Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

С. С. Подкорытов

ОБ ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ СЛУЧАЙНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ

Пусть $H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ – векторное пространство однородных многочленов степени m на пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$. На $H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ очевидным образом действует ортогональная группа $O(d+1)$. Для многочлена $f \in H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ через $V_f \subset \mathbb{R}P^d$ мы обозначаем гиперповерхность, задаваемую уравнением $f = 0$.

Координаты точки $x \in \mathbb{R}^{d+1}$ будем обозначать $x_0, \ldots, x_d$. Пусть $S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : |x| = 1\}$ – единичная сфера. Нам потребуется отмеченная точка $x^0 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^d$.

Под случайными величинами, многочленами, операторами и т.п. мы, как обычно, понимаем отображения из некоторого пространства элементарных событий в множество чисел, многочленов, операторов и т.д. В таких случаях мы будем пользоваться записью типа $F \mathrel{\hat{\in}} H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ и т.п.

Цлучайный многочлен $F \mathrel{\hat{\in}} H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ будем называть *"хорошим"*, если он имеет нетривиальное нормальное распределение со средним 0, инвариантное относительно действия группы $O(d+1)$. Если $F \mathrel{\hat{\in}} H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ – "хороший" случайный многочлен, то гиперповерхность V_F неособа почти наверное (предложение 6.1).

Параметром "хорошего" случайного многочлена F будем называть число r, заданное формулой

$$r = \frac{\mathbf{E}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}(x^0)\right)^2}{\mathbf{E}\, F(x^0)^2}.$$

Можно проверить, что параметры "хороших" цлучайных многочленов $F \mathrel{\hat{\in}} H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ заполняют отрезок

$$\frac{1-(-1)^m}{2} \leqslant r \leqslant \frac{m(m+d-1)}{d}.$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант 98-01-00832 и грант поддержки научных школ).

Пример 1. Определим случайный многочлен $F \hat{\in} H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ формулой

$$F(x) = \sum_{m_0+\dots+m_d=m} F_{m_0\dots m_d} x_0^{m_0} \dots x_d^{m_d}, \qquad x \in \mathbb{R}^{d+1},$$

где $F_{m_0\dots m_d}$ – независимые нормальные случайные величины со средним 0, причём

$$\mathbf{E}\, F^2_{m_0\dots m_d} = \frac{m!}{m_0! \dots m_d!}.$$

Можно проверить, что тогда случайный многочлен F "хороший" и имеет параметр

$$r = m.$$

Следующий пример при $d = 3$ рассматривался в работе [1].

Пример 2. Введём в пространстве $H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ скалярное произведение

$$(f_1, f_2) = \int\limits_{x \in S^d} f_1(x) f_2(x)\, dx.$$

Пусть $F \hat{\in} H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ – такой нормальный случайный многочлен, что

$$\mathbf{E}\,((f_1, F)(f_2, F)) = (f_1, f_2), \qquad f_1, f_2 \in H_m(\mathbb{R}^{d+1}).$$

Можно проверить, что тогда случайный многочлен F "хороший" и имеет параметр

$$r = \frac{m(m+d+1)}{d+2}.$$

Главный результат работы. Это обобщение результата, анонсированного в работе [1]. Прежде чем его формулировать, введём обозначение.

Для каждого нечётного d положим

$$I_d(s) = \int\limits_0^s (1-t^2)^{\frac{d-1}{2}}\, dt, \quad s \in \mathbb{R}, \qquad M_d(r) = \frac{I_d(r^{1/2})}{I_d(1)}, \quad r \geqslant 0.$$

Теорема. *Пусть d нечётно. Пусть $F \mathbin{\hat\in} H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ – "хороший" случайный многочлен с параметром r. Тогда*

$$\mathbf{E}\,\chi(V_F) = M_d(r).$$

Здесь даётся только план доказательства теоремы.

Благодарность. Я узнал о случайных алгебраических многообразиях от И. А. Ибрагимова. Я признателен ему за это, за внимание и за поддержку.

Вспомогательные определения, обозначения и соглашения

Пусть X – евклидово векторное пространство. Скалярное произведение векторов $x_1, x_2 \in X$ будем обозначать через (x_1, x_2), длину вектора $x \in X$ – через $|x|$. Обозначим через $Q(X)$ пространство симметрических операторов на пространстве X. Если $w \in Q(X)$, то $\operatorname{tr} w$ и $\det w$ обозначают след и определитель оператора w, $\operatorname{ad} w \in Q(X)$ – присоединённый оператор, так что $w \operatorname{ad} w = \det w \cdot e$ (здесь и далее $e \in Q(X)$ – единичный оператор), и $\|w\| = (\operatorname{tr} w^2)^{1/2}$ – евклидова норма оператора w.

Ортогональная группа $O(d)$ очевидным образом действует на пространстве $Q(\mathbb{R}^d)$, а также на пространствах $\mathbb{R} \times Q(\mathbb{R}^d)$ и $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times Q(\mathbb{R}^d)$ (в последнем случае имеется в виду произведение действий).

Пусть $|S^d|$ – d-мерная мера сферы S^d. Для точки $x \in S^d$ пусть $T_x S^d = \{v \in \mathbb{R}^{d+1} \mid (x, v) = 0\}$. (Это – касательное пространство сферы S^d в точке x.)

Для многочлена $f \in H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ и точки $x \in S^d$ пусть $\partial f(x) \in T_x S^d$ и $\partial^2 f(x) \in Q(T_x S^d)$ – соответственно градиент и оператор второй производной сужения многочлена f на сферу S^d в точке x. Таким образом,

$$f\Big(\frac{x+tv}{|x+tv|}\Big) = f(x) + (\partial f(x), v)t + (\partial^2 f(x)(v), v)\frac{t^2}{2} + O(t^3),$$
$$t \to 0, \;\; v \in T_x S^d.$$

Многочлен $f \in H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ будем называть *регулярным*, если нет таких точек $x \in S^d$, что одновременно $f(x) = 0$ и $\partial f(x) = 0$.

Для каждого натурального d пусть

$$a_d = \mathbf{E}\,|Z|^d,$$

где Z – стандартная нормальная случайная величина.

Кроме вышеприведенных, нам потребуются еще следующие специальные обозначения.

Для $c \in \mathbb{R}$, $f \in H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ определим функции A_f^c, B_f^c, D_f^c на сфере S^d формулами

$$A_f^c(x) = \frac{cf(x)\det\left(cf(x)e + \partial^2 f(x)\right)}{\left(c^2 f(x)^2 + |\partial f(x)|^2\right)^{\frac{d+1}{2}}},$$

$$B_f^c(x) = \frac{(1-c)(\operatorname{ad}\left(cf(x)e + \partial^2 f(x)\right)(\partial f(x)), \partial f(x))}{\left(c^2 f(x)^2 + |\partial f(x)|^2\right)^{\frac{d+1}{2}}}, \qquad x \in S^d,$$

$$D_f^c = A_f^c + B_f^c.$$

1. Интегральное представление эйлеровой характеристики

Фиксируем $c \neq 0$ и регулярный многочлен $f \in H_m(\mathbb{R}^{d+1})$. Определим отображения $G\colon S^d \to \mathbb{R}^{d+1}$, $g\colon S^d \to S^d$ формулами

$$G(x) = cf(x)x + \partial f(x), \quad g(x) = \frac{G(x)}{|G(x)|}, \qquad x \in S^d.$$

1.1. Утверждение. *Если d нечётно, то справедливо равенство*

$$\deg g = 1 - \operatorname{sgn} c\ \chi(V_f).$$

Это вариант формулы Химшиашвили, см. [2].

1.2. Утверждение. *Справедливо равенство*

$$\deg g = \frac{1}{|S^d|} \int\limits_{x \in S^d} D_f^c(x)\, dx.$$

Это следует из того, что функция D_f^c есть якобиан отображения g.

2. Одно выражение со случайным вектором

Фиксируем натуральное d. Для $c \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ определим функцию i_u^c на пространстве $\mathbb{R}^d$ формулой

$$i_u^c(v) = \frac{cu}{(c^2u^2 + |v|^2)^{\frac{d+1}{2}}}, \qquad v \in \mathbb{R}^d.$$

2.1. Утверждение. *Пусть $u \in \mathbb{R}$. Пусть $V \hat{\in} \mathbb{R}^d$ – случайный вектор, имеющий нетривиальное сферически симметричное нормальное распределение со средним 0. Положим*

$$h = \frac{\mathbf{E}\,|V|^2}{d}, \quad E = \frac{h^{-d/2}}{a_d}.$$

Тогда: а) для любого $c \in \mathbb{R}$ имеем $\mathbf{E}\,|i_u^c(V)| \leqslant E$; б) при $c \to \pm 0$ имеем $\mathbf{E}\,i_u^c(V) \to \pm E$.

Доказательство опускается.

3. Определитель случайного оператора

Для каждого нечётного d определим однородный многочлен s_d степени $\dfrac{d-1}{2}$ от двух переменных равенством

$$\mathbf{E}\,(\operatorname{sgn} X\,(pX+qY)^d) = p\,s_d(p^2,q^2), \qquad p,q \in \mathbb{R},$$

где X, Y – независимые стандартные нормальные случайные величины.

3.1. Утверждение. *Пусть d нечётно. Пусть $U \hat{\in} \mathbb{R}$ – случайная величина, $W \hat{\in} Q(\mathbb{R}^d)$ – случайный оператор, имеющие нормальное совместное распределение со средним 0, инвариантное относительно действия группы $O(d)$, причём распределение случайной величины U нетривиально. Положим*

$$g = \mathbf{E}\,U^2, \quad H_1 = \frac{\mathbf{E}\,(U \operatorname{tr} W)}{d},$$

$$H = \frac{\mathbf{E}\,(\operatorname{tr} W)^2 - \mathbf{E}\,\|W\|^2}{d(d-1)}, \quad k = g^{-1/2} H_1.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\,(\operatorname{sgn} U\ \det W) = k\,s_d(k^2, H-k^2).$$

Уточнение. В случае $d = 1$ величина H оказывается не определена, но можно считать, что утверждение остаётся справедливым, если учесть, что $s_1(u,v) = a_1$, $u,v \in \mathbb{R}$.

Доказательство опускается.

3.2. Лемма. *Справедливо тождество*

$$M_d(r) = \frac{r^{1/2}\,s_d(r,1-r)}{a_d}, \qquad r \geqslant 0.$$

Это проверяется вычислением.

4. 2-струя случайного многочлена

Пусть $F \hat{\in} H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ – “хороший” случайный многочлен с параметром r. Отождествляя естественным образом пространства $T_{x^0}S^d$ и $\mathbb{R}^d$, будем считать, что $F(x^0) \hat{\in} \mathbb{R}$, $\partial F(x^0) \hat{\in} \mathbb{R}^d$, $\partial^2 F(x^0) \hat{\in} Q(\mathbb{R}^d)$.

4.1. Предложение. *Случайные элементы $F(x^0)$, $\partial F(x^0)$, $\partial^2 F(x^0)$ имеют нормальное совместное распределение со средним 0, инвариантное относительно действия группы $O(d)$.*

Это очевидно.

4.2. Следствие. *Пара $F(x^0), \partial^2 F(x^0)$ и случайный вектор $\partial F(x^0)$ независимы.*

Это легко следует из предложения 4.1.

4.3. Предложение. *Справедливы равенства:*

а) $d\, r\, \mathbf{E}\, F(x^0)^2 = \mathbf{E}\, |\partial F(x^0)|^2$;
б) $\mathbf{E}\, (F(x^0)\, \mathrm{tr}\, \partial^2 F(x^0)) = -\, \mathbf{E}\, |\partial F(x^0)|^2$;
в) $\mathbf{E}\, (\mathrm{tr}\, \partial^2 F(x^0))^2 - \mathbf{E}\, \|\partial^2 F(x^0)\|^2 = (d-1)\, \mathbf{E}\, |\partial F(x^0)|^2$.

Доказательство опускается.

5. 2-струя случайного многочлена: специальные оценки и вычисления

Пусть $F \hat{\in} H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ – “хороший” случайный многочлен с параметром r.

5.1. Утверждение. *Предположим, что $r > 0$. Тогда: а) для любого $c \in \mathbb{R}$ имеем $\mathbf{E}\, |A_F^c(x^0)| < \infty$; б) при $c \to \pm 0$ имеем $\mathbf{E}\, A_F^c(x^0) \to \mp M_d(r)$.*

Доказательство использует утверждения 2.1, 3.1, лемму 3.2, предложение 4.1, следствие 4.2 и предложение 4.3.

5.2. Утверждение. *Предположим, что $r > 0$. Тогда: а) для любого $c \in \mathbb{R}$ имеем $\mathbf{E}\, |B_F^c(x^0)| < \infty$; б) при $c \to 0$ имеем $\mathbf{E}\, B_F^c(x^0) \to \mathbf{E}\, B_F^0(x^0)$.*

Доказательство использует предложение 4.1 и следствие 4.2.

6. Регулярность случайного многочлена

Пусть $F \hat{\in} H_m(\mathbb{R}^{d+1})$ – “хороший” случайный многочлен с параметром r.

6.1. Предложение. *Случайный многочлен F регулярен почти наверное.*

Доказательство использует предложение 4.1 и следствие 4.2.

О доказательстве теоремы

Доказательство использует утверждения 1.1, 1.2, 5.1, 5.2 и предложение 6.1.

Литература

1. И. А. Ибрагимов, С. С. Подкорытов, *О случайных вещественных алгебраических поверхностях.* — Доклады академии наук **343**, № 6, (1995), 734–736.
2. В. И. Арнольд, *Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского – Олейник и смешанные структуры Ходжа.* — Функцион. анализ и его приложения **12**, № 1, (1978), 1–14.

Podkorytov S. S. On the Euler characteristic of a random algebraic hypersurface.

We calculate the mean value of the Euler characteristic of the hypersurface in $\mathbb{R}P^d$ (d odd) defined by a random polynomial of given degree under the condition that the polynomial has normal distribution with zero mean invariant with respect to the action of the orthogonal group $O(d+1)$.

С.-Петербургский
государственный университет

Поступило 14 июня 1998 г.