Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 252, 1998 г.

П. В. Светлов

ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ НА T-ПОЛИЭДРАХ

0. Введение

0.1. Формулировка основной теоремы. Любой узел в трехмерном пространстве изотопен некоторому узлу (простой замкнутой кривой) на полиэдре

$$T = \{(x,y,z)|z=0\} \cup \{(x,y,z)|y=0, z \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

(см. п. 4.1). Цель настоящей работы – показать, что существует нетривиальная теория узлов на T-полиэдрах, то есть двумерных топологических пространствах, гомеоморфных полиэдру T.

Естественно ожидать, что два узла на T, изотопные как узлы в пространстве, могут быть неизотопными на T. Основной результат работы состоит в том, что мы предъявляем инвариант, который может различать такие узлы. Для узла $K \subset T$ этот инвариант $\Theta(K)$ является абсолютной величиной определителя некоторой целочисленной квадратичной формы Q, определенной на первой группе гомологий поверхности $M_K \subset T$, ограниченной узлом K. (В отличие от поверхности Зейферта узла в пространстве [2], поверхность M_K определяется узлом K однозначно и может быть неориентируемой.) С помощью инварианта $\Theta(K)$ мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *На полиэдре $T \subset \mathbb{R}^3$ существует пара неизотопных узлов, которые изотопны как узлы в $\mathbb{R}^3$.*

Построение формы Q и составляет основное содержание работы. Опишем коротко его этапы.

0.2. Значение формы Q на 1-цикле c зависит от взаимного расположения узла K и носителя цикла c на T. Поэтому мы рассматриваем множество $\mathcal{A}$ упорядоченных пар циклов, носители которых не пересекаются друг с другом и не имеют самопересечений. Элементы множества $\mathcal{A}$ называются двуцветными зацеплениями на T.

На множестве $\mathcal{A}$ имеется естественная структура группоида (определено неассоциативное умножение). Одним из ключевых моментов построения является введение такого отношения эквивалентности σ на $\mathcal{A}$, что множество $\mathcal{A}/\sigma$ с индуцированным из $\mathcal{A}$ умножением является группой. Эта группа оказывается естественно изоморфной свободной подгруппе в свободном произведении $H = \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^2$. Для гомоморфизма факторизации $w : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\sigma$ элемент $w(c, c') \in \mathcal{A}/\sigma$ является изотопическим инвариантом двуцветного зацепления $(c, c') \in \mathcal{A}$. Все это доказывается в первой части работы.

0.3. Во второй части работы мы рассматриваем кольцо Ли $\mathcal{H}$ группы H, $\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_n}\mathcal{H}^n$, где $\mathcal{H}^n = H^n/H^{n+1}$ – фактор нижнего центрального ряда группы H, и строим гомоморфизм $\varpi : H \to \mathcal{H}$, группы H в группу Магнуса кольца $\mathcal{H}$.

Пусть $\varpi = \oplus_n \varpi_n$, тогда отображения $\omega_n = \varpi_n \circ w : \mathcal{A} \to \mathcal{H}^n$ являются изотопическими инвариантами двуцветных зацеплений и порождают кольцо Ли таких инвариантов.

0.4. Третья часть работы посвящена исследованию полученной системы $\{\omega_n\}$. Так значение $\omega_1(c, c')$ пропорционально классическому коэффициенту зацепления $lk(c, c')$ циклов c, c' в $\mathbb{R}^3$, а искомая форма Q_k определяется квадратичной частью отображения $\omega_2(\cdot, k)$, где k – цикл, носитель которого изотопен узлу K на полиэре T. Доказательство основной теоремы завершает работу.

Автор выражает благодарность проф. С. В. Буяло, под чьим руководством была выполнена дипломная работа, продолжением которой которой явилась эта статья. Я искренне рад возможности поблагодарить В. Л. Кобельского, поддерживавшего затянувшиеся поиски инвариантов. Наконец, я благодарен фонду “Лев Парнес” за поддержку.

1. Группа двуцветных зацеплений

Напомним, что T-полиэдром называется топологическое пространство, гомеоморфное подмножеству

$$T = \{(x, y, z) | z = 0\} \cup \{(x, y, z) | y = 0, z \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Особенность этого полиэдра – наличие сингулярного (существенного) ребра $E = \{(x, y, z) | z = 0, y = 0\} \subset T$. Такие полиэдры встречаются часто, например, любая внутренняя точка существенного ребра спайна трехмерного многообразия или мыльной пленки обладает окрестностью, являющейся T-полиэдром [3]. Ясно, что изучение узлов на T-полиэдрах сводится к случаю полиэдра T.

1.1. Группоид $\mathcal{A}$. Группой целочисленных 1-цепей на T называется свободная абелева группа, порожденная направленными отрезками t_1t_2, где точки t_1, t_2 либо принадлежат одной компоненте связности множества $T \setminus E$, либо одна и только одна из этих точек лежит на сингулярном ребре. При этом $t_1t_2 = -t_2t_1$. Любая 1-цепь c однозначно представляется в виде линейной комбинации образующих с натуральными коэффициентами. Пусть $c = \sum_i n_i \cdot t_1^i t_2^i$ – такое представление (оно называется каноническим). Носитель такой цепи – это объединение геометрических отрезков $|c| = \bigcup_i |t_1^i t_2^i|$.

Стандартно определяемую группу целочисленных 1-циклов обозначим $Z_1(T, \mathbb{Z})$. Пусть $\mathcal{A} \subset Z_1(T, \mathbb{Z}) \times Z_1(T, \mathbb{Z})$ – множество, состоящее из пар циклов (c, c'), носители которых $|c|, |c'|$

1. не имеют самопересечений
2. не пересекаются между собой
3. лежат в T_0.

Здесь $T_0 = \{(x, y, z) \in T | -1 \leq x \leq 1\}$.

Теперь определим умножение на множестве $\mathcal{A}$. Пусть (l_1, l_2), $(m_1, m_2) \in \mathcal{A}$. Сдвинем полосу T_0 вместе с циклами l_1, l_2 на вектор $(-1, 0, 0)$, а эту же полосу с циклами m_1, m_2 на вектор $(1, 0, 0)$. Пусть T_0' – объединение сдвинутых полос. При сжатии с коэффициентом $\frac{1}{2}$ в направлении сингулярного ребра это объединение переходит в полосу T_0, а сдвинутые циклы l_1, l_2, m_1, m_2 в циклы l_1^-, l_2^-, m_1^+, m_2^+ соответственно. Положим

$$(l_1, l_2) \diamond (m_1, m_2) = (l_1^- + m_1^+, l_2^- + m_2^+).$$

Эта операция, очевидно, неассоциативна. $(\mathcal{A}, \diamond)$ называется группоидом двуцветных зацеплений.

1.2. Группа $\mathcal{A}/\sigma$. В этом пункте мы введем отношение эквивалентности $\sigma \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, чтобы превратить $(\mathcal{A}, \diamond)$ в группу. Для этого определим вспомогательные отношения σ_1, $\sigma_2 \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ так:

$$(c, c')\sigma_1(c, c''), \quad (c', c)\sigma_2(c'', c), \quad \text{если цикл} \quad c' - c'' \\ \text{гомологичен} \quad 0 \in H_1(T_{|c|}, \mathbb{Z}).$$

Здесь $T_{|c|}$ – полиэдр, полученный из T удалением открытой ленты достаточно малой ширины вдоль $|c|$. Это определение корректно: мы можем рассматривать целочисленные гомологии, так как фундаментальная группа $\pi_1(T_{|c|})$ свободна.

Искомое отношение σ есть наименьшее отношение эквивалентности на $\mathcal{A}$, содержащее объединение $\sigma_1 \cup \sigma_2$.

Напомним, что конгруенцией на группоиде $\mathcal{A}$ называется такое отношение эквивалентности $\sim$, что $a \sim b$, $c \sim d$ влечет $a \diamond c \sim b \diamond d$ для произвольных $a, b, c, d \in \mathcal{A}$ [1]. В этом случае фактормножество $\mathcal{A}/\sim$ наследует структуру группоида из $\mathcal{A}$.

Предложение 1.1. *Отношение эквивалентности σ является конгруенцией. Более того, факторгруппоид $\mathcal{A}/\sigma$ является группой.*

Доказательство. То, что σ – конгруенция, очевидно. Пусть $w : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\sigma$ – гомоморфизм факторизации. Тогда для любого элемента $w(a) \in \mathcal{A}/\sigma$, $a \in \mathcal{A}$ можно указать такой элемнт $b \in \mathcal{A}$, что $w(a)w(b) = w(0,0)$. Действительно, пусть $a = (l_1, l_2)$, тогда $b = (-m(l_1), -m(l_2))$, где m – отражение относительно плоскости $x = 0$ (легко сообразить как оно действует на цепи). Теперь осталось заметить, что $w(0,0)$ играет роль единицы. Ассоциативность индуцированного умножения очевидна. $\square$

Далее мы исключаем из определения множества $\mathcal{A}$ третий пункт.

1.3. В этом пункте мы показываем, что группа $\mathcal{A}/\sigma$ изоморфна некоторой свободной подгруппе свободного произведения $H = \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^2$.

Фиксируем порядок листов полиэдра T (компонент связности множества $T \setminus E$). Назовем переходом упорядоченную пару листов. Таким образом имеется всего шесть переходов. Рассмотрим алфавит A, состоящий из 12 элементов $\{a_i^{\pm 1}, b_i^{\pm 1}, c_i^{\pm 1}\}_{i=1,2}$, в котором каждому переходу соответствуют два элемента (мы называем их переходами первого и второго цветов). Так переходу i-го цвета с первого на второй лист сопоставим букву c_i, со второго на третий – букву a_i, с третьего на первый – букву b_i. Обратным переходам $(2 \to 1, 3 \to 2, 1 \to 3)$ сопоставим буквы $c_i^{-1}, a_i^{-1}, b_i^{-1}$ соответственно.

Теперь опишем правило $\bar{w}$, по которому каждому элементу $(c, c') \in \mathcal{A}$ сопоставляется слово $\bar{w}(c, c') \in \langle A \rangle$.

Как следует из определения 1-цепи множество точек пересечения носителей циклов c и c' с ребром E конечно. Пусть $(|c'| \cup |c|) \cap E = \{x_1, \ldots, x_N\}$ и x_i предшествует x_j на оси OX при $i < j$. Положим $\bar{w}(c, c') = w_1^{n_1} \ldots w_N^{n_N}$, где точке x_i соответствует буква $w_i \in A$ и ее степень n_i. Буква и степень определяются следующим образом. Точка x_i выделяет слагаемое $n_i(ax_i + x_i b)$ в каноническом представлении цикла c или c' (смотря по тому, чей носитель пересекает E в данной точке). Положим w_i равным букве перехода с листа, содержащего точку a, на лист, содержащий точку b. Цвет перехода определяется цветом цикла, содержащего данное слагаемое. Степень n_i явно определяется кратностью слагаемого.

Пусть H – группа, порожденная множеством A и соотношениями

$$a_i b_i c_i = e, \quad [a_i, b_i] = e, \quad i = 1, 2.$$

Из этих соотношений следует, что переходы одного цвета порождают в H свободную абелеву подгруппу ранга два. Поэтому H изоморфно прямому произведению $\mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^2$.

Будем обозначать элемент группы H, задаваемый словом $\bar{w}(c, c')$, через $[\bar{w}(c, c')]$, а образ $\mathcal{A}$ в H через Γ.

Предложение 1.2. *Гомоморфизм* $[\bar{w}] : \mathcal{A} \to \Gamma$ *опускается до изоморфизма* $\iota : \mathcal{A}/\sigma \to \Gamma$

Доказательство. Покажем, что отображение ι, заданное формулой $\iota(w(c_1, c_2)) = [\bar{w}(c_1, c_2)]$ есть корректно определенный мономорфизм. Допустим, что $[\bar{w}(c_1, c_2)] = e$. Возьмем такое представление слова $[\bar{w}(c_1, c_2)] = \bar{w}_{11}\bar{w}_{21} \cdots \bar{w}_{2N}$, что множители $\bar{w}_{1i}$, $\bar{w}_{2i}$ принадлежат сомножителям свободного произведения $H = \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^2$. Из того, что рассматриваемое слово представляет единицу в свободном произведении, следует, что $\bar{w}_{\alpha i} = e$ для некоторых $\alpha \in \{1, 2\}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$. Очевидно, что существует прообраз элемента $\bar{w}_{\alpha i}$ имеющий вид $(c, \emptyset)$ или $(\emptyset, c)$. Но любой цикл на T гомологичен нулю, поэтому существует такое двухцветное зацепление (c'_1, c'_2), что $\bar{w}(c'_1, c'_2)$ можно получить из $\bar{w}(c_1, c_2)$ вычеркиванием подслова $\bar{w}_{\alpha i}$ и при этом имеет место равенство $[(c_1, c_2)]_\sigma = [(c'_1, c'_2)]_\sigma$. Продолжая аналогичное вычеркивание, мы не позднее чем через N шагов придем к равенству $[(c_1, c_2)]_\sigma = [(0, 0)]_\sigma$. Таким образом ι – мономорфизм. Нетрудно видеть, что ι является отображением “на”. □

Пусть F_2 – свободная группа с двумя образующими f_1, f_2 и $\theta_\alpha : \langle A\rangle \to F_2$, $\alpha = 1, 2, 3$ есть гомоморфизмы, заданные следующей таблицей:

	a_i	b_i	c_i
θ_1	e	f_i	f_i^{-1}
θ_2	f_i^{-1}	e	f_i^1
θ_3	f_i^1	f_i^{-1}	e

Так как эти гомоморфизмы сохраняют соотношения, порождающие H, они опускаются до гомоморфизмов $H \to F_2$, которые мы будем обозначать теми же буквами.

Предложение 1.3. *Имеет место включение* $\Gamma \subseteq \cap_\alpha \ker\theta_\alpha \subseteq [H_a, H_b]$, *где* $H_a = \langle a_1, a_2\rangle$, $H_b = \langle b_1, b_2\rangle$ *– подгруппы в* H, *изоморфные* F_2.

Доказательство. Нетрудно видеть, что с помощью элементарных изотопий любой элемент из $\mathcal{A}$ приводится к такому виду (c, c'), что $\bar{w}(c, c')$ записывается только через a_i, b_i, то есть никакой из циклов крашеного зацепления не имеет переходов с 1-го на 2-й лист и обратно. В то же время $\theta_1([\bar{w}(c, c')])$ зависит только от тех слагаемых цепей c и c', носители которых лежат на первом листе. Таким образом, мы можем составить слово $\theta_1(\bar{w}(c, c'))$, смотря только на первый лист и приписывая каждой точке перехода с первого на третий лист и обратно букву f_1 или f_2 в соответствующей степени. То, что носители циклов c и c' не пересекаются, равносильно тому, что $\theta_1(\bar{w}(c, c'))$ представляет единичный элемент. Поэтому $[\bar{w}(c, c')] \in \Gamma$ влечет $\theta_1([\bar{w}(c, c')]) = e$. Применяя аналогичные рассуждения к θ_2, θ_3 получим первое включение. Теперь докажем второе. Ясно, что $H/\ker\theta_1 = H_b$, $H/\ker\theta_2 = H_a$, то есть $\ker\theta_1 = \left\langle H_a^{H_b}\right\rangle$ и $\ker\theta_2 = \left\langle H_b^{H_a}\right\rangle$, где G^H это множество $\{hgh^{-1} \mid g \in G, h \in H\}$. Таким образом $\ker\theta_1 \cap \ker\theta_2 \subseteq [H_a, H_b]$. Предложение доказано. $\square$

Заметим, что из теоремы Куроша о подгруппах свободных произведений следует, что группа Γ свободна.

2. Кольцо Ли группы H и инварианты ω_n

В этой части работы строятся изотопические инварианты двуцветных зацеплений $\omega_n : \mathcal{A} \to \mathcal{H}^n$ со значениями в свободных абелевых группах.

2.1. Полная прямая сумма $\mathcal{H} = \overline{\bigoplus}_n \mathcal{H}^n$, где $\mathcal{H}^n = H^n/H^{n+1}$ – n-ый фактор центрального нижнего ряда группы H ($H^0 = H, H^{n+1} = [H^n, H]$), несет структуру кольца Ли. Действительно, билинейные отображения $\phi_{nm} : H^n/H^{n+1} \times H^m/H^{m+1} \to H^{n+m}/H^{n+m+1}$, при которых $(xH^{n+1}, yH^{m+1}) \mapsto [x,y]H^{n+m+1}$, по линейности продолжаются до кососимметричной операции на всю прямую сумму [1]. Факторы $\mathcal{H}^n$ являются свободными абелевыми группами конечного ранга, а само кольцо $\mathcal{H}$ порождается как кольцо Ли своим подмодулем $\mathcal{H}^0 \cong \mathbb{Z}^4$, естественно градуировано и имеет копредставление $\langle x_i, y_i, i = 1,2 \| \, [x_i, y_i] = 0\rangle$.

На этом кольце определена ассоциативная операция – умножение Магнуса [1]. Это умножение задается рядом Кэмпбелла–Хаусдорфа, первые члены которого (нам понадобятся только они) мы выписываем:

$$x \circ y = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}\left(\Big[x,[x,y]\Big] + \Big[y,[y,x]\Big]\right) + \ldots$$

Опущенные члены лежат в $\bar{\oplus}_{n\geq 3}\mathcal{H}^n$. $(\mathcal{H}, \circ)$ называется группой Магнуса кольца Ли $\mathcal{H}$.

2.2. Пусть ϖ – биекция между множествами образующих H и $\mathcal{H}$:

$$\varpi(a_i^{\pm 1}) = \pm x_i, \quad \varpi(b_i^{\pm 1}) = \pm y_i.$$

С помощью формулы $\varpi(w_1 w_2) = \varpi(w_1) \circ \varpi(w_2)$, w_1, $w_2 \in H$ эта биекция естественно продолжается до гомоморфизма группы H в группу $(\mathcal{H}, \circ)$. С учетом градуировки на кольце $\mathcal{H}$ этот групповой гомоморфизм распадается в сумму $\varpi = \oplus_n \varpi_n$. Положим $\omega_n = \varpi_n \circ w : \mathcal{A} \to \mathcal{H}^n$. Отображения ω_n являются изотопическими инвариантами двуцветных зацеплений по построению. Скобка Ли двух таких отображений также является изотопическим инвариантом. Таким образом построено целое кольцо Ли инвариантов двуцветных зацеплений.

Замечание. Можно показать (здесь мы этого делать не будем), что $\varpi_n(c, \cdot) : Z_1(T_{|c|}, \mathbb{Z}) \to \mathcal{H}^n$ является полиномиальным отображением степени $\leq n$.

2.3. Из формулы Кэмпбелла–Хаусдорфа для умножения Магнуса легко вывести следующие формулы:

$$\varpi_0(g_1 \cdot \ldots \cdot g_s) = \sum_i \varpi_0(g_i),$$

$$\varpi_1(g_1 \cdot \ldots \cdot g_s) = \sum_i \varpi_1(g_i) + \frac{1}{2}\sum_{i<j}[\varpi_0(g_i), \varpi_0(g_j)],$$

$$\varpi_2(ab) = \varpi_2(a) + \varpi_2(b) + [\varpi_0(a), \varpi_1(b)] + [\varpi_1(a), \varpi_0(b)]+$$

$$+\frac{1}{6}\left(\Big[\varpi_0(a), [\varpi_0(a), \varpi_0(b)]\Big] + \Big[\varpi_0(b), [\varpi_0(b), \varpi_0(a)]\Big]\right).$$

Следующее предложение нам понадобится при определении инварианта вложений $\Theta(K)$ в третьей части работы.

Предложение 2.1. а) *Если a, b стандартные образующие группы H, а k, $m \in \mathbb{Z}$, то:*

$$\varpi_1(w_l a^k b^m w_r) - \varpi_1(w_l b^m a^k w_r) = km[\varpi_0(a), \varpi_0(b)],$$

$$\varpi_2(w_l a^k b^m w_r) - \varpi_2(w_l b^m a^k w_r) = km\Big[[\varpi_0(a), \varpi_0(b)], \varpi_0(w_r) - \varpi_0(w_l)\Big].$$

где w_l, $w_r \in H$ – произвольные элементы группы.

б) *Ограничения ϖ_1, ϖ_2 на H^1 – гомоморфизмы соответствующих групп.*

Доказательство получается простым применением формул настоящего пункта. □

Замечание. Полученные выше результаты без труда переносятся на N-цветные зацепления на полиэдре, полученном отождествлением граничных прямых произвольного числа замкнутых полуплоскостей.

3. Инвариант $\Theta(K)$

3.1. Коэффициент зацепления.

Предложение 3.1. *Существует элемент $\xi_1 \in \mathcal{H}^1$ такой, что для любого $(c, c') \in \mathcal{A}$ имеем*

$$\omega_1(c, c') = lk(c, c') \cdot \xi_1,$$

где lk – классический коэффициент зацепления в пространстве.

Доказательство. а) Пусть

$$w\,(c,c') = \prod_{i\in\overline{1,s}} a_1^{k_i} b_1^{l_i} a_2^{m_i} b_2^{n_i} \qquad (*)$$

какое-либо представление элемента $w\,(c,c') \in \Gamma$. Тогда с помощью формул из п.a Предложения 2.1 имеем

$$\omega_1(c,c') = \varpi_1\,(w(c,c')) =$$
$$(n;k)[y_2,x_1] + (m;k)[x_2,x_1] + +(n;l)[y_2,y_1] + (m;l)[x_2,y_1], \quad (**)$$

где $(a;b) = \sum_{i<j} a_i b_j$. Но $w(c,c') \in \Gamma \subseteq [H_a,H_b]$, что, учитывая п.b Предложения 2.1, немедленно указывает на невозможность присутствия в сумме $(**)$ членов $[x_1,x_2]$ и $[y_1,y_2]$, следовательно, $(m;k) = (n;l) = 0$. Запишем слово $(*)$ через другие образующие:

$$w\,(c,c') = \prod a_1^{k_i-l_i} c_1^{-l_i} a_2^{m_i-n_i} c_2^{-n_i} \in \Gamma \subset [H_a,H_c].$$

тогда, аналогично, $(m-n;k-l) = 0$. С другой стороны,

$$(m-n;k-l) = (m;k) - (n;k) + (n;l) - (m;l) = -(m;l) - (n;k) = 0.$$

Таким образом,

$$\omega(c,c') = (m;l)\cdot\xi_1, \quad \text{где} \quad \xi_1 = [x_1,y_2] + [x_2,y_1].$$

b) $\omega_1(c,c') = \omega_1(c',c)$. Действительно, при изменении порядка циклов в выкладках поменяются местами индексы 1 и 2; ξ_1 такую замену, очевидно, выдерживает.

c) Пусть c_y, c'_y – циклы, полученные отражением относительно плоскости $y=0$ из циклов c и c' соответственно. Тогда $\omega_1(c_y,c'_y) = -(m;l)\xi_1 = -\omega_1(c,c')$.

d) Пусть (c,c'), $(d,d') \in \mathcal{A}$ такие двуцветные зацепления, что

$c = l + GB + BE$

$d = l + GA + AF + FC + CE$

$d' = l' + HB + BD$

$c' = l' + HC + CF + FA + AD$,

где

$$A(-\epsilon,0,0), \quad B(0,0,0), \quad C(\epsilon,0,0), \quad D(-\epsilon,-\epsilon,0),$$
$$E(\epsilon,-\epsilon,0), \quad F(0,\epsilon,0), \quad G(-\epsilon,0,\epsilon), \quad H(\epsilon,0,\epsilon)–$$

точки полиэдра T, $\epsilon > 0$ – малое число, а носители цепей l, l' не пересекают отрезок $|(-\epsilon,0,0)(\epsilon,0,0)|$ сингулярного ребра.

В этой ситуации $\omega_1(d,d') - \omega_1(c,c') = \xi_1$. Действительно, это следует из применения формул п.a Предложения 2.1 к словам

$$\bar{w}(c,c') = w_l b_1 a_2^{-1} a_1^{-1} b_1^{-1} w_r \quad \text{и} \quad \bar{w}(d,d') = w_l a_2^{-1} b2^{-1} a_1^{-1} b_2 w_r.$$

Таким образом, коэффициент при ξ_1 симметричен(п.b), реагирует на изменение ориентации пространства также, как коэффициент зацепления (п.c) и изменяется вместе с последним (п.d). Предложение доказано. □

3.2. Построение квадратичной формы. Теперь докажем утверждение, аналогичное доказанному в п.a предыдущего Предложения:

Предложение 3.2. *Существует элемент $\xi_2 \in \mathcal{H}^2$ такой, что для любого $(c,c') \in \mathcal{A}$*

$$\text{\textit{элемент}} \quad \frac{1}{2}\Big(\omega_2(2c,c') - 2\omega_2(c,c')\Big) \quad \text{\textit{кратен}} \ \ \xi_2 \ \ \text{\textit{по модулю}} \quad \big[\xi_1, \mathcal{H}^0\big]\,.$$

Доказательство. Как и в п.a доказательства Предложения 3.1, возьмем слово, записанное циклами, в форме $(*)$. Вычисления в данном случае несколько сложней, но они приводят к формуле, аналогичной $(**)$:

$$\begin{aligned} \omega_2(c,c') = \varpi_2(w\,(c,c')) = (m;k,k)\Big[[x_1,x_2],x_1\Big] + \\ +\Big((n;k,k) + 2(m;k,l)\Big)\Big[[x_1,x_2],y_1\Big] + \\ +\Big((m;l,l) + 2(n;k,l)\Big)\Big[[y_1,y_2],x_1\Big] + \\ +(n;l,l)\Big[[y_1,y_2],y_1\Big] + \text{линейные по} \ \ x_1,\, y_1 \\ \text{члены} \ + \big[\xi_1, \mathcal{H}^0\big]\,, \end{aligned} \tag{$***$}$$

где $(a;b,c) = \sum_{i<j,k} a_i b_j c_k$. Остаток доказательства аналогичен доказательству п.a Предложения 3.1: в сумме $(***)$ должны отсутствовать слагаемые $\Big[[x_1,x_2],x_1\Big]$ и $\Big[[y_1,y_2],y_1\Big]$. Следовательно, $(m;k,k) = (n;l,l) = 0$. Далее, $\Big(m-n;k-l,k-l\Big) = 0$, поэтому $(m;l,l) + 2(n;l,k) = (n;k,k) + 2(m;k,l)$. Таким образом,

$$\frac{1}{2}\Big(\omega_2(2c,c') - 2\omega_2(c,c')\Big) = \Big((n;k,k) + 2(m;k,l)\Big)\cdot\xi_2 + \big[\xi_1,\mathcal{H}^0\big]\,,$$

где $\xi_2 = \Big[[x_1, x_2], y_1\Big] + \Big[[y_1, y_2], x_1\Big]$. $\square$

В обозначениях доказанного только что Предложения определим функцию Q равенством $Q_{c'}(c) = (n; k, k) + 2(m; k, l)$. Легко видеть, что $Q_{c'} : Z_1(T_{|c'|}, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ является квадратичной формой. Напомним, что $T_{|c'|}$ это полиэдр, полученный из полиэдра T удалением открытой ленты достаточно малой ширины вдоль носителя цикла c', а $Z_1(T_{|c'|}, \mathbb{Z})$ – свободная абелева группа циклов на этом полиэдре.

3.3. Изотопический инвариант. Пусть K – узел на полиэдре T, тогда найдется такой цикл $k \in Z_1(T, \mathbb{Z})$, что в его каноническом представлении все n_i равны единице и ломаная $|k|$ регулярно изотопна K, то есть изотопия $|k|$ в K определяется семейством кривых на полиэдре T, каждая из которых трансверсальна существенному ребру $E \subset T$. Любой узел $K \subset T$ ограничивает вложенную поверхность $M_K \subset T$ (см. п. 4.2). Ясно, что квадратичная форма Q_k корректно сужается на $H_1(M_K, \mathbb{Z})$.

Пусть Q_k обозначает также матрицу соответствующей квадратичной формы в каком-либо базисе. Величина $\Theta(K)$ определяется следующим образом. Если группа $H_1(M_k, \mathbb{Z})$ тривиальна, то $\Theta(K) = 1$; в противном случае $\Theta(K) = |\det Q_k|$.

Предложение 3.3. *Число $\Theta(K)$ определено корректно и является изотопическим инвариантом узла K.*

Доказательство. Во-первых, на роль цикла k подходит и цикл $-k$, однако легко заметить, что этот произвол не изменяет величины $\Theta(K)$ (так как $Q_{-k} = -Q_k$). Она также не зависит от базиса в группе $H_1(M_K, \mathbb{Z})$. Во-вторых, надо проследить за изменением этой величины при изотопиях узла K на полиэдре T. Все изотопии, изменяющие поверхность M_K, сводятся к двум типам (см. п. 4.3, терминология и обозначения которого используются в дальнейшем доказательстве).

A) Вычислим $Q_{k_A}(e)$:

$$w(e, k_A) = w_l b_1 a_2 c_1 b_2 a_1 w_r,$$

где w_l, w_r соответствующие элементы из первого сомножителя группы H. Применяя формулы Предложения 2.1 получим $Q_{k_A}(e) = 1$. Так как цикл e не зацеплен ни с одним из оставшихся элементов базиса группы $H_1(M_{K_A}, \mathbb{Z})$, то он ортогонален им относительно билинейной формы $(\, , \,)_{k_A}$, ассоциированной с

Q_{k_A}: $(e,e')_{k_A} = 0$. Мы взяли произвольную ориентацию на всех циклах, так как ее выбор несущественен.

Б) Прежде всего, $Q_{k_B}(e_2) = 0$, так как элемент e_2 не зацеплен за цикл k_B. Далее, пусть e – представитель какого-либо элемента базиса $H_1(M_K, \mathbb{Z})$ (ясно, что e будет представлять какой-либо элемент группы $H_1(M_{K_B}, \mathbb{Z})$). Так как такой цикл e не может быть зацеплен с циклом e_2, имеем $Q_{k_B}(e + e_2) = Q_{k_B}(e)$, поэтому $(e, e_2)_{k_B} = 0$.

Осталось вычислить $Q_{k_B}(e_1 + e_2)$. Аналогично предыдущему случаю (мы опять берем произвольные ориентации):

$$w\,(e_1 + e_2, k_B) = w_l b_1 a_2 c_1 a_2^{-1} b_1^{-1} w_r .$$

Отсюда следует, что $Q_{k_B}(e_1 + e_2) = Q_{k_B}(e_1) + 2$, следовательно $(e_1, e_2)_{k_B} = 1$.

Итак, матрица Q изменяется в этих случаях следующим образом:

$$\textbf{A)} \quad Q_k \longmapsto Q_{k_A} = \begin{pmatrix} Q_k & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

$$\textbf{B)} \quad Q_k \longmapsto Q_{K_B} = \begin{pmatrix} Q_k & * & 0 \\ * & * & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Знаки $\pm$ означают возможный произвол в выборе ориентаций. Очевидно, модуль определителя остается неизменным. $\square$

3.4. Доказательство Теоремы 1. Искомые узлы K_1, K_2 задаются циклами k_1, k_2 соответственно. Первый цикл:

$$k_1 = \sum_{i=1}^{15} t_i t_{i+1} + t_{16} t_1,$$

где

$$\begin{array}{llll} t_1(-4,0,0) & t_2(-1,0,3) & t_3(3,0,0) & t_4(1,-2,0) \\ t_5(-2,0,0) & t_6(-1,0,1) & t_7(1,0,0) & t_8(3,1,0) \\ t_9(4,0,0) & t_{10}(1,-3,0) & t_{11}(-3,0,0) & t_{12}(-1,0,2) \\ t_{13}(2,0,0) & t_{14}(1,-1,0) & t_{15}(-1,0,0) & t_{16}(-3,1,0). \end{array}$$

Выберем базис $H_1(M_{K_1}, \mathbb{Z})$:

$$e_1 = \sum_{i=1}^{9} p_i p_{i+1} + p_{10} p_1,$$

где

$$p_1(-3.5, 0, 0)\ p_2(-1, 0, 2.5)\ p_3(2.5, 0, 0)\ p_4(3, 0.5, 0)\ p_5(1.5, 0, 0)$$

$$p_6(1, -0.5, 0)\ p_7(0, 0, 0)\ p_8(-1, 0, 0.5)\ p_9(-1.5, 0, 0)\ p_{10}(-3, 0.5, 0)$$

и

$$e_2 = \sum_{i=1}^{9} p'_i p'_{i+1} + p'_{10} p'_1,$$

где

$$p'_1(-1.5, 0, 0)\ p'_2(-1, 0, 0.5)\ p'_3(0, 0, 0)\ p'_4(1, -0.5, 0)\ p'_5(1.5, 0, 0)$$

$$p'_6(3, 0.5, 0)\ p'_7(3.5, 0, 0)\ p'_8(1, 2.5, 0)\ p'_9(-2.5, 0, 0)\ p'_{10}(-3, 0.5, 0).$$

Прямолинейные вычисления показывают, что в этом базисе матрица квадратичной формы имеет вид

$$Q_{k_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому $\Theta(K_1) = 1$.

Второй цикл:

$$k_2 = \sum_{i=1}^{17} t_i t_{i+1} + t_{18} t_1,$$

где

$$t_1(0, 0, 0)\ t_2(1, 1, 0)\ t_3(2, 0, 0)\ t_4(3, 0, 1)\ t_5(4, 0, 0)\ t_6(0, -2, 0)$$

$$t_7(-3, 0, 0)\ t_8(-2, 1, 0)\ t_9(-1, 0, 0)\ t_{10}(0, 0, 1)\ t_{11}(1, 0, 0)\ t_{12}(2, -1, 0)$$

$$t_{13}(3, 0, 0)\ t_{14}(0, 2, 0)\ t_{15}(-4, 0, 0)\ t_{16}(-3, 0, 1)\ t_{17}(-2, 0, 0)\ t_{18}(-1, -1, 0).$$

Выберем базис $H_1(M_{K_2}, \mathbb{Z})$:

$$e_1 = \sum_{i=1}^{7} p_i p_{i+1} + p_8 p_1,$$

где

$$p_1(-3.5, 0, 0)\ p_2(-3, 0, 0.5)\ p_3(-2.5, 0, 0)\ p_4(-1, -1.5, 0)$$

$$p_5(0.5, 0, 0)\ p_6(0, 0, 0.5)\ p_7(-0.5, 0, 0)\ p_8(-2, 0.5, 0)$$

и

$$e_2 = \sum_{i=1}^{7} p'_i p'_{i+1} + p'_8 p'_1,$$

где точка p'_i получается переносом точки p_i на вектор $(3, 0, 0)$.

Прямолинейные вычисления показывают, что в этом базисе матрица квадратичной формы имеет вид:

$$Q_{k_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

поэтому $\Theta(K_2) = 3$.

Итак, узел K_1 неизотопен узлу K_2 на подмножестве $T \subset \mathbb{R}^3$. В то же время K_1 изотопен K_2 в $\mathbb{R}^3$, в чем нетрудно убедиться. □

4. Приложение

Здесь мы сделаем наброски доказательств двух утверждений:

1. Любой узел в $\mathbb{R}^3$ изотопически деформируется на $T \subset \mathbb{R}^3$.

2. Любой узел $K \subset T$ ограничивает вложенную в T поверхность, которая определена однозначно.

В завершение мы подробно рассмотрим изменение типа поверхности M_K при изотопиях узла K на полиэдре T.

4.1. Доказательство этого утверждения проходит в два этапа. На первом доказывается, что для произвольной плоскости $N \subset \mathbb{R}^3$ общего положения относительно полиэдра T и произвольной кусочно-линейной замкнутой кривой $c \subset N$ найдется такая кривая $c' \subset T$ без самопересечений, что $n(c')$ изотопно c, где $n : \mathbb{R}^3 \to N$ – нормальная проекция.

Положим, мы реализовали некоторую кривую $c \subset N$ как описанную выше проекцию. Во второй части доказательства надо рассматривать плоские диаграммы узлов из $T \subset \mathbb{R}^3$ на плоскости N. Пусть отображение t ставит в соответствие узлу на T его плоскую диаграмму на плоскости N, то есть пару (c, f), где

c – погруженная кривая, а f сопоставляет каждой особой точке кривой c порядок ветвей, пересекающихся в ней. Пусть π – проекция: $\pi(c,f)=c$. Можно показать, что для любой плоской диаграммы $d\in\pi^{-1}(c)$ существует такой узел $d'\subset T$, что $t(d')$ изотопна d. Последнее означает, что если $d=(c,f)$, $t(d')=(c',f')$, то $n(d')=c'$ изотопно $\pi(d)=c$ в обычном смысле и функции f, f' задают совпадающее чередование проходов и переходов при согласованном прохождении кривых c и c'. Таким образом, на полиэдре $T\subset\mathbb{R}^3$ можно реализовать узел с произвольной плоской диаграммой.

4.2. Части узла K лежащие на различных листах полиэдра T называются дугами. На множестве дуг есть частичный порядок и функция четности (внешние дуги минимальны и нечетны). Рассмотрим какой-нибудь лист T_i и выберем из множества $T_i\setminus K$ фигуры, внешние дуги которых нечетны. Замыкание объединения этих фигур(они тоже называются нечетными) по всем листам и будет искомой поверхностью M_K.

Замечание. Из последовательности Майера–Виеториса для пары (T,K) следует, что $H_2(T,K;\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2$. Поверхность M_K является носителем относительного цикла, порождающего эту группу.

4.3. Рассмотрим изменения поверхности M_K при изотопиях узла K. Пусть k – цикл, построенный по узлу K так же, как в п. 3.3. Изменение типа поверхности M_K происходит в следующих двух случаях.

А) Узел K переходит в узел K_A так, что при этом канонические разложения имеют вид:

$$k=k_0+LM+MN,\ k_A=k_0+LP+PR+RM+MN\ ,$$

причем

1. точки L,N,R принадлежат трем различным листам,
2. точки P,M – лежат на сингулярном ребре,
3. дуга PRM четная,
4. ломаная $LPM\subset T$ лежит на границе нечетной фигуры,
5. носитель цепи k_0 не пересекается с отрезком $|PM|$.

Пусть $e=M'R'+R'P'+P'N'+N'S+SL+LM'\in Z_1(M_{K_A},\mathbb{Z})$ такой цикл, что треугольник $\triangle PRM$ содержится в $\triangle P'R'M',\dots,P'$, $M'\in E$ и $S\in|PM|$. Тип поверхности M_{K_A} отличается от типа поверхности M_K на приклеенную по отрезку границы ленту Мебиуса, образующую первой группы гомологий которой представляет цикл e.

Б) Узел K переходит в узел K_B так, что при этом канонические разложения имеют вид:

$$k = k_0 + LT\ ,\ k_B = k_0 + LP + PR + RM + MT\ ,$$

где

1. точки L, T лежат на одном листе, точка R на другом,
2. точки P, M лежат на сингулярном ребре,
3. дуга PRM и дуга, которой принадлежит отрезок LT, четные.

В этом случае типы поверхностей различаются на приклеенный по отрезку границы тор с дырой. При соответствующем выборе цепи e_1^0 циклы

$$e_1 = e_1^0 + US + SQ\ ,\ e_2 = P'R' + R'M' + M'Q + QP'$$

($\triangle PRM \subset \triangle P'R'M', \dots, P',\ M' \in E$, точки Q, R, T лежат на трех разных листах, $S \in |PM|, U \in |LT|$) являются представителями базисных классов первой группы гомологий этого тора.

Литература

1. *Общая алгебра т. 1.* (под ред. Л. Скорнякова), М., (1990).
2. Д. Кроуэлл, Р. Фокс, *Введение в теорию узлов.* М. (1967).
3. D. Gillman, D. Rolfsen, *Three-manifolds, embed in small 3-complexes.* — Int. J. Math. **3** (1992), 179–183.

Svetlov P. V. Invariants of links and knots on T-polyhedra.

Any link in $\mathbb{R}^3$ can be isotopically deformed to the polyhedron $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0 \text{ or } y = 0,\ z \geqslant 0\}$. Arising nontrivial theory of links and knots on T is developed. The main result consists in presenting an isotopic invariant, which can distinguish pairs of knots on T isotopic as knots in $\mathbb{R}^3$.

Российский государственный
педагогический университ

Поступило 20 июля 1998 г.