$ очевидно влечет равносоставленность $F$ и $F'$. Обратно, пусть $F$ и $F'$ равносоставлены. Без ограничения общности можно считать, что $F' \equiv 0$. В силу равносоставленности имеют место тождества:

$$F(x) = \sum_i F_i(t_i(x)); \quad 0 = \sum_i F_i(x).$$

Имея ввиду разложение (5.1), можно считать, что $F_i(x) = A_i I_{X_i}(x)$, где $X_i$ – базовые множества относительно некоторого $\mathcal{E}$, $A_i$ – некоторые вещественные числа. Рассмотрим формальную сумму $\sum_i A_i I_{\varphi^{-1}(X_i)} \in \mathcal{M}_0(\varphi^{-1}(\mathcal{E}))$. Согласно теореме 4.4, она представима в виде суммы гиперплоских элементов из $\mathcal{M}_0(\varphi^{-1}(\mathcal{E}))$. Следовательно, множество функций $U = \{A_i I_{t_i(X_i)}\}$ можно разбить на такие подмножества $U_j$, что для каждого $j$ справедливо $\sum_{U_j} A_i I_{t_i(X_i)} = 0$, и все базовые множества, участвующие в этой сумме, имеют общий полюс. Это означает, что для каждого $U_j$ функция $\sum_{U_j} A_i I_{\psi(t_i^{-1}(X_i))}$ равносоставлена нулевой. $\square$

## Литература


1. П. Картье, *Разбиение многогранников: к вопросу о третьей проблеме Гильберта.* В сб.: Математика. Новое в современной науке. 45, Мир, М. (1990).
2. Г. Ю. Панина, *Смешанные объемы многогранных функций.* — Алгебра и Анализ **6, вып. 6** (1994), 1209–1217.
3. R. V. Ambartzumian, *Combinatorial integral geometry.* Wiley New York (1982).
4. G. Yu. Panina, *Many-dimensional combitorial Ambartzumian's formulae.* — Math. Nachr. **159** (1992), 271–277.



G. Yu. Panina. Polyhedral functions and equidecomposability of polyhedrons in the projective space.

A certain combinatorial decomposition of polyhedral functions is obtained. An equidecomposability of polyhedral functions is considered. As an application we get a certain necessary and sufficient condition of equidecomposability of polyhedral functions in even dimensional projective space.



С.-Петербургский
институт информатики РАН


Поступило (дата) ????