Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 253, 1999 г.

В. В. Решетников

РАЗРАБОТКА ИНЖЕНЕРНЫХ ПОДХОДОВ К ИЗУЧЕНИЮ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ, ВОЗБУЖДАЮЩИХСЯ В ПАЧКАХ ТОНКИХ УПРУГИХ СЛОЕВ. (II). (ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПОЛЕЙ. КРАТКИЙ ОБЗОР ПОЛУЧАЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.)

От автора

Рассматриваются слоисто-однородные плоско-параллельные тонкие упругие слои, образующие пачки, находящиеся в жестком контакте друг с другом, а также – с подстилающим и с покрывающим полупространствами. Поля SV в средах возбуждаются сосредоточенными источниками основных типов, прикладываемых (вне пачки) в точке 0 одного из полупространств, или же – внутри одного из слоев пачки. Обсуждаются случаи плоских задач, а также задач с осевой симметрией, решения которых настолько схожи, что достаточно рассмотреть только одну из таких задач, как решение второй можно выписывать без дополнительных выкладок.

Постановка задач на интерференционное распространение волн типа SV в выбранной упругой среде дается для общего случая произвольной тонкослоистой ($h_\nu > h$, $\nu = 1, 2, \dots, n$) пачки n-плоско-параллельных упругих слоев, находившихся в покое при $t < 0$ и возбуждаемых включением некоторого сосредоточенного источника. Для такого случая тонкослоистой среды приводится (в алгоритмической форме) представление точного решения задачи на возбуждение интерференционного волнового поля, и выясняются некоторые общие его свойства, существенные для выполнения количественных исследований. Однако вследствие крайней бедности результатов в обсуждаемой области теории волн, а также – из-за чрезвычайной трудоемкости численного изучения физических явлений, зависящих от большого числа веще-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (98-01-00316, 96-07-89286).

ственных параметров задачи, здесь делается заключение о целесообразности ограничиваться (на первых порах) рассмотрением простейших случаев пачек, состоящих только из одного тонкого слоя SV. При этом, правда, ставятся условия, во-первых, о применении лишь таких методов исследований и оценок, которые с очевидностью допускают обобщения на случаи большего числа физических параметров задачи, а, во-вторых, – об охвате в исследованиях возможно более полного множества качественно – различных комбинаций параметров рассматриваемой слоистой среды.

Таким образом, исследования начинаются с общего случая многослойной тонкослоистой пачки, и применительно к ней разрабатываются алгоритмы и численные методы количественных оценок волновых полей. Однако конкретная физическая задача на изучение интерференционных полей решается здесь для случаев сред, содержащих только один тонкий слой.

Следует отметить, что в этом же томе журнала помещена статья [1], посвященная рассмотрению интерференционных волновых полей в тонком слое $\widetilde{H}_0 < \widetilde{z} < \widetilde{H}_0 + h$, находящемся в жестком контакте с подстилающим полупространством $\widetilde{z} > \widetilde{H}_0 + h$ ("двухслойная" среда), а также – в "трехслойной" среде, состоящей из двух различных полупространств $\widetilde{z} < \widetilde{H}_0$ и $\widetilde{z} > \widetilde{H}_0 + h$ находящихся в жестком контакте с тонким слоем. Там приведена математическая формулировка задач на возбуждение волн в таких упругих средах, дано точное их решение, и подробно обсуждаются применяемые подходы и методы количественной (численной) оценки построенных волновых полей. Однако вопросы, касающиеся непосредственного проведения численных оценок волновых полей, там не затрагиваются. Они были отнесены к настоящей статье, в которой предполагалось рассмотреть один-два случая расчета главных частей полей интерференционных волн в различных областях упомянутых "двухслойной" и "трехслойной" сред.

Однако при реализации такой программы действий скоро выяснилось, что систематические расчеты волновых полей здесь требуют разработки тонкой логически разветвленной и гибкой программы (для персонального компьютера), учитывающей разнообразие в выборе схем возбуждения и регистрации полей, а также – типов изучаемых волн. Только такая программа и может претендовать на достаточную степень универсализма при изучении интерференционных явлений в тонкослоистых средах, что, естественно, является конечной целью наших исследований. Поэтому основные усилия пришлось переключить на разработку (достаточно совершенной) программы расчетов волновых полей и на всестороннее опробование ее узлов и элементов. А предполагаемые приложения расчетов к количественному изучению интерференционных волновых полей при физически-полных схемах их возбуждения и регистрации, а также - при обязательной достаточно подробной сейсмической интерпретации полученных результатов, – пришлось отнести к следующему тому настоящей серии “Записок”.

Таким образом, приложенческая часть содержания статьи оказалась несколько “урезанной”. Однако она все же достаточно хорошо демонстрирует возможности предлагаемых алгоритмов и (разработанных для персонального компьютера систем логически увязанных) программ в количественных исследованиях интерференционных волновых полей в тонкослоистых средах. В заключение автор считает приятным долгом выразить глубокую признательность своему учителю Г. И. Петрашеню, взявшему на себя непростой труд редактирования настоящей статьи.

Оглавление

§1. О физической постановке задачи и об аналитических представлениях изучаемых волновых полей.

§2. Замечания о путях количественной оценки волновых полей.

§3. Схемы проведения количественного изучения интерференционных волновых полей и связанные с ними вопросы.

§4. О численных исследованиях интерференционных волновых полей в средах, содержащих лишь один тонкий слой.

§5. Вместо заключения.

Литература.

§1. О физической постановке задачи и об аналитических представлениях изучаемых волновых полей

В декартовой системе координат $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$, $\widetilde{z}$ заданы две слоисто-однородные изотропные упругие среды в виде системы плоско-параллельных тонких слоев (под номерами ($\nu = 1, 2, 3, \dots, n$)

$$
\begin{array}{ll}
(1) & \widetilde{H}_0 < \widetilde{z} < \widetilde{H}_1 = \widetilde{H}_0 + \widetilde{h}, \\
(2) & \widetilde{H}_1 < \widetilde{z} < \widetilde{H}_2 = \widetilde{H}_0 + \widetilde{h} + \widetilde{h}_2, \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
(\nu) & \widetilde{H}_{\nu-1} < \widetilde{z} < \widetilde{H}_\nu = \widetilde{H}_0 + \sum\limits_{k=1}^{\nu} \widetilde{h}_k, \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
(n) & \widetilde{H}_{n-1} < \widetilde{z} < \widetilde{H}_n = \widetilde{H}_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \widetilde{h}_k,
\end{array}
\tag{1.1}
$$

и подстилающего полупространства $(n+1)$

$$\widetilde{z} > \widetilde{H}_n,$$

характеризуемых соответственно обычными вещественными параметрами

$$\rho_\nu, \quad v_{p\nu}, \quad v_{sv}, \quad (\nu - 1, 2, \dots, n). \tag{1.2}$$

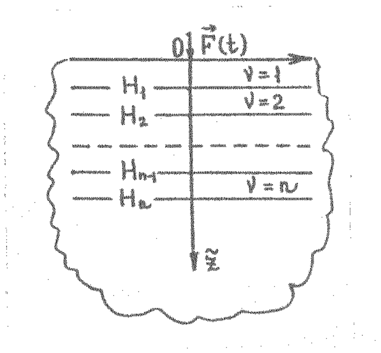

Рис. 1.

Первая – “двухслойная” среда (рис. 1) ограничена сверху свободной поверхностью $\widetilde{z} = \widetilde{H}_0$, к которой прикладывается внешнее воздействие в форме плотности плоской сосредоточенной нормальной силы

$$\vec{F} = -\delta(\widetilde{x}) f(t) \vec{k}, \tag{1.3}$$

где $f(t)$ достаточно низкочастотная функция, представимая интегралом Меллина

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)\, e^{st}\, ds, \quad \sigma > 0, \tag{1.4}$$

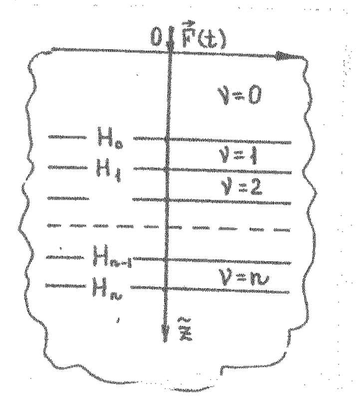

Рис. 2.

включаемая при $t = 0$.

Вторая же – "трехслойная" среда (рис. 2) возбуждается или плоской нормальной силой с плотностью

$$\vec{T}_1 = -\delta(\widetilde{x})\delta(\widetilde{z})f(t)\vec{k}_1, \tag{1.5}$$

приложенной в точке $(0,0)$ полупространства $\widetilde{z} < \widetilde{H}_0$, $(\nu = 0)$, или же источником типа плоского центра давления (с моментом $m = 2f(t)$)

$$\vec{T}_2 = -\frac{\delta(\widetilde{r})}{\pi\,\widetilde{r}^{\,2}}\delta(\widetilde{z} - \widetilde{z}_0)f(t)\,\vec{r}_1, \tag{1.6}$$

приложенного в срединной точке

$$\widetilde{x} = 0, \quad \widetilde{z} = z_0 = \widetilde{H}_0 + \frac{h}{2}$$

тонкого слоя $(\nu = 1)$. При этом все слои среды находятся в жестком контакте друг с другом и с полупространствами $\widetilde{z} < \widetilde{H} - 0$ и $\widetilde{z} > \widetilde{H}_n$, при котором на всех границах раздела соседних сред остаются непрерывными составляющие векторов смещений $\vec{u}$ и напряжений $\vec{t}_z$, т.е.

$$\begin{gathered} u_{\widetilde{x}}^{(\nu-1)} = u_{\widetilde{x}}^{(\nu)}, \qquad u_{\widetilde{z}}^{(\nu-1)} = u_{\widetilde{z}}^{(\nu)}, \\ t_{\widetilde{z}\,\widetilde{x}}^{(\nu-1)} = t_{\widetilde{z}\,\widetilde{x}}^{(\nu)}, \qquad t_{\widetilde{z}\,\widetilde{z}}^{(\nu-1)} = t_{\widetilde{z}\,\widetilde{z}}^{(\nu)}, \\ \left(\widetilde{z} = \widetilde{H}_{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n\right). \end{gathered} \tag{1.7}$$

Предполагая, что в начальный момент включения воздействия ($t = 0$) среда находилась в покое, требуется определить поле смещений во всех слоях (и полупространствах) среды так, чтобы в каждом слое удовлетворялось (свое) уравнение движения, и на границах раздела среды выполнялись условия контакта (1.7), а кроме того – в момент времени $t = 0$ во всех точках среды выполнялись начальные данные

$$\vec{u}\big|_{t=0} = \dot{\vec{u}}\big|_{t=0} = 0. \tag{1.8}$$

Такая задача корректна и она имеет единственное решение.

1. Хорошо известно, что в настоящее время поставленная задача решается элементарным образом при помощи интегральных преобразований типа Фурье. Напротив того в области изучения построенного решения с целью извлечения из него количественных сведений о свойствах, возбуждаемых в средах волновых полей, получено еще не очень много результатов. (Особенно таких, которые для надежных расчетов не требовали бы компьютеров высокого класса, как, например, метод Фукса–Миллера.)

Целью настоящего исследования является разработка методов количественной оценки волновых полей поставленных задач. Поэтому представляется оправданным не задерживаться на технике математического построения решений, а привести только общую ее схему. Это должно дать достаточно полное представление о математической конструкции точного решения задачи и о причинах его значительной громоздкости. При этом достаточно сразу исходить из представления решений в форме метода Лэмба и только стараться показать, как и почему в спектральных интегралах таких представлений получаются столь громоздкие подинтегральные выражения.

2. В случае однородных изотропных плоских волновых полей удобно пользоваться продольным $\varphi = \varphi(x, z, t)$ и поперечным $\vec{\psi} = \psi(x, z, t)\vec{j}$ потенциалами. В каждом блоке среды они удовлетворяют своим волновым уравнениям

$$\Delta\varphi - \frac{1}{v_p^2}\ddot{\varphi} = 0, \quad \Delta\psi - \frac{1}{v_s^2}\ddot{\psi} = 0, \tag{1.9}$$

а составляющие векторов смещений и напряжений выражаются через потенциалы формулами

$$u_{\tilde{x}} = \frac{\partial\varphi}{\partial\,\tilde{x}} - \frac{\partial\psi}{\partial\,\tilde{z}}, \quad u_{\tilde{z}} = \frac{\partial\varphi}{\partial\,\tilde{z}} + \frac{\partial\psi}{\partial\,\tilde{x}},$$

$$t_{\tilde{z}\,\tilde{x}} = \mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial\,\tilde{x}\,\partial\,\tilde{z}} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\,\tilde{x}^{\,2}} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\,\tilde{z}^{\,2}}\right], \tag{1.10}$$

$$t_{\tilde{z}\,\tilde{z}} = \lambda\frac{\partial^2\varphi}{\partial\,\tilde{x}^{\,2}} + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\,\tilde{z}^{\,2}} + 2\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial\,\tilde{x}\,\partial\,\tilde{z}}.$$

В задаче для нашей “двухслойной” среды потенциалы поля смещений в слоях среды строятся в форме интегралов Фурье вида

$$\left.\begin{matrix}\varphi_\nu\\ \psi_\nu\end{matrix}\right\} = \mathrm{Re}\,\frac{v_{sl}}{\pi h^2}\int\limits_0^\infty \left.\begin{matrix}\Phi_\nu(x,z,k)\\ \Psi_\nu(x,z,k)\end{matrix}\right\} F\left(i\frac{v_{sl}}{h}\varkappa\right) k e^{ii\tau}\,dk, \tag{1.11}$$

$$\left.\begin{matrix}\Phi_\nu\\ \Psi_\nu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{matrix} X_\nu^+\, e^{k(z-H_{\nu-1})\alpha_\nu} + X_\nu^-\, e^{-k(z-H_{\nu-1})\alpha_\nu} \\ i\left[Y_\nu^+\, e^{k(z-H_{\nu-1})\beta_\nu} + Y_\nu^-\, e^{-k(z-H_{\nu-1})\beta_\nu}\right]\end{matrix}\right\} e^{-ikx\zeta}\,d\zeta$$

(при индексах $1 \leqslant \nu \leqslant n+1$), где, равно как и далее, используются обозначения

$$\alpha_\nu = \sqrt{\zeta^2-\gamma_\nu^2}, \quad \beta_\nu = \sqrt{\zeta^2-\delta_\nu^2}, \quad g_\nu = 2\zeta^2-\delta_\nu^2, \quad (\nu = 1,\dots,n+1),$$

$$\gamma_\nu = \frac{v_{sl}}{v_{p\nu}}, \quad \delta_\nu = \frac{v_{sl}}{v_{s\nu}}, \quad k = \frac{\omega h}{v_{sl}}, \quad h = \tilde{h}_1, \tag{1.12}$$

$$\tau = \frac{v_{sl}}{h}t, \quad x = \frac{\tilde{x}}{h}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{h}, \quad H_0 = \frac{\tilde{H}_0}{h}, \quad h_\nu = \frac{\tilde{h}_\nu}{h}.$$

Здесь вместо физических переменных t, $\tilde{x}$, $\tilde{z}$, $\tilde{h}_\nu$, $\tilde{H}_0$ введены безразмерные переменные τ, x, z, h_ν и H_0, $\nu = 1,2,\dots,n$). При этом безразмерные частотным параметром оказывается величина

$$k = \omega\frac{h}{v_{sl}}, \tag{1.13}$$

а уравнения движения (1.9) в безразмерных переменных записываются в виде

$$\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial z^2} = \gamma_\nu^2\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial\tau^2}, \quad \frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial z^2} = \delta_\nu^2\frac{\partial^2\psi_\nu}{\partial\tau^2}. \tag{1.14}$$

Что же касается пути интегрирования λ в (1.11), то в качестве его можно брать бесконечную прямую

$$\zeta = ke^{i\chi_0}, \quad (-\infty < k < \infty), \tag{1.15}$$

где $0 < \chi_0$ – достаточно мало. При этом от точек ветвления $\zeta = \pm\gamma_\nu$ и $\zeta = \pm\delta_\nu$ радикалов α_ν и β_ν из (1.12) следует проводить разрезы на бесконечность вдоль вещественной оси плоскости (ζ) без пересечения мнимой оси. А ветви радикалов на основном листе плоскости (ζ) – определять условиями

$$\arg\alpha_\nu = \arg\beta_\nu = \frac{\pi}{2} \text{ при } \zeta = 0. \tag{1.16}$$

Заметим, что слагаемые

$$\left.\begin{matrix}\widetilde{\varphi}_\nu \\ \widetilde{\psi}_\nu\end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} X_\nu^+ \, e^{k(z-H_{\nu-1})\alpha_\nu} + X_\nu^- \, e^{-k(z-H_{\nu-1})\alpha_\nu} \\ i\left[Y_\nu^+ \, e^{k(z-H_{\nu-1})\beta_\nu} + Y_\nu^- \, e^{-k(z-H_{\nu-1})\beta_\nu}\right]\end{matrix}\right\} e^{-ikx\zeta+ik\tau} \tag{1.17}$$

в подинтегральных функциях повторных интегралов из (1.11) выбраны из расчета, чтобы входящие в них элементарные плоские волны (с амплитудами $X^\pm$ и $Y^\pm$) удовлетворяли безразмерным волновым уравнениям (1.14). А кроме того, чтобы выражения со знаком $(-)$ (со знаком $(+)$, при переменной z соответствовали волнам, распространяюмимся в сторону возрастающих (убывающих) значений переменной z. Это, очевидно, соответствует двум типам волн, формирующихся в каждом из слоев пачки.

Наконец, функциональные коэффициенты $X^\pm$ и $Y^\pm$ из (1.11) или (1.17) должны выбираться из условия удовлетворения потенциалами (1.11) (или потенциалами из (1.17)) соотношения жесткости контакта блоков среды на всех ее границах раздела $z = H_\nu$, $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$.*)

3. Чтобы вывести уравнения для функциональных коэффициентов $X^\pm$ и $Y^\pm$ достаточно рассматривать вспомогательные потенциалы $\widetilde{\varphi}_\nu$, $\widetilde{\psi}_\nu$ и $\widetilde{\varphi}_{\nu+1}$, $\widetilde{\psi}_{\nu+1}$ из (1.17), отвечающие соседним слоям с индексами ν и $\nu+1$, граничащими вдоль плоскости

$$z = H_\nu \equiv H_{\nu-1} + h_\nu, \quad (h \leqslant \nu \leqslant n). \tag{1.18}$$

*)Здесь уместно напомнить известный из теории Лэмба факт, что при удовлетворении условиям контакта (1.7) построенное решение (1.11) задачи оказывается автоматически удовлетворяющим нулевым начальным данным (1.8).

Вычисляя по потенциалам $\widetilde{\varphi}_\nu$, $\widetilde{\psi}_\nu$ из (1.17) составляющие полей смещений и напряжений из (1.10), входящие в граничные условия (1.7), на границе раздела $z = H_\nu$ из (1.18) двух смежных слоев ν и $\nu+1$, очевидно будем иметь

$$\begin{gathered}
\zeta\left[X_\nu^+ e^{a_\nu} + X_\nu^- e^{-a_\nu}\right] + \beta_\nu\left[Y_\nu^+ e^{b_\nu} - Y_\nu^- e^{-b_\nu}\right] = \\
= \zeta\left[X_{\nu+1}^+ + X_{\nu+1}^-\right] + \beta_{\nu+1}\left[Y_{\nu+1}^+ - Y_{\nu+1}^-\right], \\
\alpha_\nu\left[X_\nu^+ e^{a_\nu} - X_\nu^- e^{-a_\nu}\right] + \zeta\left[Y_\nu^+ e^{b_\nu} + Y_\nu^+ e^{-b_\nu}\right] = \\
= \alpha_{\nu+1}\left[X_{\nu+1}^+ - X_{\nu+1}^-\right] + \zeta\left[Y_{\nu+1}^+ + Y_{\nu+1}^+\right], \\
\mu_\nu\left[2\zeta\alpha_\nu\left(X_\nu^+ e^{a_\nu} - X_\nu^- e^{-a_\nu}\right) + g_\nu\left(Y_\nu^+ e^{b_\nu} + Y_\nu^+ e^{-b_\nu}\right)\right] = \\
= \mu_{\nu+1}\left[2\zeta\alpha_{\nu+1}\left(X_{\nu+1}^+ - X_{\nu+1}^-\right) + g_{\nu+1}\left(Y_{\nu+1}^+ + Y_{\nu+1}^-\right)\right], \\
\mu_\nu\left[g_\nu\left(X_\nu^+ e^{a_\nu} + X_\nu^- e^{-a_\nu}\right) + 2\zeta\beta_\nu\left(Y_\nu^+ e^{b_\nu} - Y_\nu^- e^{-b_\nu}\right)\right] = \\
= \mu_{\nu+1}\left[g_{\nu+1}\left(X_{\nu+1}^+ + X_{\nu+1}^-\right) + 2\zeta\beta_\nu\left(Y_{\nu+1}^+ - Y_{\nu+1}^-\right)\right],
\end{gathered} \tag{1.19}$$

где ради краткости записей, обозначено

$$a_\nu = k\alpha_\nu h_\nu, \quad b_\nu = k\beta_\nu h_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \tag{1.20}$$

Соотношения (1.19) должны выполняться на всех границах из (1.18) раздела слоев пачки. Однако в случае $\nu = n$ (т.е. на границе $z = H_n$ раздела пачки с подстилающим полупространством $z > H_n$) в них следует полагать

$$X_{n+1}^+ = Y_{n+1}^+ = 0, \tag{1.21}$$

что выражает факт отсутствия волн, подходящих к пачке из подстилающего полупространства $z > H_n$.

Подобным же образом в случае “двухслойной” модели к соотношениям (1.19) должно быть добавлено условие

$$\begin{gathered}
\mu_1\left[-2\zeta\alpha_1 X_1^- + g_1 Y_1^- + 2\zeta\alpha_1 X_1^+ + g_1 Y_1^+\right] = 0, \\
\mu_1\left[g_1 X_1^- - 2\zeta\beta_1 Y_1^- + g_1 X_1^+ + 2\zeta\beta_1 Y_1^+\right] = \frac{-h^2}{k^2}
\end{gathered} \tag{1.22}$$

на внешней покрывающей границе $z = H_0$, учитывающее факт приложения к границе $z = H_0$ воздействие (1.3) в момоент $t = 0$.

В случае "трехслойной" модели среды, в которой в процессе распространения волн участвует еще покрывающее полупространство $z < H_0$ (с индексом $\nu = 0$), следует ввести в рассмотрение дополнительные потенциалы φ_0 и ψ_0 поля смещений в среде $\nu = 0$ с параметрами из (1.5). Такие потенциалы допускают прежнее же представление формулами (1.11), если только в них положить

$$H_{-1} = H_0. \tag{1.23}$$

Заметим, что источник (1.5), (1.4), включенный в точке $x = z = 0$ среды $\nu = 0$ в момент $t = 0$, порождает, во-первых, волны, уходящие вглубь ($z < 0$) среды, которые здесь не представляют интереса, и, во-вторых, волны, определяемые потенциалами φ_0^-, ψ_0^-, распространяющиеся к границе $z = H_0$ (к кровле) пачки тонких слоев. Здесь они воздействуют на пачку, возбуждая в ней интерференционные процессы, а также отражаются в среду $\nu = 0$ в форме волн, описываемых некоторыми потенциалами φ_0^+, ψ_0^+. Волновые поля, характеризуемые потенциалами φ_0^-, ψ_0^-, φ_0^+, ψ_0^+, допускают представление прежними формулами (1.11), если в них полагать $\nu = 0$ и $H_{-1} = H_0$. При этом, определяемые ими поля смещений и напряжений должны удовлетворять соотношениям (1.7). Последние же, как нетрудно видеть, принимают форму соотношений (1.19), если только в них положить $\nu = 0$, $a_0 = b_0 = 0$, а величинам X_0^- и Y_0^- придать значения, соответствующие источнику 0 из (1.6), (1.4), прикладываемому при $t = 0$ в точке $x = z = 0$.

Резюмируя изложенное, следует выписать окончательные аналитические представления решений рассматриваемых задач в форме потенциалов φ и ψ метода Лэмба. Представляется целесообразным привести их сначала для случая пачек, содержащих лишь один тонкий слой. Затем же – сформулировать алгоритм, позволяющий выписывать "выражение для потенциалов" в случае пачек, содержащих любое заданное число n-тонких слоев. Однако, вследствие естественной громоздкости результирующих выражений, здесь приходится прибегать к некоторой символике в записях встречающихся матриц и систем алгебраических уравнений.

4. Введем в рассмотрение четырехрядные матрицы-столбцы

$$
\begin{aligned}
&T^{+}_{\nu 1}=\begin{pmatrix}\zeta\\ \alpha_\nu\\ 2\mu_\nu\zeta\alpha_\nu\\ \mu_\nu\, g_\nu\end{pmatrix}, \qquad T^{+}_{\nu 2}=\begin{pmatrix}\beta_\nu\\ \zeta\\ \mu_\nu g_\nu\\ 2\mu_\nu\zeta\beta_\nu\end{pmatrix},\\
&T^{-}_{\nu 1}=\begin{pmatrix}\zeta\\ -\alpha_\nu\\ -2\mu_\nu\zeta\alpha_\nu\\ \mu_\nu\, g_\nu\end{pmatrix}, \qquad T^{-}_{\nu 2}=\begin{pmatrix}-\beta_\nu\\ \zeta\\ \mu_\nu g_\nu\\ -2\mu_\nu\zeta\beta_\nu\end{pmatrix}, \quad (\nu\geqslant 0),
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

а также матрицы-столбцы

$$
\begin{aligned}
\widetilde{T}^{-}_{01}&=T^{-}_{01}\,e^{-a_\nu}, \qquad \widetilde{T}^{-}_{02}=T^{-}_{02}\,e^{-b_\nu},\\
\widetilde{T}^{+}_{01}&=T^{+}_{01}\,e^{a_\nu}, \qquad \widetilde{T}^{+}_{02}=T^{+}_{02}\,e^{b_\nu},
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

получаемые из (1.24) умножением на соответственные экспоненциальные множители с показателями $\pm a_\nu$ и $\pm b_\nu$ из (1.20). И, наконец, введем матрицы-столбцы 0, состоящие из 4-х нулей. А под расположением символов таких матриц в форме некоторой прямоугольной таблицы будем понимать соответственные прямоугольные матрицы более высоких порядков.

Применение указанных вспомогательных матриц позволяет в компактной форме записывать системы уравнений для функциональных коэффициентов из (1.11), а также – выписывать дисперсионные уравнения для рассматриваемых слоистых сред.

Так, например, из п. 3 следует, что в случае "трехслойной" среды (состоящей из одного тонкого слоя, контактирующего с двумя полупространствами) упомянутая система уравнений имеет вид

$$
\left\{\begin{matrix}
-T^{+}_{01} & -T^{+}_{02} & T^{-}_{11} & T^{-}_{12} & T^{+}_{11} & T^{+}_{12} & 0 & 0\\
0 & 0 & T^{+}_{01} & \widetilde{T}^{-}_{11} & \widetilde{T}^{-}_{12} & \widetilde{T}^{+}_{11} & \widetilde{T}^{+}_{12} & -T^{-}_{21} & -T^{-}_{22}
\end{matrix}\right\}\times
$$

$$
\times(X)=(b), \tag{1.26}
$$

где использованы соответствующие матрицы из (1.24) и (1.25) при индексах $\nu=0,1$ и 2, а (X) и (b) обозначают матрицы-столбцы

$$
\begin{aligned}
(X)&=\left(X^{+}_0,Y^{+}_0,X^{-}_1,Y^{-}_1,X^{+}_1,Y^{+}_1,X^{-}_2,Y^{-}_2\right)^{+},\\
(b)&=\left(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8\right)^{+},
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

записанные в форме транспонированных матриц-строк. При этом в случае нормального воздействия из (1.5), (1.4) величины b_k матрицы (b) из (1.26), (1.27) имеют значения

$$b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = 0,$$

$$\begin{gathered}
b_1 = \zeta X_0^- - \beta_0 Y^-_{,} \qquad\qquad b_2 = -\alpha_0 X_0^- + \zeta Y_0^-, \\
b_3 = -\mu_0 \left[2\zeta\alpha_0 X_0^- - g_0 Y_0^- \right], \; b_4 = -\mu_0 \left[g_0 X_0^- - 2\zeta\beta_0 Y_0^- \right], \\
\left.\begin{matrix} X_0^- \\ Y_0^- \end{matrix}\right\} = \frac{-h^2}{2\mu_0\delta_0^2 k^2 \beta_0} \left\{ \begin{matrix} \beta_0 \, e^{-kH_0\alpha_0} \\ \zeta \, e^{-kH_0\alpha_0}. \end{matrix} \right.
\end{gathered} \tag{1.28}$$

В случае же источника типа центра давления из (1.6), (1.4) (приложенного внутри тонкого слоя $\nu = 1$) оказывается

$$\begin{gathered}
b_1 = A\zeta, \;\; b_2 = \alpha_1 A, \quad b_3 = 2\mu\zeta\alpha_1 A, \quad b_4 = -\mu_1 g_1 A, \\
b_5 = A\zeta, \;\; b_6 = -\alpha_1 A, \;\; b_7 = -2\mu\zeta\alpha_1 A, \;\; b_4 = \mu_1 g_1 A,
\end{gathered} \tag{1.29}$$

$$A = \frac{\gamma_1^2 h}{2\mu_1 k\alpha_1(\zeta)} \exp\left[-\frac{k}{2}\alpha_1(\zeta) \right].$$

При этом дисперсионное уравнение системы уравнений (1.26) может быть записано в виде

$$\Delta_3(\zeta, k) = 0, \tag{1.30}$$

где

$$\Delta_3 =$$
$$= \begin{vmatrix} -T_{01}^+ & -T_{02}^+ & T_{11}^- & T_{12}^- & T_{11}^+ & T_{12}^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{01}^+ & \widetilde{T}_{11}^- & \widetilde{T}_{12}^- & \widetilde{T}_{11}^+ & \widetilde{T}_{12}^+ & -T_{21}^- & -T_{22}^- \end{vmatrix} \tag{1.30$'$}$$

является определителем матрицы (8×8) из левой части системы уравнений (1.26), явное выражение которой нетрудно выписать с использованием обозначений из (1.24) и (1.25). Оно приведено в статье [1] под номером (1.40).

В случае же пачки из двух тонких слоев, в соответствии с п. 3, следует учесть слагаемые

$$-T^+21\, X_2^+ - T_{22}^+\, Y_2^+,$$

а также – добавить еще (четыре) уравнения, учитывающие условия контакта на последней границе $z = H_2 = H_1 + h_2$ пачки. В результате, вместо системы уравнений (1.26), получается система

$$\left\{\begin{matrix} -T_{01}^{+} & -T_{02}^{+} & \begin{bmatrix} T_1 \\ \widetilde{T}_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ -T_{21}^{-} \\ \widetilde{T}_{21}^{-} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -T_{22}^{-} \\ \widetilde{T}_{22}^{-} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -T_{21}^{+} \\ \widetilde{T}_{21}^{+} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -T_{22}^{+} \\ \widetilde{T}_{22}^{+} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -T_{31}^{-} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ -T_{32}^{-} \end{matrix} \\ 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & \end{matrix}\right\}\times$$

$$\times(X) = (b), \tag{1.31}$$

в которой у матриц-столбцов из (1.27) добавлены (справа) по 4 элемента соответственно X_2^+, Y_2^+, X_3^-, Y_3^- и 0, 0, 0, 0, а символ – “вставка” – из “третьего столбца” означает при индексе $\nu = 1$ четырех-столбцовую и двенадцатирядную матрицу

$$\begin{bmatrix} T_\nu \\ \widetilde{T}_\nu \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_{\nu 1}^{-} & T_{\nu 2}^{-} & T_{\nu 1}^{+} & T_{\nu 2}^{+} \\ \widetilde{T}_{\nu 1}^{-} & \widetilde{T}_{\nu 2}^{-} & \widetilde{T}_{\nu 1}^{+} & \widetilde{T}_{\nu 2}^{+} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.32}$$

вставляемую в указанное место матрицы из левой части (1.31). Подобным же образом для трехслойной пачки получается уравнение

$$\left\{\begin{matrix} -T_{01}^{+} & -T_{02}^{+} & \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ \widetilde{T}_1 & -T_2 & 0 \\ 0 & \widetilde{T}_2 & -T_3 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -T_{41}^{-} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -T_{42}^{-} \end{matrix} \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{matrix}\right\}\times(X) = (b), \tag{1.33}$$

вставной элемент которого легко расшифровывается на основании (1.32). Он представляет собой прямоугольную матрицу из шестнадцати строк и двенадцати столбцов.

5. Остается выписать подобным же образом системы уравнений для функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm$, $Y_\nu^\pm$ из (1.11) в случае нашей “двухслойной” модели. Здесь, кроме вспомогательных матриц-столбцов из (1.24) и (1.25), приходится еще вводить в рассмотрение матрицы-столбцы, состоящие из двух элементов

$$h_{\nu 1}^{-} = \begin{pmatrix} -2\mu_\nu \alpha_\nu \\ \mu_\nu g_\nu \end{pmatrix}, \quad h_{\nu 2}^{-} = \begin{pmatrix} \mu_\nu g_\nu \\ -2\mu_\nu \zeta \beta_\nu \end{pmatrix},$$

$$h_{\nu 1}^{+} = \begin{pmatrix} 2\mu_\nu \alpha_\nu \\ \mu_\nu g_\nu \end{pmatrix}, \quad h_{\nu 2}^{+} = \begin{pmatrix} \mu_\nu g_\nu \\ 2\mu_\nu \zeta \beta_\nu \end{pmatrix},$$

$$g_{\nu 1}^{-} = \begin{pmatrix} \zeta \\ -\alpha_\nu \end{pmatrix}, \quad g_{\nu 2}^{-} = \begin{pmatrix} -\beta_\nu \\ \zeta \end{pmatrix},$$

$$g_{\nu 1}^{+} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \alpha_\nu \end{pmatrix}, \quad g_{\nu 1}^{+} = \begin{pmatrix} \beta_\nu \\ -\zeta \end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

Учитывая соотношения (1.22) (выражающие граничные условия (1.3) и (1.4) на свободной поверхности $z = H_1$ пачки), а также – соотношение (1.19) при $\nu = 1$ на границе $z = H_1$ в случае однослойной пачки для функциональных коэффициентов $X_\nu^{\pm}$, $Y_\nu^{\pm}$ из (1.11), будем иметь следующую систему уравнений

$$\left\{ \begin{matrix} h_{11}^{-} & h_{12}^{-} & h_{11}^{+} & h_{12}^{+} & \circ & \circ \\ \widetilde{T}_{11}^{-} & \widetilde{T}_{12}^{-} & \widetilde{T}_{11}^{+} & \widetilde{T}_{12}^{+} & -T_{21}^{-} & -T_{21}^{-} \end{matrix} \right\} \times (X) = (\,\widetilde{b}\,). \tag{1.35}$$

Здесь (X) и (b) – шестирядные матрицы-столбцы

$$\begin{gathered} (X) = \left(X_1^{-}, Y_1^{-}, X_1^{+}, Y_1^{+}, X_2^{-}, Y_2^{-}\right)^{+}, \\ (b) = \left(0, -\frac{h^2}{k^2}, 0, 0, 0, 0\right)^{+}. \end{gathered} \tag{1.36}$$

Символы $\circ$ обозначают двухрядные матрицы-столбцы, состоящие из нулей, а матрицы-столбцы $T_{\nu k}^{\pm}$ и $\widetilde{T}_{\nu k}^{\pm}$ определены выражениями (1.24) и (1.25). Дисперсионное уравнение записывается в виде

$$\Delta_2(\zeta, k) = 0, \tag{1.37}$$

где

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} h_{11}^{-} & h_{12}^{-} & h_{11}^{+} & h_{12}^{+} & 0 & 0 \\ \widetilde{T}_{11}^{-} & \widetilde{T}_{12}^{-} & \widetilde{T}_{11}^{+} & \widetilde{T}_{12}^{+} & -T_{21}^{-} & -T_{21}^{-} \end{vmatrix}$$

является шестирядной матрицей, явное выражение которой приведено в (1.18) из [1].

Подобным же образом, например, для пачки из двух тонких слоев получаем систему уравнений

$$\left\{ \begin{matrix} h_{11}^{-} & h_{12}^{-} & h_{11}^{+} & h_{12}^{+} & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \widetilde{T}_{11}^{-} & \widetilde{T}_{12}^{-} & \widetilde{T}_{11}^{+} & \widetilde{T}_{12}^{+} & -T_{21}^{-} & -T_{21}^{-} & -T_{21}^{+} & -T_{22}^{+} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \widetilde{T}_{21}^{-} & \widetilde{T}_{22}^{-} & \widetilde{T}_{21}^{+} & \widetilde{T}_{22}^{+} & -T_{31}^{-} & -T_{32}^{-} \end{matrix} \right\}$$

$$\times (X) = (\,\widetilde{b}\,)$$

и т.д. Представляется, что на основании изложенного уже ясна конструкция матрицы в системе алгебраических уравнений для функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm$, $Y_\nu^\pm$ из (1.11) в случае произвольной пачки n-тонких слоев (см. п. 4).

В дополнении к изложенному заметим, что при обращении к количественным оценкам потенциалов из (1.11) (или составляющих полей смещений, отвечающих таким потенциалам) матрицы рассматриваемых систем уравнений полезно (ради наглядности) выписывать один раз в явном виде. При этом, так как мы условились, сначала количественно изучать поля, отвечающие пачкам, содержащим лишь один тонкий слой, то следовало бы привести выражения матриц систем уравнений (1.26) и (1.35). Однако этого можно не делать здесь, так как такие матрицы приведены в работе [1], помещенной в этом же томе журнала.

6. В заключение параграфа уместно привести окончательные аналитические представления для полей, которые предполагается подвергнуть далее количественным исследованиям. При этом вместо потенциалов полей вида (1.11), естественно изучать составляющие полей смещения

$$u_x = u_{xp} + u_{xs}, \quad u_z = u_{zp} + u_{zs}, \tag{1.38}$$

представляемые суммами слагаемых, отвечающих соответственно продольному φ и поперечному ψ потенциалам. А чтобы не загромождать исследование обилием материала (непринципиального характера с методической точки зрения) естественно ограничиться рассмотрением (на первых порах) точек наблюдения $x > 0$, расположенных, например, на некоторых из профилей:

1) $z = 0$ – в отраженных интерференционных волнах в случае “трехслойной” среды, и

2) $z = H_0 + H_2 + h$ или $z = h + H_2$ – в интерференционных волнах, прошедших через тонкий слой в полупространство $\nu = 2$ в случаях “трех”- и “двухслойных” сред.

Указанные поля в случаях плоских внешних воздействий представляются отрезками интеграла Фурье

$$\left.\begin{matrix} u_x \\ u_z \end{matrix}\right\} = \operatorname{Re} \frac{v_{s1}}{\pi h^2} \int\limits_0^{k_0} \left.\begin{matrix} U(x,k) \\ W(x,k) \end{matrix}\right\} F\left(i \frac{v_{s1}}{h}\, k\right) k^2\, e^{ik\tau}\, dk, \tag{1.39}$$

подинтегральные функции которого определяются перечисляемыми здесь контурными интегралами, распространенными по пути интегрирования λ, такому же, как и в представлениях (1.11). При этом при рассмотрении низкочастнотных воздействий на среду верхний предел интегрирования в (1.39) заменяется на число k_0 из рабочей частотной полосы (2.29).

В областях отраженных в среду $\nu = 0$ волн оказывается

$$\left.\begin{matrix} U \\ W \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} U_p \\ W_p \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda)} \begin{pmatrix} \zeta \\ i\alpha_0 \end{pmatrix} X_0^+ \, e^{-k\psi(\zeta,x)\,d\zeta}, \qquad (1.40)$$
$$\psi = \begin{cases} \psi_{pp} = ix\zeta + 2H_0\alpha_0, & (P_0P_0) \\ \psi_{sp} = ix\zeta + H_0\beta_0 + H_0\alpha_0, & (S_0P_0) \end{cases}$$

в случае падающей P или S-волны и отраженной P-волны. И выражениями

$$\left.\begin{matrix} U \\ W \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} U_s \\ W_s \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda)} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ i\zeta \end{pmatrix} Y_0^+ \, e^{-k\psi(\zeta,x)\,d\zeta}, \qquad (1.41)$$
$$\psi = \begin{cases} \psi_{ps} = ix\zeta + H_0\alpha_0 + H_0\beta_0, & (P_0P_0) \\ \psi_{ss} = ix\zeta + 2H_0\beta_0, & (S_0S_0) \end{cases}$$

в случае падающей P или S-волны и отраженной S-волны.

В областях прошедших в среду $\nu = 2$ интерференционных волн выражение (1.39) для внешнего интеграла Фурье сохраняется. Что же касается внутренних интегралов, то при рассмотрении "трехслойной" среды оказывается

$$\left.\begin{matrix} U \\ W \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} U_p \\ W_p \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda)} \begin{pmatrix} \zeta \\ -\,i\alpha_0 \end{pmatrix} X_0^- \, e^{-k\psi(\zeta,x)\,d\zeta}, \qquad (1.42)$$
$$\psi = \begin{cases} \psi_{pp} = ix\zeta + H_0\alpha_0 + H_2\alpha_2, & (P_0P_2), \\ \psi_{sp} = ix\zeta + H_0\beta_0 + H_2\alpha_2, & (S_0P_2), \end{cases}$$

в случае падающей P или S-волны и проходящей P-волны. И выражением

$$\left.\begin{matrix} U \\ W \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} U_s \\ W_s \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda)} \begin{pmatrix} \beta_2 \\ i\zeta \end{pmatrix} Y_2^- \, e^{-k\psi(\zeta,x)\,d\zeta},$$
$$\psi = \begin{cases} \psi_{ps} = ix\zeta + H_0\alpha_0 + H_2\beta_2, & (P_0S_2), \\ \psi_{ss} = ix\zeta + H_0\beta_0 + H_2\beta_2, & (S_0S_2), \end{cases} \tag{1.43}$$

в случае падающей P или S-волны и проходящей S-волны.

При этом здесь подразумевается, что в случае "трехслойной" среды под функциональными коэффициентами X_0^+, Y_0^+ и X_2^-, Y_2^- из (1.40)–(1.43) подразумеваются решения алгебраической системы уравнений из (1.26)–(1.28), в которой только отброшены экспоненциальные множители

$$e^{-kH_0\alpha_0} \quad \text{и} \quad e^{-kH_0\beta_0}$$

из (1.28), уже учтенные при выписывании значений фазовых функций в (1.40)–(1.43). Что же касается верхнего предела интегрирования в (1.39), то (при рассматриваемых низкочастотных полях) он заменяется на значение $k = k_0$ из (2.29).

В случае же "двухслойной" среды составляющие поля смещений в точках $x > 0$ профиля $z = H_0 + H_2 + h$ полупространства $\nu = 2$ определяются интегралами из (1.39) (с верхним пределом интегрирования $k = k_0$ из (2.29)). Спектральные функции U и W таких интегралов можно представлять прежними интегралами из (1.42) и (1.43), соответственно в случае рассмотрения волн типа P_2 и S_2, если под фазовыми функциями $\psi(\zeta, x)$ понимать, соответственно, выражения

$$\begin{aligned} \psi_p &= ix\zeta + H_2\,\alpha_2, \\ \psi_s &= ix\zeta + H_2\,\beta_2, \end{aligned} \tag{1.44}$$

а под X_2^- и Y_2^- подразумевать решение системы уравнений из (1.35) и (1.36).

Наконец, при оценке интерференционного поля в тонком слое $\nu = 1$ "двухслойной" среды следует пользоваться представлением (1.39), спектральные функции U и W которого даются интегралами

$$\left.\begin{array}{l} U \\ W \end{array}\right\} = \frac{k}{2\pi i} \int\limits_{(\lambda)} \left.\begin{array}{c} \left[\zeta\left(X_1^+ e_1^+ + X_1^- e_1^-\right) + \beta\left(Y_1^+ e_1^+ - Y_1^- e_1^-\right)\right] \\ -i\left[\alpha_1\left(X_1^+ e_1^+ - X_1^- e_1^-\right) + \zeta\left(Y_1^+ e_1^+ + Y_1^- e_1^-\right)\right] \end{array}\right\} \times$$
$$\times e^{-ikx\zeta}\, d\zeta, \tag{1.45}$$

где, ради сокращения записи, положено

$$e_1^{\pm} = e^{\pm k\alpha_1 z}, \quad e_2^{\pm} = e^{\pm k\beta_1 z}.$$

При этом функциональные коэффициенты $X_1^{\pm}$ и $Y_1^{\pm}$ определяются также из системы уравнений (1.35) и (1.36).

§2. Замечания о путях количественной оценки волновых полей

Приведенные в конце §1 представления для составляющих вектора смещений волновых полей относятся к случаю однослойной пачки. Однако из изложенного очевидно, что в точности такие же представления имеют место в случае произвольной пачки из n-тонких слоев, если только в формулах (1.40)–(1.44) вместо индекса “2” поставить индекс $(n+1)$, а под функциональными коэффициентами X_0^+, Y_0^+, X_{n+1}^- и Y_{n+1}^- подразумевать решения систем алгебраических уравнений для случая n-слойной пачки, конструкция которых обсуждалась в п. 4 и 5 §1. Поэтому имеет смысл задержаться здесь на общих вопросах, относящихся к случаям любых тонкослоистых пачек, причем обсуждение вести на основе приведенных формул.

1. Характерной особенностью спектральных (внутренних) интегралов наших полей (придающей формулам алгоритмический характер) является то обстоятельство, что в них входят функциональные коэффициенты из (1.45), еще не выраженные явными аналитическими формулами, а определенные только как решения заданных систем алгебраических уравнений (уравнения (1.26) и (1.33)). Этим сохраняется возможность дальнейшего определения таких коэффициентов в том или ином случае наиболее удобным способом, что существенно при численных оценках полей. Для теоретического же установления общих свойств функций из

(1.45), входящих под знак интегрирования в спектральных интегралах, достаточно воспользоваться теоремой Крамера, указывающй, что неизвестные функции из (1.27) и (1.31) допускают представления в виде отношения определителей

$$X = \frac{D(\zeta, k)}{\Delta_p(\zeta, k)}, \tag{2.1}$$

в знаменатель которого входит детерминант системы уравнений (1.26) или (1.37). Этот детерминант, как раз, и является левой частью дисперсионного уравнения

$$\Delta_p(\zeta, k) = 0, \quad (p = 2 \ \text{ и } \ 3) \tag{2.2}$$

рассматриваемой задачи.

На основании его структуры удается судить об общих свойствах функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$: об их симметрии на плоскости комплексной переменной ζ, об их точках ветвления и, самое важное, об их полюсах (вообще говоря, первого порядка) в корнях уравнения (2.2). При этом выясняется, что точками ветвления "функций X" оказываются лишь точки ветвления радикалов α_0, β_0 и α_{n+1}, β_{n+1} полупространств $\nu = 0$ и $\nu = n+1$), окаймляющих сверху и снизу пачку тонких слоев в задачах для "трехслойных" сред, и – точки ветвления радикалов α_{n+1} и β_{n+1} подстилающего полупространства ($\nu = n+1$) в задачах для "двухслойных" сред.

Что же касается полюсов функций $X_\nu^\pm$, $Y_\nu^\pm$, совпадающих с корнями $\zeta = \zeta_n(k)$ дисперсионного уравнения задачи, то они играют фундаментальную роль в процессе оценивания волновых полей интерференционного типа. По этим корням определяются так называемые интерференционные моды различной физической природы, распространяющиеся, например, вдоль слоев среды с соответствующими им фазовой и групповой скоростями и с присущим им затуханием. В рассматриваемых представлениях (1.39), (1.40)–(1.45) волновых полей моды выделяются из суммарного поля в отдельные слагаемые, как полагается обычно – в "поверхностные волны" результате пересечения путем интегрирования λ в спектральных интегралах корней дисперсионного уравнений. При этом такие пересечения происходят в результате (целевой) деформации пути интегрирования λ в такие (новые) контуры λ_0 (зависящие от точек наблюдения поля), при движении вдоль которых подинтегральная функция спектрального интеграла осциллирует наиболее слабо.

Таким образом, реализация основной идеи применения методов контурного интегрирования с целью существенного упрощения численной оценки спектральных интегралов, оказывается тесно связанной с корнями $\zeta = \zeta_n(k)$ дисперсионного уравнения (2.2) и с расположением (и перемещением) их по комплексной плоскости (ζ). Поэтому проблема корней дисперсионного уравнения является одной из основных вспомогательных проблем, на которых базируется количественное изучение интерференционных волновых полей обсуждаемого типа.

2. Проблема корней дисперсионного уравнения играет важную роль в задачах на количественную оценку интерференционных волновых полей. Поэтому ей уделяется серьезное внимание как в [1], так и в нижеследующем. Однако в [1] имеется в виду случай пачки, состоящей из одного лишь тонкого слоя. Поэтому естественны вопросы о том, в какой мере применяемые методы изучения корней допускают обобщения на случаи многослойных пачек. Ответ на один из подобных вопросов удобно дать уже сейчас.

Как следует из п. 4 и 5 §1, левые части дисперсионных уравнений вида (2.2) в случае любых пачек слоев являются функциями, регулярными по обеим их переменным k и ζ. При этом на плоскости (ζ) они имеют особенности лишь в точках ветвления $\zeta = \gamma_0$, $\zeta = \delta_0$, $\zeta = \gamma_{n+1}$, $\zeta = \delta_{n+1}$ радикалов

$$\alpha_0(\zeta), \quad \beta_0(\zeta), \quad \alpha_{n+1}(\zeta), \quad \beta_{n+1}(\zeta) \tag{2.3}$$

из (1.12), отвечающих полупространствам $\nu = 0$ и $\nu = n+1$, окаймляющим пачку.

При поиске корней дисперсионного уравнения (2.2) в форме функций $\zeta = \zeta_n(k)$ от параметра $k > 0$, принято разделять их на два класса, причем к первому классу относить корни $\zeta = \zeta_n(k)$, удовлетворяющие предельному условию

$$k\zeta_n(k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to 0, \tag{2.4}$$

или, что то же, условиям

$$k\alpha_\nu(\zeta) \to 0 \quad \text{при} \quad k\beta_\nu(\zeta) \to 0.$$

Такому условию удовлетворяют все особые корни уравнения (2.2), остающиеся конечными

$$|\zeta_n(k)| < \infty$$

при $k = 0$. При поиске их в дисперсионных уравнениях (2.2) допустим предельный переход $k \to 0$ во всех элементах детерминантов $\Delta_3(k,\zeta)$ и $\Delta_2(k,\zeta)$, что приводит к существенному упрощению уравнений.

Как указывалось в п. 13, 14 §4 [1], определение особых корней дисперсионных уравнений в случае однослойной пачки – достаточно трудоемкая задача. Поэтому естественно было бы ожидать, что в случаях многослойных пачек такая задача лишь усложняется. Однако оказывается, что усложнения не происходит. Уравнения для особых корней в многослойных пачках сохраняют свою структуру, причем они определяются только параметрами окаймляющих полупространств. Доказательство такого утверждения, восходящее к п. 4 и 5 §1, сводится к следующему.

3. В случае наших "трехслойных" сред левые части $\Delta_3^n(\zeta,k)$ дисперсионного уравнения (2.2) определяются детерминантами матриц из (1.26), (1.31), (1.33) и т.д., которые при $k = 0$ имеют следующую структуру

$$\Delta_3^{(n)}(\zeta,0) = \tag{2.5}$$

$$= \begin{vmatrix} -T_{01}^{+} & -T_{02}^{+} & [T_1] & [0] & \vdots & [0] & [0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [T_1] & -[T_2] & \vdots & [0] & [0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [0] & [T_2] & \vdots & [0] & [0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [0] & [0] & \vdots & [0] & [0] & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & [0] & [0] & \vdots & -[T_{n-1}] & [0] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [0] & [0] & \vdots & [T_{n-1}] & -[T_n] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [0] & [0] & \vdots & [0] & [T_n] & -T_{n+1,1}^{-} & -T_{n+1,2}^{-} \end{vmatrix}.$$

Здесь T_{01}^{+}, T_{02}^{+}, $T_{n+1,1}^{-}$, $T_{n+1,2}^{-}$ – матрицы-столбцы из (1.24), состоящие из 4-х элементов. Под $[T_\nu]$ – подразумеваются квадратные матрицы 4-го ранга вида

$$[T_\nu] = \left\{ T^-_{\nu 1} T^-_{\nu 2} T^+_{\nu 1} T^+_{\nu 2} \right\}$$

$$\text{и} \quad -[T_\nu] = \left\{ -T^-_{\nu 1} - T^-_{\nu 2} - T^+_{\nu 1} - T^+_{\nu 2} \right\}. \qquad (2.6)$$

Посредством 0 обозначены матрицы-столбцы из четырех нулей, а посредстовм [0] – квадратные матрицы 4-го ранга, состоящие из 16 нулей.

При рассмотрении определителя (2.5) напрашивается процесс его вычисления, сводящийся на 1-ом этапе к прибавлению к элементам ν-ой строки таблицы из (2.5) соответственных элементов результирующей $(\nu{+}1)$-ой строки. Он начинается с нижней строки $\nu = n$ и за $(n-1)$-шагов приводит, очевидно, к определителю вида

$$\Delta_3^{(n)} =$$

$$= \begin{vmatrix}
-T^+_{01} & -T^+_{01} & [T_1] & [0] & \vdots & [0] & [0] & 0 & 0 \\
0 & 0 & [T_1] & [0] & \vdots & [0] & [0] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\
0 & 0 & [0] & [T_2] & \vdots & [0] & [0] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\
0 & 0 & [0] & [0] & \vdots & [0] & [0] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & [0] & [0] & \vdots & [0] & [0] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\
0 & 0 & [0] & [0] & \vdots & [T_{n-1}] & [0] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\
0 & 0 & [0] & [0] & \vdots & [0] & [T_n] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2}
\end{vmatrix}.$$

В нем остается вычесть 2-ую строку из 1-ой, что приводит определитель (2.5) к следующему результирующему представлению

$$\Delta_3^{(n)} = \qquad (2.7)$$

$$= \left| \begin{array}{cccc:cccc} -T_{01}^{+} & -T_{02}^{-} & [0] & [0] & [0] & [0] & T_{n+1,1}^{-} & T_{n+1,2}^{-} \\ 0 & 0 & [T_1] & [0] & [0] & [0] & -T_{n+1,1}^{-} & -T_{n+1,2}^{-} \\ 0 & 0 & [0] & [T_2] & [0] & [0] & -T_{n+1,1}^{-} & -T_{n+1,2}^{-} \\ 0 & 0 & [0] & [0] & [0] & [0] & -T_{n+1,1}^{-} & -T_{n+1,2}^{-} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & [0] & [0] & [0] & [0] & -T_{n+1,1}^{-} & -T_{n+1,2}^{-} \\ 0 & 0 & [0] & [0] & [T_{n-1}] & [0] & -T_{n+1,1}^{-} & -T_{n+1,2}^{-} \\ 0 & 0 & [0] & [0] & [0] & [T_n] & -T_{n+1,1}^{-} & -T_{n+1,2}^{-} \end{array} \right| .$$

(К изложенному здесь следует добавить, что все упомянутые сложения и вычитания по строкам таблицы (2.5) производились фактически сразу по четырем строкам определителя порядка $4(n+1)$, который определяется таблицей из (2.5).)

Что же касается определителя из (2.7) $4(n+1)$-го порядка, то он сразу вычисляется при помощи теоремы Лапласа, если воспользоваться разложением по четырем первым его (настоящим) строкам p_1, p_2, p_3, $p_4 = 1, 2, 3, 4$.

$$\Delta_3^{(n+1)} = \\ = \sum_{q_1<q_2<q_3<q_4} (-)^{\sum(q_k+p_k)} A \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ q_1 q_2 q_3 q_4 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 5,\ 6,\ \dots, 4(n+1) \\ r_1, r_2, \dots, r_{4n} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

(см. [2]). Здесь суммирование производится по всем перестановкам $(q_1 q_2 q_3 q_4)$ из чисел

$$1, 2, 3, \dots, 4(n+1),$$

при которых миноры $A \begin{pmatrix} 1\ 2\ 3\ 4 \\ q_1 q_2 q_3 q_4 \end{pmatrix}$ отличны от нуля. Но в (2.7) таковым оказывается только один минор, отвечающий значениям

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 2, \quad q_3 = 4(n+1) - 1, \quad q_4 = 4(n+1)$$

и сводящийся к определителю

$$\Delta_3(0, n+1; \zeta) = \left| T_{01}^{+}\, T_{02}^{+}\, T_{n+1,1}^{-}\, T_{n+1,2}^{-} \right| \qquad (2.9)$$

4-го порядка, построенному из 4-х матриц-столбцов (1.24). Что же касается второго сомножителя из правой части (2.8), то он, очевидно, сводится к определителю (порядка $4n$), получаемому из определителя (2.7) путем вычеркивания из него 4-х первых "настоящих" строк, а также – 4-х столбцов – по два справа и слева. Таким образом, для определителя из (2.5) получается следующее результирующее представление

$$\Delta_3^n = \Delta_3(0, n+1; \zeta) \cdot \prod_{\nu=1}^{n} |T_\nu|. \tag{2.10}$$

Здесь $\Delta_3(0, n+1; \zeta)$ имеет значение из (2.9), а определители $|T_\nu|$ матриц из (2.6) даются явными выражениями

$$|T_\nu| = \begin{vmatrix} \zeta & -\beta_\nu & \zeta & \beta_\nu \\ -\alpha_\nu & \zeta & \alpha_\nu & \zeta \\ -2\mu_\nu\zeta\alpha_\nu & \mu_\nu g_\nu & 2\mu_\nu\zeta\alpha_\nu & \mu_\nu g_\nu \\ \mu_\nu g_\nu & -2\mu_\nu\zeta\beta_\nu & \mu_\nu g_\nu & 2\mu_\nu\zeta\beta_\nu \end{vmatrix} =$$

$$= 4\mu_\nu^2\delta_\nu^4\alpha_\nu\beta_\nu. \tag{2.11}$$

Итак, для определения особых корней дисперсионного уравнения (2.2) в случае "трехслойных" сред получается уравнение

$$\Delta_3(0, n+1; \zeta) = 0 \tag{2.12}$$

(при значении Δ_3 из (2.9)), структура которого не зависит от тонких слоев, входящих в пачку.

Что же касается множителя

$$\prod_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu\beta_\nu,$$

входящего в правую часть равенства (2.10), то он сокращается с подобным же множителем из числителей $D(\zeta, 0)$ выражений вида (2.1). Поэтому в проблеме корней дисперсионного уравнения он не играет роли.

4. Подобным же образом дело обстоит в случае "двухслойных" сред.

Введем в рассмотрение прямоугольные 2×4 матрицы

$$[g_\nu] = \{\, g_{\nu1}^-, g_{\nu2}^-, g_{\nu1}^+, g_{\nu2}^+, \,\}, \quad [h_\nu] = \{\, h_{\nu1}^-, h_{\nu2}^-, h_{\nu1}^+, h_{\nu2}^+, \,\}, \tag{2.13}$$

составленные из двухрядных матриц-столбцов из (1.34) и удовлетворяющие очевидным соотношениям

$$T^{\pm}_{\nu 1} = \left\{ \begin{matrix} g^{\pm}_{\nu 1} \\ \\ h^{\pm}_{\nu 1} \end{matrix} \right\}, \quad T^{\pm}_{\nu 2} = \left\{ \begin{matrix} g^{\pm}_{\nu 2} \\ \\ h^{\pm}_{\nu 2} \end{matrix} \right\} \tag{2.14}$$

и

$$[T_\nu] = \left\{ T^{-}_{\nu 1},\, T^{-}_{\nu 2},\, T^{+}_{\nu 1},\, T^{+}_{\nu 2}, \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} [g_\nu] \\ [h_\nu] \end{matrix} \right\}. \tag{2.15}$$

Тогда нетрудно убедиться в том, что при $k = 0$ левая часть $\Delta_2(\zeta, k)$ дисперсионного уравнения (2.2) в случае n-слойной пачки в нашей "двухслойной" среде имеет следующую структуру

$$\Delta_2(\zeta, 0) = \begin{vmatrix} [h_1] & [\circ] & \vdots & [\circ] & \circ & \circ \\ [T_1] & -[T_2] & \vdots & [0] & 0 & 0 \\ [0] & [T_2] & \vdots & [0] & 0 & 0 \\ [0] & [0] & \vdots & [0] & 0 & 0 \\ [0] & [0] & \vdots & [0] & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [0] & [0] & \vdots & [0] & 0 & 0 \\ [0] & [0] & \vdots & -[T_n] & 0 & 0 \\ [0] & [0] & \vdots & [T_n] & -T^{-}_{n+1,1} & -T^{-}_{n+1,2} \end{vmatrix}. \tag{2.16}$$

Здесь использованы такие же обозначения, как и в определителе (2.5), за исключением элементов первых двух строк матрицы порядка $(4n + 2)$. В указанных строках (т.е. в 1-ой строке таблицы из (2.16)) $[h_1]$ – обозначает прямоугольную матрицу из (2.13) (содержащую две строки), $[\circ]$ – означает подобную же прямоугольную таблицу с нулевыми элементами, а $\circ$ – обозначает матрицу-столбец из двух элементов, равных нулю.

Что же касается вычисления определителя (2.16), то первый его этап в точности совпадают с 1-ым этапом вычисления (путем сложения элементов соседних строк) определителя (2.5). При этом за $(n - 1)$-шагов получается определитель, представляющейся таблицей, у которой строки ν с номерами $2, 3, \ldots, n, n + 1$ в точности совпадают с такими же строками определителя из (2.7), если в нем отбросить первые два столбца.

Относительно же первых нескольких строк такого определителя достаточно заметить, что они имеют структуру

$$\begin{vmatrix} [h_1] & [\circ] & \vdots & \circ & \circ \\ [T_1] & [0] & \vdots & T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\ [0] & [T_2] & \vdots & T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\ [0] & [0] & \vdots & T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{vmatrix} [h_1] & [\circ] & \vdots & 0 & 0 \\ [g_1] & [\circ] & \vdots & -g^-_{n+1,1} & -g^-_{n+1,2} \\ [h_1] & [\circ] & \vdots & -h^-_{n+1,1} & -h^-_{n+1,2} \\ [0] & [T_2] & \vdots & T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\ [0] & [0] & \vdots & T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}. \tag{2.17}$$

Теперь ясно, что путем вычитания третьей (пары) строк из первой (их пары) получается окончательное представление определителя (2.16) в следующем виде

$$\Delta_2^n(\zeta, 0) = \begin{vmatrix} [\circ] & [\circ] & \vdots & [\circ] & h^-_{n+1,1} & h^-_{n+1,2} \\ [T_1] & [0] & \vdots & [0] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\ [0] & [T_2] & \vdots & [0] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\ [0] & [0] & \vdots & [0] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\ [0] & [0] & \vdots & [0] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ [0] & [0] & \vdots & [0] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\ [0] & [0] & \vdots & [0] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \\ [0] & [0] & \vdots & [T_n] & -T^-_{n+1,1} & -T^-_{n+1,2} \end{vmatrix}. \tag{2.18}$$

Остается применить теорему Лапласа, из которой следует

$$\Delta_2^{(n)}(\zeta) = \big|\ g^-_{n+1,1},\, g^-_{n+1,2},\ \big| \cdot \prod_{k=1}^{n} T_\nu =$$

$$= -\mu^2_{n+1}\left(g^2_{n+1} - 4\zeta^2\,\alpha_{n+1}\,\beta_{n+1}\right)\cdot \prod_{k=1}^{n} T_\nu. \qquad (2.19)$$

При этом множитель $\prod\limits_{k=1}^{n} T_\nu$, также как и в (2.10) не нужно принимать во внимание. Таким образом, выясняется, что в случае "двухслойной" среды, содержащей пачку из n-тонких слоев, для определения особых корней дисперсионного уравнения (2.2) получается элементарное уравнение (Релея)

$$\Delta_2(0, n+1; \zeta) = g^2_{n+1} - 4\zeta^2\,\alpha_{n+1}\,\beta_{n+1}, \qquad (2.20)$$

зависящее только от параметров γ_{n+1} и δ_{n+1} подстилающего полупространства $\nu = n+1$.

5. В конце §1 указывалось, что подлежащие изучению волновые поля представляются повторными интегралами, внешний из которых является урезанным сверху интегралом Фурье вида (1.39),

$$U(x,t) = \operatorname{Re}\frac{v_{s1}}{\pi h^2}\int\limits_0^{k_0} \widetilde{U}(x,k) F\left(i\varkappa\frac{v_{s1}}{h}\right) k^2\, e^{ik\tau}\, dk, \qquad (2.21)$$

а внутренний оказывается комплексным интегралом вида

$$\widetilde{U}(x,k) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\lambda)} \gamma(\zeta)\, Z_n(\zeta,k)\, e^{-k\psi(\zeta,x)}\, d\zeta, \qquad (2.22)$$

распространенным по первичному пути интегрирования λ из (1.15). Здесь $\gamma(\zeta)$ является одной из функций, стоящей в круглых скобках под знаком интегралов из (1.40)–(1.43), $Z_n(\zeta,k)$ является соответствующей функцией X_0^+, Y_0^+, X_2^- или Y_2^- из решения (1.27) систем уравнений (1.26)–(1.28), или (1.33) и (1.34), а $\psi(\zeta,x)$ – является той или иной фазовой функцией из (1.40)–(1.43). При этом решение $Z_n(\zeta,k)$ указанных систем, определяемое численно при оценках интеграла из (3.2), имеет фактически структуру

$$Z_n = \frac{\widetilde{\Delta}_n(\zeta,k)}{\Delta_p(\zeta,k)}, \qquad (2.23)$$

вытекающую из теоремы Крамера. Из (2.23) видно, что в знаменатель выражения Z_n, (фактически) входит левая часть дисперсионного уравнения задачи

$$\Delta_p(\zeta, k) = 0, \quad (p = 2, 3). \tag{2.24}$$

Функция $\gamma(\zeta) Z_n$, (ζ, k) из (2.22) оказывается алгебраической функцией от ζ, $\alpha_\nu(\zeta)$, $\beta_\nu(\zeta)$, зависимость от k которой осуществляется посредстовм слагаемых с множителями

$$\exp(\pm k \alpha_\nu) \quad \text{и} \quad \exp(\pm k \beta_\nu).$$

Такими множителями как раз и определяются (приближенно) осцилляционные свойства функции $\gamma(\zeta) Z_n$, (ζ, k) из (2.22).

Основной же экспоненциальный множитель

$$\exp\left[-k\psi(\zeta, x)\right] \tag{2.25}$$

из (2.22) имеет в показателе экспоненты одну из фазовых функций из (1.40)–(1.44) вида

$$\psi = ix + H\sqrt{\zeta^2 - \gamma^2} + H_1\sqrt{\zeta^2 - \delta^2}, \tag{2.26}$$

содержащую радикалы α_ν и β_ν из (1.12), определяемые на разрезанной плоскости (ζ), как указано в п. 2 §1. При этом во всех практически интересных задачах почти всегда оказывается

$$x = \frac{\widetilde{x}}{h} \gg 1, \quad H_p = \frac{\widetilde{H}}{h} \gg 1, \tag{2.27}$$

т.е. эпицентральные расстояния точки наблюдения поля и ее расстояние по вертикали от тонкого слоя значительно превосходит толщину слоя h.

Вследствие этого обстоятельства во всех приложениях почти всегда можно полагать, что экспоненциальный множитель (2.25) в подинтегральной функции в (2.22) является функцией от ζ, изменяющейся гораздо быстрее при изменении переменной ζ, чем изменяется функция $\gamma\, Z_n$. Поэтому борьба с осциляционными затруднениями при численной оценке интегралов вида (2.22) должна вестись так, чтобы свести к минимуму осцилляцию фазового множителя из (2.25). Ситуация здесь тождественна с ситуацией в методе перевала при высокочастотной оценке волновых полей, представляемых интегралами, внешне похожими на интеграл (2.22). Методы такой оценки здесь можно полагать известными.

Таким образом, при оценках интегралов типа (2.22) (называемых далее интегралами для спектральных функций) путь интегрирования λ нужно стремиться свести на возможно больших его участках к стационарным линиям

$$\operatorname{Im}\psi(\zeta, x) = \mathrm{const} \tag{2.28}$$

фазовой функции. В случае указанных фазовых функций рассматриваемых задач стационарные линии (2.28) сводятся к стационарному контуру λ_0, проходящему через седловую точку $\zeta = \zeta_0$, а также к петлям Γ_γ и Γ_δ, охватывающим те или иные разрезы с вершинами в точках $\zeta = \gamma_k$ и $\gamma = \delta_k$ ($k = 0$ или 2), продеформированные в линии типа (2.28) наибыстрейшего возрастания вещественной части $\operatorname{Re}\psi(\zeta, k)$ фазовой функции.

В такие линии как раз и следует деформировать исходный путь интегрирования λ спектральных интегралов вида (2.22).

В результате указанной деформации определяется область (B), состоящая из участка основного листа плоскости (ζ) и прилегающих к нему участков побочных листов плоскости, пересекаемых контуром λ при его деформации. Корни $\zeta = \zeta_n(k)$ дисперсионного уравнения (2.24), расположенные и перемещающиеся в области (B) при изменении параметра k в рабочей частотной полосе

$$0 < k < k_0 \approx 2\pi q, \quad (q \leqslant 2-3), \tag{2.29}$$

необходимо учитывать при численной оценке интегралов из (2.22). Вычеты подинтегральных функций таких интегралов в упомянутых корнях $\zeta = \zeta_n(k)$ уравнения (2.24) определяют так называемые (стационарные) интерференционные моды, возбуждающиеся в слоистой среде.

Таким образом, в результате указанной деформации исходного пути интегрирования λ, спектральная функция $U(x, k)$ из (2.22) представляется суммой

$$U = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\lambda_0+\Gamma_\gamma+\Gamma_\delta)} \gamma(\zeta)\, Z_n(\zeta, k)\, e^{-k\psi(\zeta, x)}\, d\zeta - \sum_p I_p(x, k) \tag{2.30}$$

интегралов по стационарным контурам трех типов λ_0, Γ_{γ_k} и Γ_{δ_k}, а также – множества вычетов $I_p(x, k)$ подинтегральной функции из (2.22) во все корнях $\zeta = \zeta_p(k)$ дисперсионного уравнения, пересеченных контуром λ при его деформации. Методы изучения и оценки интегралов по стационарным линиям λ_0, Γ_{γ_k} и Γ_{δ_k} качественно отличаются от методов изучения и оценки интерференционных мод, отвечающих слагаемым $I_p(x,k)$ из (2.30). Вследствие этого их следует рассматривать независимо друг от друга.

Таким образом, количественное изучение рассматриваемых волновых полей подразделяется на две независимые части. При этом первая из них оказывается связанной с оценкой интегралов из (2.30), распространенных по стационарным контурам λ_0, Γ_{γ_k} и Γ_{δ_k}, определяющим спектральные функции волновых полей интерференционных объемных и головных волн. А вторая часть касается изучения и оценки интерференционных мод, описываемых последними слагаемыми правой части представления поля формулой вида (2.30).

Однако прежде, чем обращаться к указанному изучению непосредственно волновых полей, целесообразно провести серию вспомогательных исследований, ставящих целью выяснение: 1) расположения на плоскости (ζ) необходимых (для дальнейших исследований) стационарных линий фазовой функции $\psi(\zeta, x)$; 2) расположения на плоскости (ζ) областей (B), пересекаемых исходным путем интегрирования λ из (2.22) при его деформации в стационарные контуры λ_0, Γ_{γ_k} и Γ_{δ_k}; и, наконец, 3) расположения и перемещения по областям (B) корней $\zeta = \zeta_n(k)$ дисперсионного уравнения (2.24). При этом, естественно, что последний вопрос оказывается наиболее важным и требующим к себе основного внимания.

Как показал (наш) опыт, выполнение количественных оценок волновых полей, потребовавший использования системы специально разработанных, логически сложных, разветвленных и взаимно-увязанных компьютерных программ, обстоятельное выполнение указанных вспомогательных исследований позволяет придать оценкам полей необходимую наглядность, весьма важную при физическом осмысливании результатов вычисления полей. Поэтому проведение указанныъ вспомогательных исследований следует считать важным обязательным этапом в решении любой конкретной задачи на изучение интерференционных волновых полей в слоистых средах. Что же касается схем проведения таких исследований и получающихся при этом результатов, то их удобно излагать на примере каких-либо конкретных задач.

§3. Схемы проведения количественного изучения интерференционных волновых полей и связанные с ними вопросы

После изложения в §1 и §2 общих положений предлагаемого подхода к проблеме, нужно обратиться к обсуждению способов исследования решений конкретных задач на распространение интерференционных волновых полей в "двухслойной" и в "трехслойной" упругих средах, заданных некоторыми значениями своих параметров. Как указано в п. 5 §2, в основу количественной оценки полей полагается сведение первичного представления для внутренних (спектральных) интегралов вида (2.22) для составляющих полей смещений к сумме качественно различных слагаемых из (2.30), производимое методами контурного интегрирования. Поэтому следует привести соображения, устанавливающие возможность и целесообразность такого сведения, а затем обратиться к вопросам, связанным с численными методами количественной оценки отдельных слагаемых правых частей формул вида (2.30). При этом начинать здесь следует с постановки некоторой задачи на распространение интерференционных волновых полей, например, в "трехслойной" среде, параметры которой приходится задавать численно.

1. Для изложения общих подходов к количественной оценке интерференционных волновых полей предположим, что рассматривается задача на распространение интерференционных волн, например, типа P_0S_0 и S_0S_2 в "трехслойной" среде

$$\widetilde{z} < \widetilde{H}, \, (\nu = 0); \;\; \widetilde{H}_0 < \widetilde{z} < \widetilde{H}_0 + h, \, (\nu = 1); \;\; z > \widetilde{H}_0 + h, \, (\nu = 2), \quad (3.1)$$

возбуждаемой сосредоточенной нормальной (плоской) силой, заданной плотностью (1.5), (1.4) с функцией формы $f(t)$, представленной на рис. 3 и 4.

Пусть параметры среды имеют значения

$$\begin{aligned} &\rho_0 = 2.5, \;\; v_{p0} = 4.0, \;\; v_{s0} = 2.0, \\ &\rho_1 = 2.2, \;\; v_{p1} = 3.6, \;\; v_{s1} = 1.8, \quad (\rho[\text{г/см}^3], v[\text{км/сек}]). \qquad (3.2) \\ &\rho_0 = 2.7, \;\; v_{p2} = 5.5, \;\; v_{s2} = 2.75, \end{aligned}$$

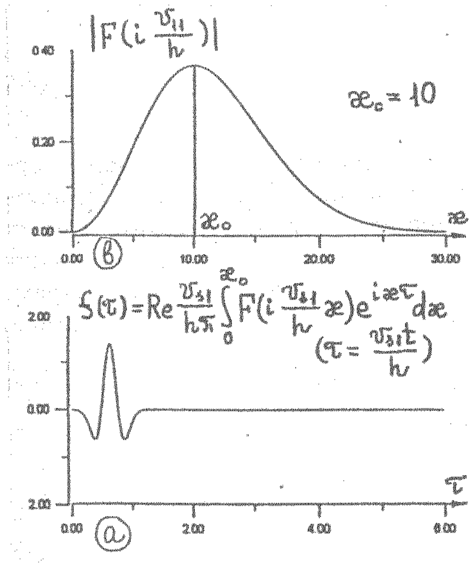

Рис. 3.

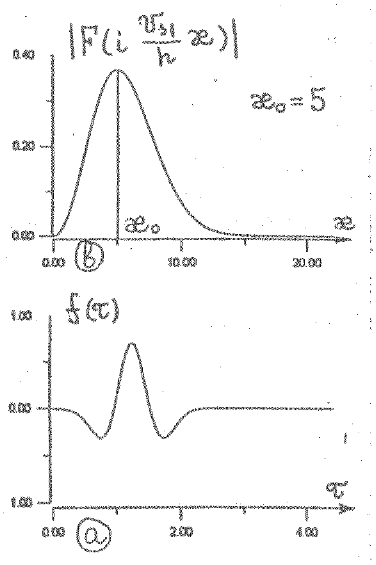

Рис. 4.

При этом для относительных параметров среды получается (первый вариант параметров)

$$z = \frac{\widetilde{z}}{h}, \quad x = \frac{\widetilde{x}}{h}, \quad H_0 = \frac{\widetilde{H}_0}{h}, \quad H_2 = \frac{\widetilde{H}_2}{h},$$

$$\gamma_\nu = \frac{v_{s1}}{v_{p\nu}}; \quad \delta_\nu = \frac{v_{s1}}{v_{s\nu}}; \quad \tau = \frac{v_{s1}}{h}t; \tag{3.2$'$}$$

$$\gamma_0 = 0.45;\ \delta_0 = 0.9;\ \gamma_1 = 0.5;\ \delta_1 = 1;\ \gamma_2 = 0.33;\ \delta_2 = 0.65.$$

Что же касается наблюдений, то они производятся на профилях вида

$$z = z_0,\ x = x_k \equiv (0, 5, 10, 15, 20, 25). \tag{3.3}$$

Аналитические представления полей P_0S_0 и S_0S_2 в форме потенциалов приведены в п. 5, §6 статьи [1]. В составляющих вектора смещений они представлены здесь интегралами Фурье из (1.39), спектральные функции U и W которых даются формулами (1.41) и (1.43). При этом функциональные коэффициенты $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$ из указанных формул определяются путем решения систем уравнений (1.26), (1.27), выписанных в развернутом виде в

§6 статьи [1] (формулы (6.33)–(6.35)). Там же выписано и явное выражение дисперсионного уравнения

$$\Delta_3(\zeta, k) = 0 \tag{3.4}$$

рассматриваемой среды.

Приведенные в (3.2) значения параметров "трехслойной" среды используются в §4 (в качестве группы 1) для некоторых иллюстраций структурных элементов волновых полей. При этом для сравнения (с целью некоторого усиления волноводных свойств тонкого слоя $\nu = 1$) там рассматривается и 2-й вариант параметров среды, отличающийся от (3.2) только значениями величин

$$\rho_1 = 2.2, \ \ v_{p1} = 3.0, \ \ v_{s1} = 1.3 \tag{3.5}$$

для тонкого слоя ($\nu = 1$), что приводит к следующим относительным параметрам

$$\gamma_0 = 0.375; \quad \delta_0 = 0.75; \quad \gamma_1 = 0.5; \quad \delta_1 = 1; \quad \gamma_2 = 0.27; \quad \delta_2 = 0.54 \tag{3.5$'$}$$

2-го варианта для "трехслойной" среды.

Что же касается "двухслойной" среды, то приводимые скудные иллюстрации (из-за недостатка места) относятся к двум наборам относительных параметров сред, а именно

$$\text{a) } \gamma_1 = 0.5; \quad \delta_1 = 1.0; \quad \gamma_2 = 0.33; \quad \delta_2 = 0.65 \tag{3.6}$$

для случая низкоскоростного (волноводного) тонкого слоя $\nu = 1$ и

$$\text{b) } \gamma_1 = 0.33; \quad \delta_1 = 1.0; \quad \gamma_2 = 0.6; \quad \delta_2 = 1.2 \tag{3.6$'$}$$

для случая высокоскоростного слоя. При этом аналитические представления в "двухслойной" среде в форме потенциалов приведены (с необходимыми пояснениями) в п. 1 §6 статьи [1]. Там же приведены системы уравнений (6.8), (6.9) (или (1.35), (1.36)) для функциональных коэффициентов $X_\nu^\pm$ и $Y_\nu^\pm$ потенциалов, а также – дисперсионное уравнение

$$\Delta_2(\zeta, k) = 0, \tag{3.7}$$

которое в настоящем тексте дано под номером (1.37).

Здесь остается еще отметить, что для более глубокого (и наглядного) понимания внутренней структуры интерференционных волновых полей крайне полезно их сопоставлять, во-первых, с неинтерференционными полями, возбуждаемыми в среде тем же воздействием при отсутствии тонкого слоя ($\nu = 1$) (когда его параметры ρ_1, v_{p1} и v_{s1} отождествляются с параметрами ρ_2, v_{p2} и v_{s2} полупространства $\nu = 2$). И, во-вторых, – с суммарным полем всех интерференционных мод, или с полем объемной интерференционной волны, или, наконец, с полем головной волны, рассчитанными раздельно при том же внешнем воздействии.

2. В соответствии с изложенным в §2, а также – в п. 2 §5

из [1], до обращения к количественным оценкам спектральных функций вида (2.30) очень полезно (если не необходимо) проводить вспомогательные исследования, состоящие из нескольких последовательных этапов.

В рассматриваемом случае задачи для "трехслойной" среды из п. 1 они сводятся к следующему:

На первом этапе для каждого пикета $x = x_k$ профиля наблюдений на комплексной плоскости (ζ) строятся стационарные линии λ_0, l_γ и l_δ наибыстрейшего возрастания величины $\operatorname{Re}\psi(\zeta, x_k)$ фазовой функции $\psi(\zeta, x_k)$ оцениваемого интеграла из (1.40) или (1.42), определяемые уравнениями вида

$$\operatorname{Im}\psi(\zeta, x, z) = \mathrm{const}\,.$$

Напомним, что здесь λ_0 – стационарная линия, проходящая через основную седловую точку $\zeta = \zeta_0(x)$ фазовой функции, а l_γ и l_δ – подобные же линии, проходящие через точки ветвления $\zeta = \gamma$ и $\zeta = \delta$ подинтегральной функции, не охватываемые контуром λ_0 сверху. (См. [1], §5 п. 2 и §3 п. 8–10.) При этом на линиях λ_0, l_γ и l_δ помещаются реперные отметки значений

$$\operatorname{Re}\psi(\zeta_p, x_k) = \rho_p > 0, \tag{3.8}$$

и через реперные точки $\zeta = \zeta_p$ проводят (фактически или мысленно) ортогональные линии постоянства величин

$$\operatorname{Re}\psi(\zeta, x_k) = \rho_p > 0,$$

позволяющие (при известных значениях $\kappa > 0$) легко оценивать (хотя бы качественно) модули фазового множителя

$$|\exp[-\kappa\psi(\zeta, x)]| \equiv \exp[-\kappa \operatorname{Re}\psi(\zeta, x)] \tag{3.9}$$

на участках плоскости (ζ), где построены (для 2-ой группы параметров γ и δ из (3.5′)) линии типа (3.8). Стационарные линии некоторых фазовых функций приведены на рис. 5–7. При этом (вследствие экономии места) они даны здесь лишь при трех значениях эпицентральных расстояний x, указанных в левом верхнем углу соответствующих рисунков.

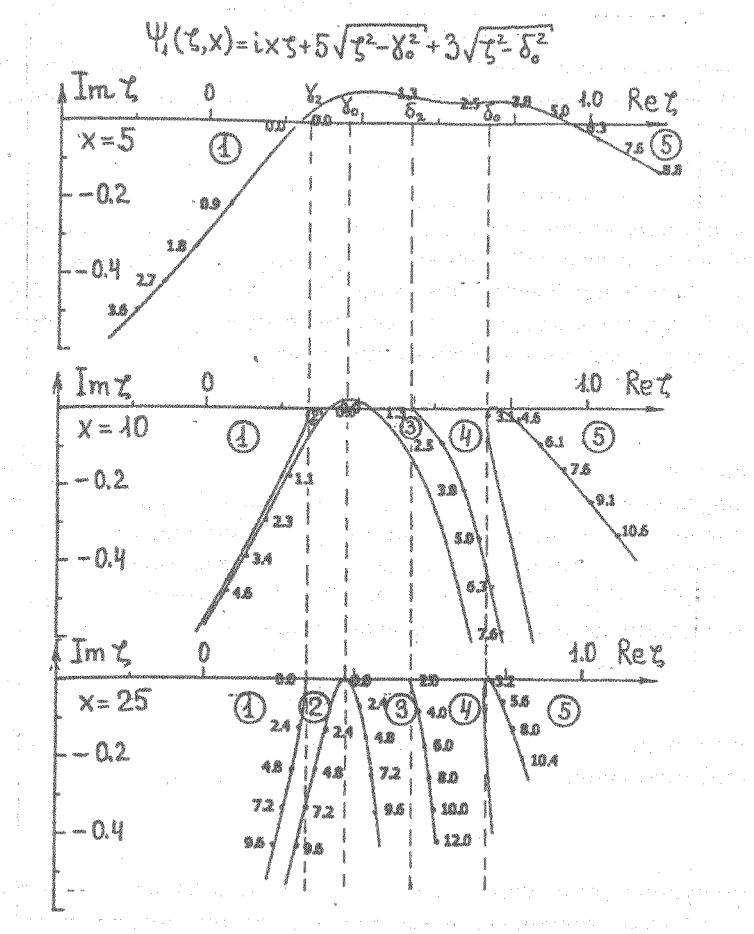

Рис. 5.

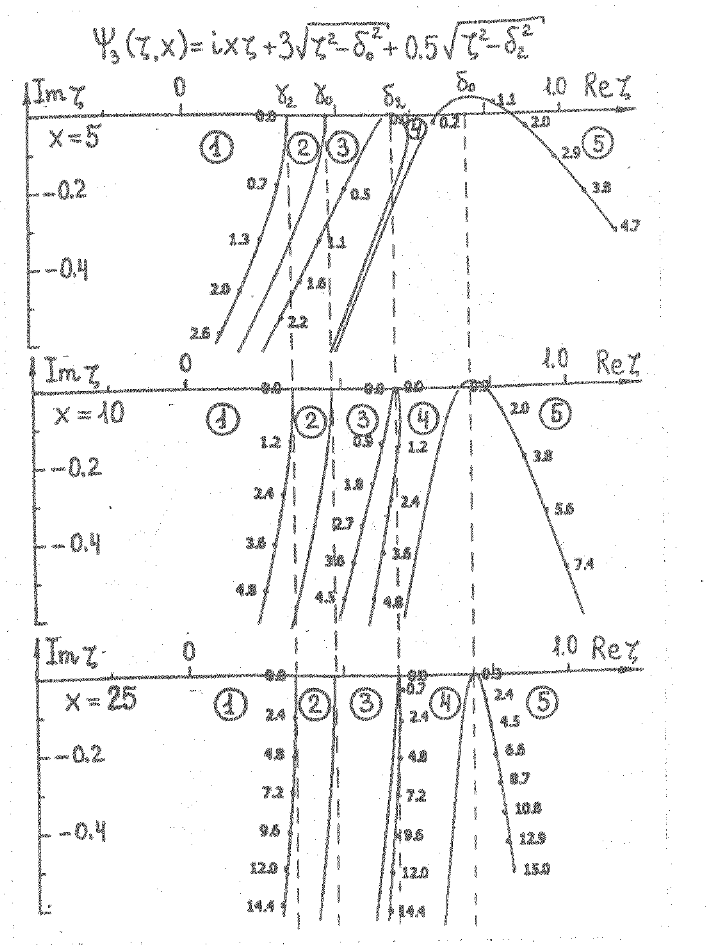

Рис. 6.

Одновременно со стационарными линиями λ_0, l_γ и l_δ на рисунках помечаются и частичные области (B_k), точки которых могут пересекаться исходным контуром λ из (2.22) при его деформации в указанные стационарные линии фазовой функции.

В качестве границ таких (возможных) областей (B_k) сначала выбираются полупрямые (при индексе $\nu = 0$ и 2)

$$\operatorname{Re}\zeta = \gamma_\nu, \quad \operatorname{Re}\zeta = \delta_\nu; \quad \operatorname{Im}\zeta < 0, \tag{3.10}$$

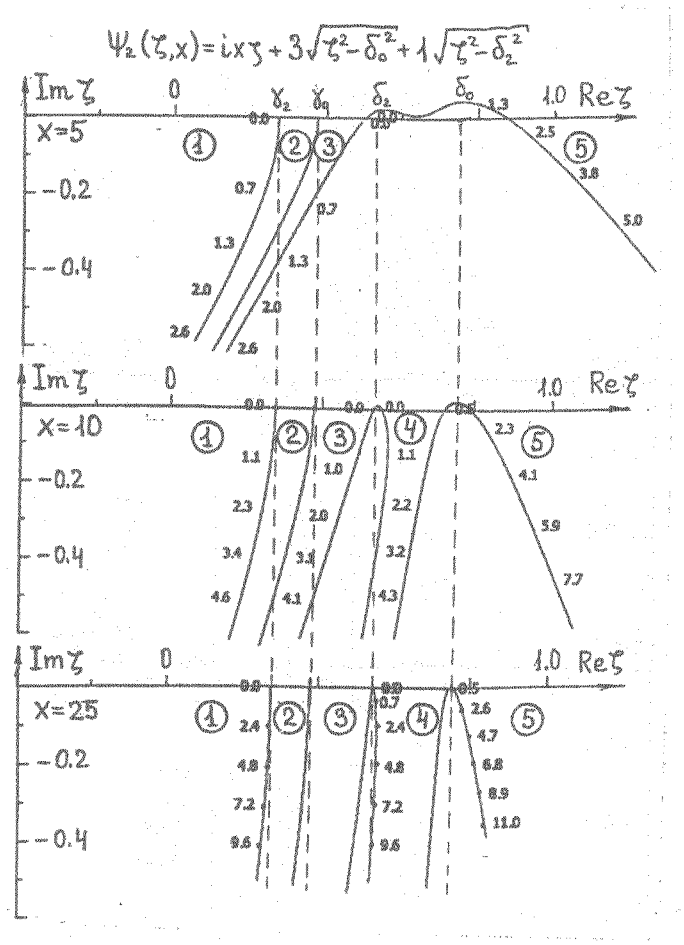

Рис. 7.

параллельные мнимой оси плоскости (ζ), выходящие из всех точек ветвления подинтегральной функции из (2.22). Однако такие границы являются фиктивными, и они должны быть заменены участками стационарных линий λ_0, l_γ и l_δ, проходящих через вершины $\zeta=\gamma_k$ и $\zeta=\delta_k$ разрезов (не охватываемых стационарным контуром λ_0), а также – участком контура λ_0 (см. рис. 5–7). Естественные частичные области (B_k) расположения корней получаются из областей (B_k) из (3.10) при замене их боковых границ на соответствующие участки стационарных линий l_γ, l_δ и λ_0. Мы будем обозначать их словами "естественные или реальные области (B_k) типа (3.10) расположения корней".

С целью пояснений отметим, что на рис. 5 при $x = 5$ реальным оказывается лишь участок области (B_1) левее линии λ_0. На рис. 5 ($x \geqslant 10$) реальными являются уже все участки областей 1–5, причем боковыми их границами оказываются стационарные линии λ_0, l_γ, $l+\delta$ и $\lambda_0^{(2)}$, где $\lambda_0^{(2)}$ – стационарный контур фазовой функции $\psi_1(\zeta, x)$, проходящий через побочную седловую точку $\zeta = \zeta_{(0)}^{(2)}$, расположенную в недалекой окрестности точки ветвления $\zeta = \delta_0$ (см. [1], §3 п. 8). Подобный же смысл имеют криволинейные участки областей (B_κ), помеченные на рис. 6 и 7 символами 1–5. Реальные (или естественные) области (B_κ) расположения корней дисперсионных уравнений удобно применять при построении линий корней при помощи машинных алгоритмов (см. п. 10), а также – для установления некоторых свойств нестационарных мод, определяемых через посредство вычетов подинтегральных функций спектральных интегралов в корнях дисперсионного уравнения, расположенных в фиксированных областях (B_κ) (см. п. 8 и 9). При иллюстрации же картины расположения линий корней ($\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ на комплексной плоскости (ζ) использование "прямоугольных областей (B_κ)" из (3.10) даже более удобно.

Здесь остается отметить, что корни $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ дисперсионных уравнений строятся (и изучаются) на третьем этапе (вспомогательных) исследований, сводящихся к вычислению корней и – к построению их линий $l_p(\varkappa)$, во всех частичных областях (B_κ), $(\kappa = 1, 2, 3, 4, 5)$ плоскости (ζ) (из которых корни могут быть продолжены куда угодно).

3. Для дальнейших исследований (формально) было бы достаточно знать расположение и перемещение корней $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ при изменении параметра $\kappa > 0$ в рабочей частотной полосе из (3.6) статьи [1], обеспечивающей присутствие в изучаемом поле интерференционных процессов. Однако вследствие известных особенностей поведения полей, представляемых "урезанными" (например сверху) интегралами Фурье, целесообразно несколько расширять и области 1–5 плоскости (ζ) путем продолжения линий l_q корней под встречаемые ими разрезы, что на рисунках не отмечено. (Заметим, что подобные вопросы затрагиваются кратко и в §5, п. 2.)

Частичные области (B_κ) из (3.10), “заполненные” линиями корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ с достаточно малыми аргументами $\varkappa > 0$, приведены в качестве примеров на трех сериях рис. 8–10. Серия рис. 8, состоящая из четырех рисунков с номерами 8_1–8_4, иллюстрирует расположение линий l_p корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.4) в пяти областях из (3.10), отвечающих “трехслойной” среде (второго варианта) с относительными параметрами из $(3.5')$.

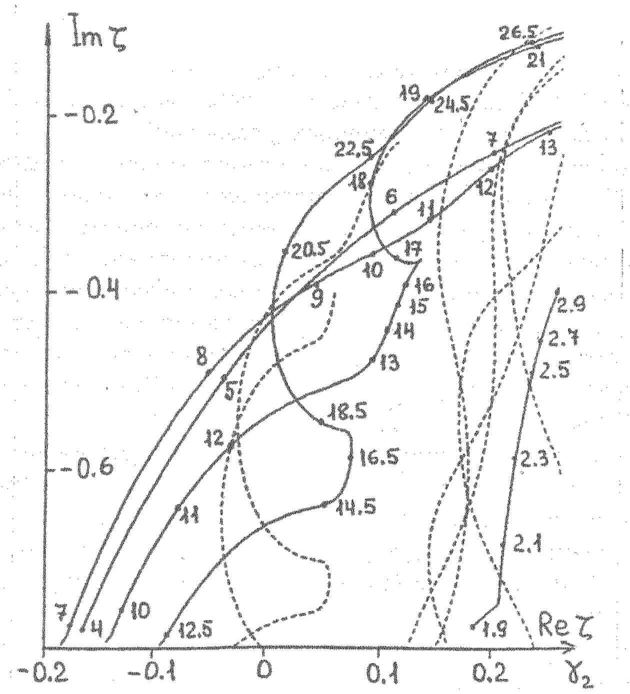

Рис. 8_1.

На рис. 8_1 и 8_2 изображены линии l_p корней с аргументами $\varkappa < 30$, располагающиеся в областях (B_1) $(\mathrm{Re}\,\zeta < \gamma_2)$ и $(B_2)(\gamma_2 < \mathrm{Re}\,\zeta < \gamma_0)$. Из значительного множества корней, попадающих в эти области, лишь немногие дают заметный вклад в

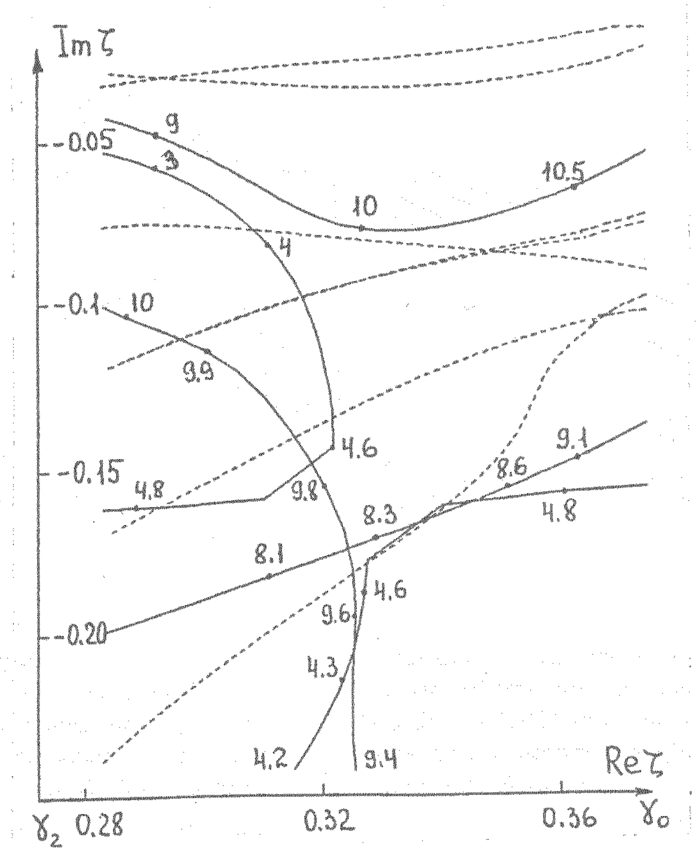

Рис. 8_2.

суммарное волновое поле. Линии таких корней на указанных рисунках проведены сплошными кривыми, снабженными реперными отметками значений $\varkappa = \varkappa_n$. Основная масса штриховых линий без реперных отметок приведена лишь с целью иллюстрации наличия большого количества корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$, которые приходится обрабатывать компьютеру. На рис. 8_3 изображены линии корней дисперсионного уравнения (3.4), расположенные в области $(B_3)(\gamma_0 < \mathrm{Re}\,\zeta < \delta_2)$. Обращает на себя внимание “группа 1” линий корней, расположенных в тесной окрестности вещественной оси (слева), воспроизведенная еще раз в форме фрагмента рис. 8_3, где она дана с необходимыми реперными отметками.

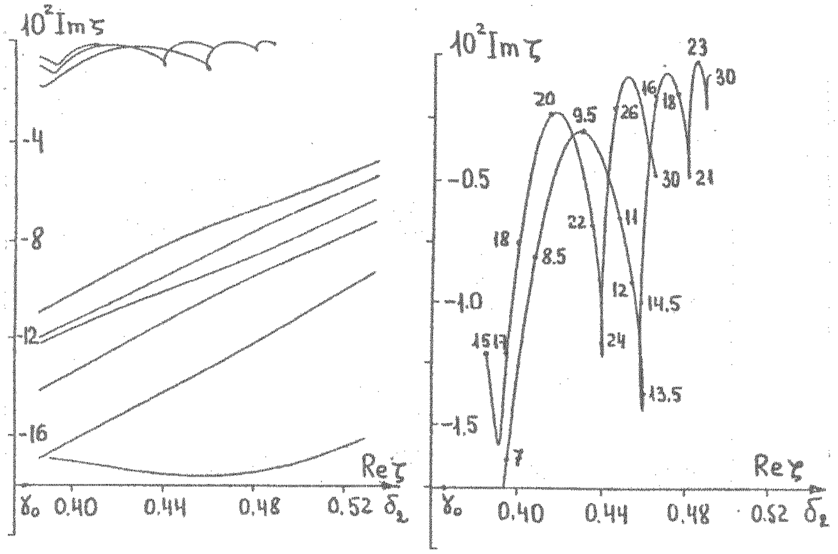

Рис. 8_3.

Наконец, на рис. 8_4 помещены: слева – "группа 2" линий корней с реперными отметками, расположенных вблизи вещественной оси области $(B_4)(\delta_2 < \mathrm{Re}\,\zeta < \delta_0)$*), а справа приведены графики $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ зависимостей от $\varkappa$ величин ζ_p из промежутка $(\delta_0, 1)$ вещественных корней уравнения (3.4) из областей (B_5).

Как выясняется при расчетах в §4, наибольший интерес здесь представляют моды, отвечающие корням уравнения (3.4), образующим группы 1 и 2 линий, изображенных на рис. 8_3 и 8_4. Такие корни $\zeta = \zeta(\varkappa)$ имеют веьма малые мнимые части. Поэтому отвечающие им моды затухают с увеличением координаты x. Однако они затухают так медленно, что прослеживаются на относительно очень больших расстояниях x, выраженных в толщинах слоя и в "расстояниях H" (см. §4).

4. Обращаясь к случаю "двухслойных" сред, характеризуемых параметрами (3.6) и (3.6′), прежде всего отметим, что и здесь начинать следовало бы с рассмотрения стационарных ли-

*) См. вертикальный масштаб этих линий корней.

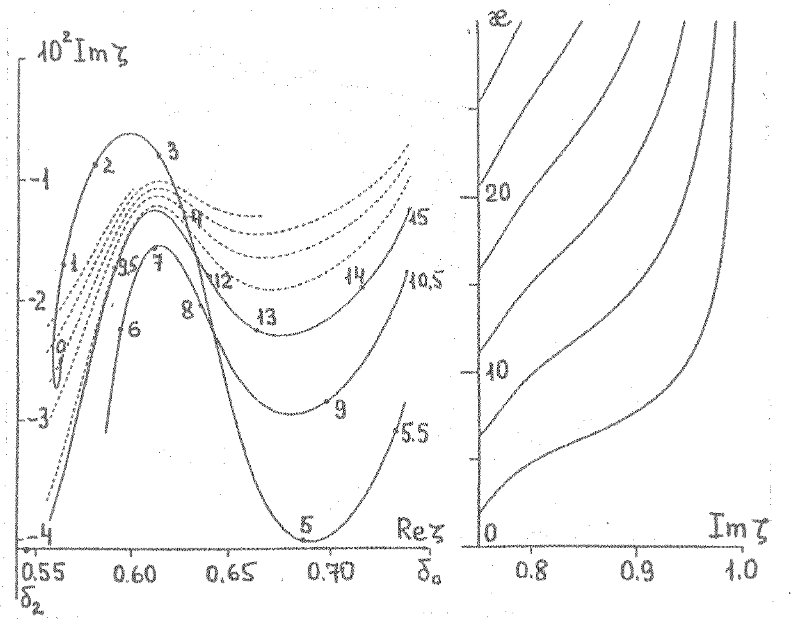

Рис. 8_4.

ний λ_0, l_γ и l_δ фазовых функций вида

$$\begin{aligned} \widetilde{\Psi}_\gamma &= ix\zeta + \widetilde{H}\sqrt{\zeta^2 - \gamma_2^2}, \\ \widetilde{\Psi}_\delta &= ix\zeta + \widetilde{H}\sqrt{\zeta^2 - \delta_2^2}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

возбуждаемых интерференционных волновых полей. Однако вследствие элементарности вопроса мы перейдем сразу к линиям l_p корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионных уравнений, причем начнем со случая низкоскоростного тонкого слоя.

Линии корней дисперсионного уравнения (3.7) в случае параметров (3.6) даются на серии рис. 9, состоящей из частей рис. 9_1, рис. 9_2 и рис. 9_3.

На рис. 9_1 приведено множество линий l_p корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$, располагающихся в области (B_1) $(0 < \mathrm{Re}\,\zeta < \gamma_2)$. Большинство из них не играет заметной роли при вычислении полей смещений. Такие линии l_p изображены прерывистыми кривыми без реперных отметок $\varkappa = \varkappa_n(\zeta)$. При расчетах принимались во внимание остальные пять линий, данных на рис. 9_1 сплошными кривыми –

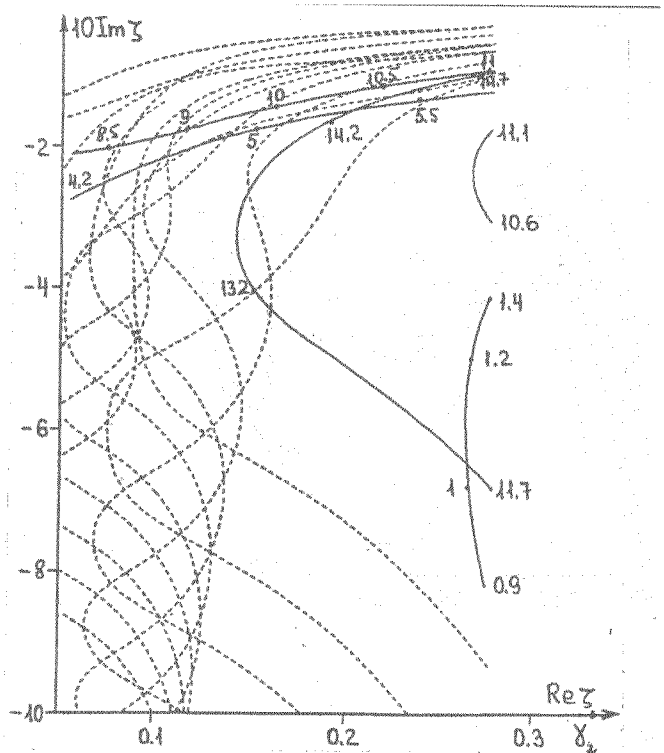

Рис. 9_1.

с реперными отметками. На рис. 9_2 в такой же менере изображены линии корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ из области (B_2) $(\gamma_2 < \mathrm{Re}\,\zeta < \delta_2)$. Все линии этой группы располагаются "вблизи" вещественной оси и потому составляющие их корни могут отвечать слабо затухающим интерференционным модам. В таком отношении выделяются сплошные линии корней, снабженные реперными отметками. Наконец, на рис. 9_3 изображены графики $\zeta = \zeta_n(\varkappa)$ перемещения вещественных корней уравнения (3.7) вдоль промежутка $\delta_2 < \zeta < 1$ при неограниченном возрастании параметра $\varkappa$.

Остается рассмотреть линии корней дисперсионного уравнения (3.7) в случае параметров из (3.6′), отвечающих высокоскоростному тонкому слою. На рис. 10_1 изображены линии корней l_p уравнения (3.7), относящиеся к области (B_1) $(0 < \mathrm{Re}\,\zeta < \gamma_2)$. На них прерывистые линии корней без реперных отметок, отвеча-

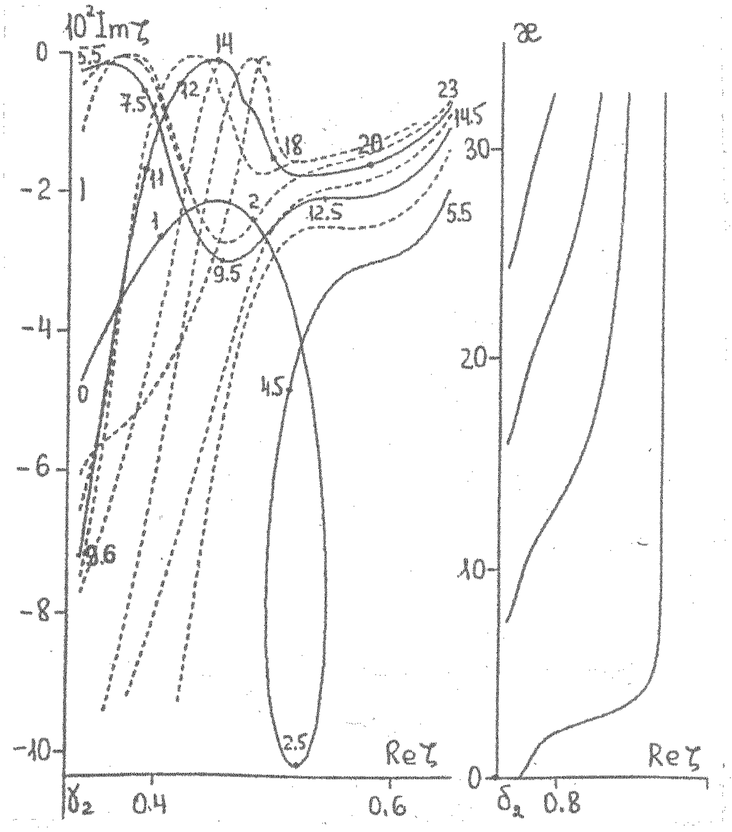

Рис. 9_2, 9_3.

ют корням, вносящим пренебрежимо малый вклад в вычисление волновых полей. Линии же корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$, вносящих заметный вклад в расчеты поля смещений, даны сплошными линиями с реперными отметками.

Остальные же две области (B_2) $(\gamma_2 < \mathrm{Re}\,\zeta < \delta_2)$ и $(B_3)(\delta_2 < \zeta)$, содержащие по одному корню уравнения (3.7) при рассматриваемых небольших значениях параметра $\varkappa > 0$, изображены на одном "комбинированном" рис. 10_2. Рис. 10_2 состоит из элементов координатных осей плоскости (ζ), прилегающих к точке $\zeta_0 = \gamma_2 - 0.09i$, вблизи которой расположен малый элемент линии корня (не играющего, правда, заметной роли в вычислениях). А

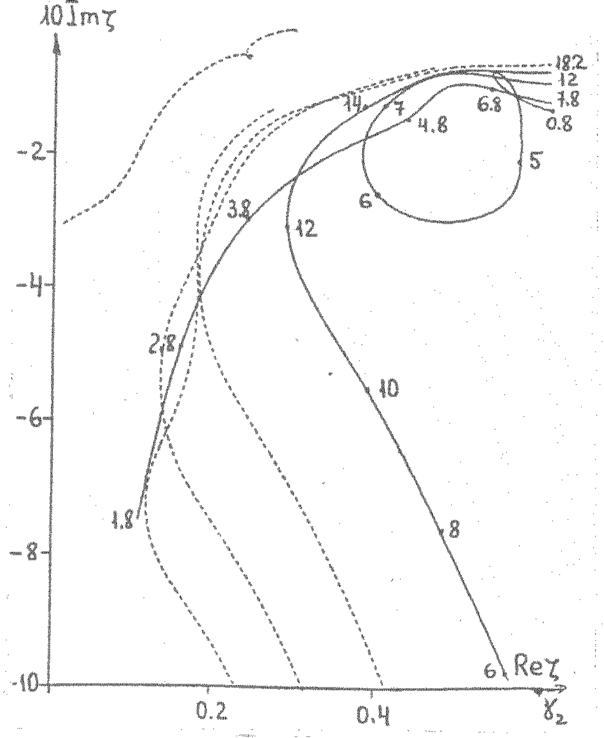

Рис. 10_1.

вторым элементом рис. 10_2 является график корня $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$, выходящего при $\varkappa = 0$ из точки $\zeta \approx 1.68$ и перемещающегося вдоль вещественной оси плоскости (ζ) к точке δ_2, а затем и к точке $\zeta = \delta_1$.

5. Линии l_p корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионных уравнений (3.4) и (3.7), отвечающие еще небольшим значениям частотного параметра (аргумента) $\varkappa < 30$, располагаются на рис. 8–10 причудливо и, как правило, в относительном удалении от вещественной оси плоскости (ζ), где величина

$$\exp[\varkappa \operatorname{Re} \psi(\zeta(\varkappa), x)],$$

характеризующая средний уровень амплитуд интерференционных мод, оказывается малой (а часто даже пренебрежимо малой). Расположение линий корней в областях (B_κ) комплексной

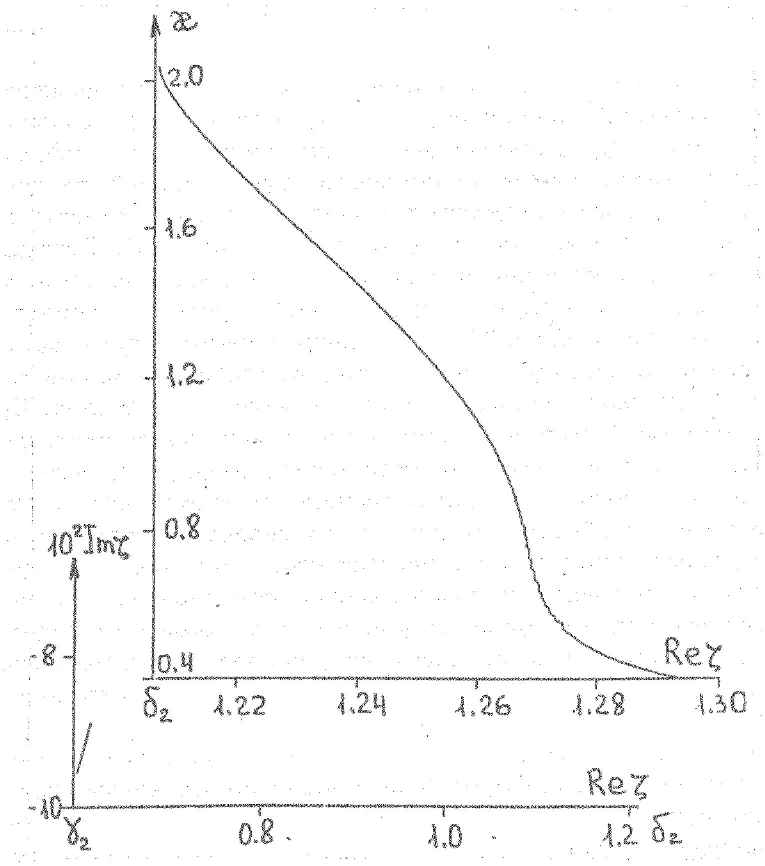

Рис. 10_2.

плоскости (ζ) заметно зависит от параметров γ_κ и δ_κ, характеризующих рассматриваемую среду, причем особенно при переходе от случаев высокоскоростного тонкого слоя к случаю низкоскоростных (волноводных) тонких слоев.

В последних случаях, как известно, среди корней дисперсионных уравнений появляются (в крайне правых частичных областях (B_κ)) вещественные корни, отвечающие незатухающим интерференционным модам, регистрируемым при небольших удалениях от тонкого слоя и незатухающих (теоретически) при увеличении эпицентрального расстояния x. При удалении же точки наблюдения поля от тонкого слоя их амплитуды затухают по экспоненциальному закону. В этом состоят известные факты, широко освещенные в литературе.

Однако при изучении расположения корней наших дисперсионных уравнений в областях (B_4) и (B_3) в случае "трехслойной" – и в области (B_2) "двухслойной" среды (с низкоскоростным волноводным тонким слоем) обнаружены группы корней, расположенных (и перемещающихся) в весьма тесной окрестности вещественной оси (см. рис. 8_4 и 8_3, а также рис. 9_2). Нетрудно видеть, что в случае поперечных волн, определяемых символами S_0S_2 или S_0S_0 в случае "трехслойной" среды и – символом S_2 в случае "двухслойной" среды, таким корням могут отвечать модальные волны, затухающие настолько слабо, что они прослеживаются на расстояниях в многие десятки толщин слоя. При этом такие моды распространяются не только вдоль слоя, но и под значительными углами от него вглубь полупространств.

О наличии таких мод мы не встречали сведений в литературе, несмотря на то обстоятельство, что их свойства и распространение должны представлять несомненный прикладной интерес. Некоторые сведения о подобных модах (относящихся к волнам поперечного типа) приводятся в п. 8 и 9, а также в §4. Однако в общем виде их феномен, несомненно, нуждается в специальном изучении, к которому мы собираемся обратиться в ближайшем будущем.

Возвращаясь к непосредственной тематике настоящего раздела остается отметить, что на 4-ом этапе вспомогательных исследований нужно решать вопрос об участии корней дисперсионного уравнения в вычислении полей смещений по формулам типа (2.30). При этом ясно, что к участию в оценках*) следует допускать корни, удовлетворяющие двум условиям: 1) Их линии должны располагаться внутри областей (B_1)–(B_5) из рис. 8–10 при значениях κ из рабочей частотной полосы (2.29); и 2) в учитываемых корнях $\zeta = \zeta_q(\kappa)$ дисперсионного уравнения экспоненциальный фазовый множитель

$$|\exp[-\kappa\psi(\zeta, x)]| \equiv \exp[-\kappa \operatorname{Re}\psi(\zeta, x)],$$

определяющий качественно порядок величины вычета подинте-

*) Проводящихся в логической увязке с вычислением интегралов по стационарным линиям (типа λ_0, λ_γ и l_0), через которые корни проникают в области (B_k), или уходят из них. (См. конец п. 7).

гральной функции в корне $\zeta = \zeta_q(\kappa)$, должен превосходить заданное пороговое значение, например,

$$\exp[-\kappa \operatorname{Re} \psi(\zeta_q, x)] > \delta_0 = e^{-4}. \tag{3.12}$$

Что же касается "ручной" реализации оценок величин из (3.12) в корнях из рис. 8 и 9, то на качественном уровне они легко выполняются путем наложения (даже лишь мысленного) стационарных линий вида (3.8) из рис. 5–7 на системы линий корней из рис. 8 и 9. При этом значения $\varkappa$, отвечающие текущим точкам $\zeta = \zeta_q(\kappa)$ линий корней из рис. 8 и 9, должны умножаться на соответствующие значения $\operatorname{Re} \psi(\zeta_q, x_k)$ линий типа (3.8) из рис. 5–7, что и позволяет качественно проверять выполнимость условия (3.12). Таким способом иногда удается сразу же отсеять множество корней из рис. 8–9 как не дающих заметного вклада в представления составляющих полей смещений.

К изложенному уместно еще добавить, во-первых, что отсеивание корней, несущественных для оценки полей смещений в рассматриваемых задачах, нужно проводить также и по значению верхнего предела κ_0 в рабочей частотной полосе из (2.29), определяющей область низкочастотности изучаемых волновых полей. Такое отсеивание проще всего выполнять еще на уровне построения линий корней в частичной области (B_k) применяемым алгоритмом. Последний (см. п. 10) строит корни в последовательности моментов $\kappa_m < \kappa_{m+1}$ их прихода в область (B_k), вследствие чего достаточно только прервать его работу в момент $\kappa = \kappa_0$.

Во-вторых же, что при работе программы в автоматическом режиме все перечисленные операции компьютер делает сам, без вмешательства извне.

6. После проведения (в том или ином виде) описанных вспомогательных исследований производится переход от исходных представлений полей в форме метода Лемба (например, в виде повторных интегралов (1.39), (1.40)–(1.43)) к представлениям внутренних (спектральных) интегралов для U и W в форме (2.30). В результате этого всё дальнейшее сводится к вычислению интегралов из (2.30), распространенных по стационарным контурам λ_0, Γ_γ и Γ_δ, а также – сумм вычетов подинтегральных функций во всех корнях дисперсионного уравнения, пересеченных исходным контуром λ при его деформации в контуры λ_0, Γ_γ и Γ_δ.

Основной экспоненциальный множитель подинтегральных функций таких интегралов не осциллирует вдоль указанных контуров и убывает наибыстрейшим образом. Поэтому интегрировать приходится по относительно небольшим участкам стационарных контуров, причем для качественной их оценки вполне подходящим оказывается метод перевала в численной его реализации.

Применение такого метода предполагает, что на пути интегрирования, например, на контуре λ_0, нет корней дисперсионного уравнения рассматриваемой задачи. Если же какой-либо из корней $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ дисперсионного уравнения выходит на контур λ_0 в точке $\zeta_0 \in \lambda_0$, приближаясь к контуру с правой стороны от него, т.е.

$$\zeta_p(\kappa) \left(\xrightarrow{+}\right) \zeta_0 \in \lambda_0 \tag{3.13}$$

(где $\zeta_p(\kappa)$ стремится к точке $\zeta_0 \in \lambda_0$ из части плоскости (ζ), не пересеченной еще контуром λ при его деформации в стационарные линии λ_0, Γ_γ и Γ_δ), то значение интеграла из (2.30)

$$J_0^+(\kappa, x, \lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\lambda_0)} \gamma(\zeta) Z_n(\zeta, \kappa, x) e^{-\kappa\psi(\zeta, x)} d\zeta \tag{3.14}$$

по контуру λ_0, содержащему уже корень $\zeta_p(\kappa) \in \lambda_0$, понимается как предельное значение при условии (3.13) от значения $J_0(\kappa, x, \lambda_0)$, у которого еще $\zeta_p(\kappa) \notin \lambda_0$. (См. п. 6 и 7, §5 статьи [1]). Если же корень $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ стремится к точке $\zeta_0 \in \lambda_0$ с левой стороны от контура λ_0

$$\zeta_p(\kappa) \left(\xrightarrow{-}\right) \zeta_0 \in \lambda_0, \tag{3.15}$$

то функции $J_0(\kappa, x, \lambda_0)$ из (2.30) при $\zeta_p(\kappa) \notin \lambda_0$ имеют предельное значение $J_0^-(\kappa, x, \lambda_0)$, связанное с предельным значением $J_0^+(\kappa, x, \lambda_0)$ из (3.14) соотношением

$$J_0^+(\kappa, x, \lambda_0) = J_0^-(\kappa, x, \lambda_0) - a^{-1}(\kappa, x, \lambda_0), \tag{3.16}$$

где $a^{-1}(\kappa, x, \lambda_0)$ обозначает вычет подинтегральной функции из (3.14) в корне $\zeta_p(\kappa) = \zeta_0$.

Совершенно также обстоит дело и при выходе корня $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ дисперсионного уравнения на ту или иную ветвь петли Γ из (2.30), охватывающей разрез с вершиной $\zeta = \gamma$ или $\zeta = \delta$, если выход на разрез осуществляется в точке $\zeta_0 \in \Gamma$, отличной от вершины $\zeta = \gamma$, или $\zeta = \delta$. При этом случай вершин разрезов, обходимых при возрастании κ корнем $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ при переходе с одного листа римановой поверхности (ζ) на другой, требует более детального рассмотрения.

7. При наличии вещественных корней $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ дисперсионного уравнения обычно встречаются случаи, когда (при исходном проведении разрезов) корень $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ сначала при $\kappa < \kappa_0$ перемещается по нижнему берегу разреза (справа налево) к некоторой точке ветвления $\zeta = \delta$, а затем, при возрастании $\kappa > \kappa_0$, перемещается (слева направо) по верхнему берегу разреза, удаляясь от точки $\zeta = \delta$. При продеформированном разрезе в полупрямую l_δ ($\mathrm{Re}\,\zeta = \delta$, $\mathrm{Im}\,\zeta < 0$), упомянутый корень $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ сначала перемещается вдоль вещественной оси второго листа плоскости (ζ) к вершине $\zeta = \delta + 0$ разреза l_δ. Затем он пересекает разрез l_δ (в самой его вершине), выходит на основной лист плоскости (ζ) и далее перемещается по участку $\zeta > \delta$ вещественной оси основного листа.

В обсуждаемом случае при рассмотрении интеграла

$$J(\kappa, x, \Gamma_\delta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\Gamma_\delta)} \gamma(\zeta) Z_n(\zeta, \kappa) \exp[-\kappa\psi(\zeta, x)] d\zeta \qquad (3.17)$$

из (2.30) некоторое осложнение возникает вследствие прохождения через вершину $\zeta = \delta$ разреза l_δ (т.е. через точку ветвления $\zeta = \delta$ функции $Z_n(\zeta, \kappa)$) корня $\zeta = \zeta_n(\kappa)$ дисперсионного уравнения. Левая часть $\Delta(\zeta, \kappa)$ такого уравнения входит в (знаменатель) представления из (2.1)

$$Z_n(\zeta, \kappa) = \frac{D(\zeta, \kappa)}{\Delta(\zeta, \kappa)} \qquad (3.18)$$

для функции $Z_n(\zeta, \kappa)$ из (3.17), причем ее ветвление в точке $\zeta = \delta$ – следствие вхождения в выражения $\Delta(\zeta, \kappa)$ и $D(\zeta, \kappa)$ радикала $\sqrt{\zeta^2 - \delta^2}$. Поэтому упомянутое осложнение устраняется при замене в (3.17) переменной интегрирования ζ на переменную y, например, по формуле

$$y = \sqrt{\zeta - \delta}, \quad (\zeta = y^2 + \delta \equiv \zeta(y)). \qquad (3.19)$$

При этом: 1) путь интегрирования Γ_δ (в форме петли, охватывающей разрез l_δ) отображается на прямую L_δ

$$y = k \cdot \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right), \quad (-\infty < k < \infty) \tag{3.20}$$

плоскости (y), обходимую из 2-го квадранта в четвертый.

2) Рассматриваемый корень $\zeta = \zeta_0(\kappa)$ с вещественной полуоси $\zeta > 0$ 2-го листа плоскости (ζ) отображается на корень

$$y_0(\kappa) \equiv \sqrt{\zeta_0(\kappa) - \delta} < 0,$$

стремящейся к точке $y = 0$ вдоль отрицательной части вещественной полуоси плоскости (y) (с правой стороны от линии L_δ).

3) Корень $y_0(\kappa)$ с участка $\zeta > \delta$ вещественной оси основного листа плоскости (ζ) отображается на участок $y > 0$ вещественной оси плоскости (y), расположенный слева от линии L_δ (см. рис. 11, где изображен участок L_δ нового пути интегрирования, пересекающий вещественную ось в точке $y = 0$ под углом $\varphi = \frac{\pi}{4}$, а также – отрезок линии корней, совпадающий с отрезком ab вещественной оси).

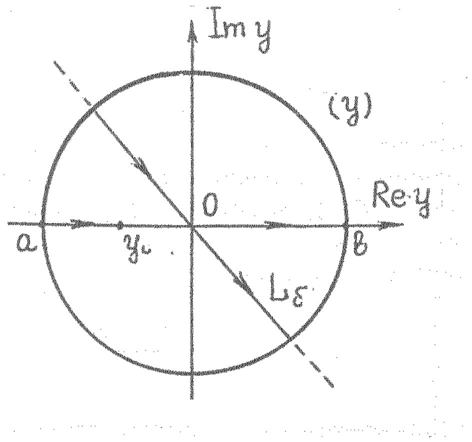

Рис. 11.

Что же касается интеграла из (3.21), то он принимает вид

$$J(\kappa, x, L_\delta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(L_\delta)} \gamma(\zeta) Z_n(\zeta, \kappa) \exp[-\kappa\psi(\zeta, x)] 2y\, dy, \tag{3.21}$$

где ζ имеет значение $\zeta = \zeta(y)$ из (3.19), причем подинтегральная функция оказывается регулярной в (достаточно широкой) окрестности точки $y = 0$. При этом корень $y = y_0(\kappa)$ дисперсионного уравнения, имеющий значение

$$y_0(\kappa) \equiv \sqrt{\zeta_0(\kappa) - \delta}, \tag{3.22}$$

пересекает путь интегрирования L_δ в точке $y = 0$ вдоль некасаетльного к нему пути (совпадающего с отрезком ab вещественной оси на рис. 11. Поэтому к интегралу (3.21) применим результат (3.16) из п. 6.

Что же касается замены переменной интегрирования по (3.19), то ее можно производить в (3.17) относительно всего пути интегрирования в виде петли Γ_δ, охватывающей разрез l_δ, как и подразумевалось выше. Однако может оказаться более удобным разбивать путь интегрирования Γ_δ из (3.21) на две части: на "далекую" часть

$$\zeta \in \Gamma_\delta, \quad |\zeta - \delta| > \varepsilon \tag{3.23}$$

пути, на которую корень $\zeta = \zeta_0(\kappa)$ дисперсионного уравнения не выходит (и вычисление интеграла вида (3.17) вдоль которой не встречает затруднений), и на "близкую" часть пути интегрирования

$$\zeta \in \Gamma_\delta, \quad |\zeta - \delta| < \varepsilon \tag{3.24}$$

(где $\varepsilon > 0$ достаточно мало), прилегающую непосредственно к вершине $\zeta = \delta$ разреза l_δ. При этом описание подхода к вычислению интеграла (3.21) удобнее давать в предположении, что речь идет о вычислении интеграла по ближней части (3.24) пути интегрирования.

В качестве точек дискретизации переменной интегрирования y на отрезке прямой L_δ целесообразной выбрать

$$y_k = \Delta_0 k; \;\; -N \leqslant k \leqslant N, \;\; (k \neq 0), \;\; \Delta_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{N}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}, \tag{3.25}$$

где $N \gg 1$ достаточно большое число.

Вычисление же интеграла J следует производить в достаточно плотной сетке значений $\kappa = \kappa_m$ частотного параметра κ из (2.17), относительно которой при вычислении интеграла из (3.21) предполагается, что

$$
\begin{aligned}
&0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \ldots < \kappa_m < \ldots, \\
&y_0(\kappa_m) < 0 \quad \text{при} \quad m < m_0, \\
&y_0(\kappa_m) > 0, \quad \text{если} \quad m > m_0,
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

где число m_0 достаточно велико.

При указанном выборе точек дискретизации подинтегральная функция интеграла из (3.21) остается конечной во всех точках $y = y_k$ и $\kappa = \kappa_m$ сети из (3.25) и (3.26). Помимо этого при значениях $\kappa_m < \kappa_{m_0}$ (значениях $\kappa_m > \kappa_{m_0}$) корень $y = y_0(\kappa_m)$ дисперсионного уравнения располагается на плоскости (y) справа (слева) от пути интегрирования L_δ. Вследствие этого значение $J(\kappa_m, x, L_\delta)$ интеграла из (3.21) при возрастающих значениях $m < m_0$, $m \to m_0$ (при убывающих значениях $m > m_0$, $m \to m_0$) должно стремится к определенному (существующему!) "численному" пределу

$$
\begin{aligned}
&J^+(\kappa_{m_0}, x, L_\delta), \ \text{(справа)}, \\
\text{и} \quad &J^-(\kappa_{m_0}, x, L_\delta), \ \text{(слева)}.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

При этом такие предельные значения должны удовлетворять соотношению типа (3.16), в котором $a_{-1}(\kappa, x, \lambda_0)$ обозначает вычет в полюсе 1-го порядка подинтегральной функции из (3.21), вычисляемой в корне дисперсионного уравнения $y = y_0(\kappa_m)$, расположенном в непосредственной близости точки $y = 0$. Значение же такого вычета может вычисляться по формуле

$$
a_{-1} = \lim_{y \to y_0(\kappa_m)} \{2y\gamma[\zeta(y)] Z_n[\zeta(y), \kappa_m]\, e^{-\kappa\psi[\zeta(y),x]}[y - y_0(\kappa_m)]\}. \tag{3.28}
$$

Заметим, что упомянутое соотношение (3.16) может служить также и подтверждением правильности вычисления интегралов из (3.27). К изложенному остается лишь присовокупить, во-первых, что в представлении (2.30) все вычеты в корнях $\zeta = \zeta_n(\kappa)$ дисперсионного уравнения обозначены символами $I(x, \kappa)$ независимо от того, какой контур λ_0 или Γ_δ корень $\zeta = \zeta_n(\kappa)$ пересекает. И, во-вторых, что при подстановке во внешний (усеченный) интеграл Фурье из (1.39) результатов вычисления всех частей стационарного волнового поля, стационарные моды (т.е. вычеты в корнях $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ уравнения (3.4), расположенных в областях (B_k)) должны учитываться совместно с интегралами по стационарным линиям, пересекаемых упомянутыми корнями. Ведь только это компенсирует разрывы в интегралах $J^{\pm}(\varkappa, x, \lambda_0)$ типа интегралов из (3.14) и (3.16) (наличие которых приводит к осцилляционным погрешностям при вычислении внешних интегралов Фурье).

8. Обращаясь к последним слагаемым представлений (2.30) для спектральных функций U и W составляющих полей смещений, следует подчеркнуть, что ими определяются представления стационарных и пространственно-временных интерференционных мод в рассматриваемых волновых полях. Сами такие слагаемые вычисляются как вычеты

$$a_{-1}(x, \kappa) \equiv I(x, \kappa)$$

подинтегральных функций из (2.30) в полюсах (первого порядка), совпадающих с корнями $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ дисперсионного уравнения задачи, пересекаемых контуором λ при его деформации в стационарные линии λ_0, l_γ и l_δ из (2.30).

В п. 8 §5 из [1] приведен алгоритм вычисления таких вычетов

$$a_{-1}(x, \kappa) = \lim_{\zeta \to \zeta_p(\kappa)} \{((\zeta - \zeta_p(\kappa))\gamma) Z_n(\zeta, \kappa)\, e^{-\kappa\psi(\zeta, z)}\}, \tag{3.29}$$

в котором стремление ζ к $\zeta_p(\kappa)$ производится, например, вдоль касательной к линии l_p корня в точке $\zeta = \zeta_p(\kappa)$, где вычет вычисляется. Такой алгоритм оказался достаточно эффективным в наших приложениях.

Как упоминалось в п. 5, в рассматриваемых "трехслойной" и "двухслойной" средах, содержащих низкоскоростной тонкий слой, обнаруживаются "необычные" поперечные волны поверхностного и неповерхностного типа. Поэтому представляет интерес привести здесь предварительные (пока еще неполные) данные, выясняющие частично их природу и позволяющие лучше воспринять приводимый в §4 иллюстративный материал.

Предположим, например, что рассматриваются волны типа $S_0S{-}_0$ и S_0S_2 в "трехслойной" среде с параметрами из (3.5′), представленные повторными интегралами вида (2.21) и (2.22), характеризуемыми соответственно фазовыми функциями

$$\psi = \psi_1(\zeta, x, z) = ix\zeta + H_1\sqrt{\zeta^2 - \delta_0^2} + (H_1 - z)\sqrt{\zeta^2 - \delta_0^2} \equiv$$

$$\equiv ix\zeta + (2H_1 - z)\sqrt{\zeta^2 - \delta_0^2}, \quad (z < H_1) \tag{3.30}$$

и

$$\psi = \psi_2(\zeta, x, z) = ix\zeta + H_1\sqrt{\zeta^2 - \delta_0^2} + (z - H_1 - 1)\sqrt{\zeta^2 - \delta_1^2} \quad (3.31)$$

(при $z > H_1 + 1$), где H_1 обозначает расстояние источника 0 от кровли $z = H_1$ тонкого (волноводного) слоя.

В соответствии с применяемой методикой, при деформации исходного пути интегрирования λ из (2.22) в стационарные контуры λ_0, l_γ и l_δ фазовой функции $\psi(\zeta, x, z)$ (например, из (3.30) и (3.31)) пересекаются корни $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.4), располагающиеся в криволинейных частичных областях (B_k), типа областей (B_k) из п. 2.

Напомним, что корни $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.4) при вещественных параметрах из (3.5$'$) изображены на серии рис. 8. А на рис. 5–7 для некоторых фазовых функций построены стационарные линии λ_0, l_γ, l_δ, проходящие через (основную) седловую точку $\zeta = \zeta_0(x)$ (монотонно возрастающую при увеличении $x > 0$), а также – через точки ветвления радикалов, расположенных на вещественной оси и не охватываемых сверху контуром λ_0.

В дополнение к этому на рис. 12 здесь построены схематически начальные участки линий λ_0, l_γ и l_δ фазовой функции $\psi_1(\zeta, x, z)$ из (3.30), имеющей седловую точку

$$\zeta = \zeta_0(x) = \delta_0 \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2}}, \quad (H = 2H_1 - z),$$

отвечающие пяти последовательно-возрастающим значениям расстояния $x > 0$. (Концевые участки стационарных линий λ_0, l_γ и l_δ на рисунке не указаны.) Рис. 12 дает представление о том, в какой последовательности "открываются" области (B_k) из п. 2, содержащие корни дисперсионного уравнения (3.4)[*)], вычеты в которых следует учитывать при построении поля интерференционных мод при значении x, отвечающем рассматриваемой схеме k из рис 12. На рис. 13 приведены подобные же построения для фазовой функции $\psi_2(\zeta, x, z)$ из (3.31).

Пусть $\zeta = \zeta_0$ – один из корней уравнения (3.4), попадающий в некоторую область (B_k), а

$$\vec{I}_0(\zeta_0, x, z) = \vec{A}_0(\zeta_0, \varkappa) \exp[-\varkappa\psi(\zeta_0, x, z)] \quad (3.32)$$

[*)] Расположенные на плоскости (ζ) в областях (B_k) в соответствии с данными из рис. 8.

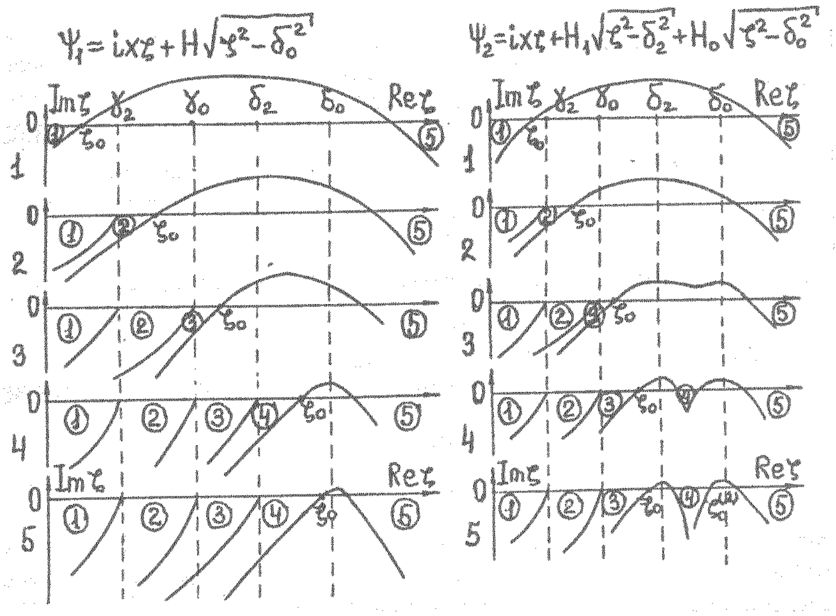

Рис. 12, 13.

обозначает вычет, вычисляемый по (3.29) в точке $\zeta = \zeta_0$ подинтегральной функции из спектрального представления (2.22) исследуемого поля смещений из (2.21). Тогда для поля смещений $\vec{u}_0$, отвечающего такому вычету (образующему поле нестациоранрной моды в корне $\zeta = \zeta_0$) получается качественно представление вида

$$\vec{u}_0 = \mathrm{const} \int\limits_0^{\varkappa_0} \vec{A}_0(\zeta_0, \varkappa) F\left(i\varkappa \frac{v_{s1}}{h}\right) e^{i\varkappa\tau - \varkappa\psi(\zeta_0, x, z)} d\varkappa, \qquad (3.33)$$

которое и следует несколько уточнить.

Представляя фазовые функции из (3.30), (3.31) в комплексной форме

$$\psi_q(\zeta_0, x, z) = \mathrm{Re}\,\psi_q(\zeta, x, z) + i\,\mathrm{Im}\,\psi_q(\zeta_0, x, z), \qquad (3.34)$$

где

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\psi_1 &= x\eta + (2H_1 - z)\operatorname{Re}\sqrt{\zeta_0^2-\delta_0^2},\\
\operatorname{Im}\psi_1 &= x\xi + (2H_1 - z)\operatorname{Im}\sqrt{\zeta_0^2-\delta_0^2},\\
\operatorname{Re}\psi_2 &= x\eta + H_1\operatorname{Re}\sqrt{\zeta_0^2-\delta_0^2} + (z-H_1-1)\operatorname{Re}\sqrt{\zeta_0^2-\delta_2^2},\\
\operatorname{Im}\psi_2 &= x\xi + H_1\operatorname{Im}\sqrt{\zeta_0^2-\delta_0^2} + (z-H_1-1)\operatorname{Im}\sqrt{\zeta_0^2-\delta_2^2},
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

для экспоненциального множителя из (3.33) будем иметь

$$
\begin{gathered}
e^{i\varkappa\tau-\varkappa\psi(\zeta_0,x,z)} =\\
= e^{-\varkappa\operatorname{Re}\psi_q(\zeta_0,x,z)}\exp i\varkappa[\tau-\operatorname{Im}\psi_q(\zeta_0,x,z)].
\end{gathered}
\tag{3.36}
$$

Такое выражение отвечает корню

$$\zeta_0 = \xi - i\eta$$

дисперсионного уравнения (3.4) (не зависящего от точек (x, z) наблюдения поля), попадающему при рассматриваемых (фиксированных) значениях x и z в какую-то частичную область (B_k), все боковые границы которой образованы стационарными линиями фазовой функции $\psi_q(\zeta, x, z)$ из (3.36)

$$\operatorname{Im}\psi_q(\zeta,x,z) = I_{q\kappa}(x,z) = \mathrm{const} \tag{3.37}$$

с различными постоянными в правых частях. При этом точки $c_\kappa(x,z)$ и $d_\kappa(x,z)$ выхода на вещественную ось (основного листа комплексной плоскости (ζ)) боковых линий (3.37) каждой частичной области (B_κ) образуют набор непересекающихся (вещественных) промежутков (c_κ, d_κ), находящихся с областями (B_κ) во взаимно-однозначном соответствии.

9. И вот, если теперь воспользоваться элементраным свойством стационарных линий мнимой части регулярной функции $\psi_q(\zeta,x,z)$ (содержащей в качестве параметров x и z), то окажется, что при любом расположении корня $\zeta=\zeta_0$ уравнения (3.4) внутри фиксированной частичной области (B_κ), в промежутке (c_κ, d_κ) с тем же индексом κ найдется такая точка $\zeta=\xi_0$, что при рассматриваемых значениях x и z окажется справедливым равенство

$$\operatorname{Im}\psi_q(\zeta_0,x,z) = \operatorname{Im}\psi_q(\xi_0,x,z). \tag{3.38}$$

Правая часть такого равенства легко оценивается качественно и приводит к простой приближенной оценке структуры осцилляционного члена из выражения (3.36), содержащего время τ и входящего в представление (3.33) рассматриваемой моды.

Относительно же амплитудного множителя

$$\exp[-\varkappa \operatorname{Re} \psi_q(\zeta_0, x, z)] \tag{3.39}$$

из (3.36), зависящего от x и z и отвечающего рассматриваемому корню $\zeta = \zeta_0$ дисперсионного уравнения, в общем случае не удается высказать простых оценочных суждений. (Кроме прикидочных количественных оценок, производимых на основе реперных отметок на стационарных линиях (3.37), ограничивающих область (B_κ), в которой корень $\zeta = \zeta_0$ расположен.)

Однако в особых случаях, когда в некоторых из частичных областей (B_κ) обнаруживаются корни (или группы корней), расположенные кучно в весьма тесной окрестности точек вещественных промежутков (c_κ, d_κ), в качестве приближенной (качественной) оценки величины (3.39) можно взять ее значение в некоторой "средней точке" $\zeta = \widetilde{\zeta}_0 = \widetilde{\xi}_0 - i\widetilde{\eta}$ упомянутой группы, в которой $\widetilde{\eta} > 0$ мало.

Пусть, например, рассматривается мода с фазовой функцией $\psi_2(\zeta, x, z)$ из (3.34), (3.35) при параметрах γ и δ из (3.5′), у которых $\delta_2 < \delta_0$.

Полагая $\widetilde{\zeta}_0 \approx \xi_0$ и пренебрегая, ради простоты, погрешностями порядка $O(\tilde{\eta})$, сначала допустим, что

$$c_\kappa < \xi_0 < d_\kappa < \delta_2. \tag{3.40}$$

Тогда, если положить

$$y = z - H_1 - 1, \quad \xi_0 = a_0, \quad \sqrt{\delta_2^2 - \xi_0^2} = b_0$$

$$H_1\sqrt{\delta_0^2 - \xi_0^2} = \chi_0, \tag{3.41}$$

и ввести обозначения

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{\kappa}, \quad \vec{n} = n_x\vec{i} + n_z\vec{\kappa}, \quad n_x = \frac{a_0}{\delta_2}, \quad n_z = \frac{b_0}{\delta_2}$$

для радиус-вектора $\vec{r}$ точки наблюдения и орта $\vec{n}$ нормали к фронту волны, то для подинтегральной функции из (3.33) получится приближенное выражение

$$\vec{u}(\varkappa, x, z) = \vec{A}_0(\zeta_0, \varkappa) F\left(i\varkappa\frac{v_{s1}}{h}\right) e^{-\varkappa\widetilde{\eta}x} \exp i\varkappa\left[\tau - \frac{\vec{n}\vec{r}}{v_{s2}}\, v_{s1} - \chi_0\right] \tag{3.42}$$

типа плоской волны с фазовой функцией, определенной по (3.38) достаточно точно.

Что же касается амплитудного множителя $\exp(-\varkappa\widetilde{\eta}x)$, то ему можно придавать известный количественный смысл в случаях расположения корня (или группы корней) уравнения (3.4) в тесной окрестности промежутка (c_κ, d_κ) (как это наблюдается, например, на рис. 8_3 и 8_4). В целом, мода (3.33), (3.42) имеет вид затухающей (по направлению оси ox) плоской волны, распространяющейся в направлении орта $\vec{n}$ из (3.41) под углом φ к оси ox, где

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{\xi_0}\sqrt{\delta_2^2 - \xi_0^2}. \tag{3.43}$$

Иллюстрация существования в рассматриваемых средах волн такого типа дана в §4 в п. 7 и 8.

Если же вместо (3.40) оказывается

$$\tilde{\xi}_0 \approx \xi_0 \quad \text{и} \quad \delta_2 \lesssim \widetilde{\xi}_0 \lesssim \delta_0, \tag{3.44}$$

то для $\mathrm{Re}\,\psi_2$ и $\mathrm{Im}\,\psi_2$ из (3.35) получаются приближенные выражения

$$\mathrm{Re}\,\psi_2 \approx \widetilde{\eta} + y\sqrt{\widetilde{\xi}_0^2 - \delta_2^2}, \quad \mathrm{Im}\,\psi_2 = x\xi_0 + \chi_0,$$

в которых использованы обозначения из (3.44). Вследствие этого для подинтегральной функции из представления моды (3.33), вместо (3.42) будем иметь

$$\bar{U}(\varkappa, x, z) = \vec{A}_0(\xi_0, \varkappa) F\left(i\varkappa\frac{v_{s1}}{h}\right) e^{-\varkappa[\widetilde{\eta}x + y\sqrt{\widetilde{\xi}_0^2 - \delta_2^2}]} \times$$
$$\times \exp i\varkappa[\tau - \xi_0 - \chi_0]. \tag{3.45}$$

Это соответствует типичной поверхностной волне, распространяющейся со скоростью v из промежутка $v_{s2} < v < v_{s0}$[*)] и затухающей экспоненциально при углублении точки наблюдения в

[*)] В этом проще убедиться после перехода от безразмерных переменных τ, x и др. к соответственным размерным величинам $t = \tau\frac{h}{v_{s1}}$, $\widetilde{x} = xh$ и др.

полупространство $z > H_1 + 1$. Наконец, в случае $\xi_0 > \delta_0$, дело обстоит примерно так же.

Не задерживаясь на обсуждении аналогичного (и более простого) случая поля типа S_0S_0 с фазовой функцией $\psi_1(\zeta, x, z)$ из (3.30), лишь отметим, что значения амплитудных экспоненциальных множителей из (3.42) и (3.45) нетрудно было бы существенно уточнить на основе применения численных методов оценки значений радикалов из (3.30) и (3.31).

10. Вследствие очевидной особой роли в рассматриваемых задачах корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионных уравнений, в заключение раздела уместно еще раз вернуться к вопросу о численном определении таких корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ и о наиболее рациональных алгоритмах построения их линий l_p.

Для построения корней $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ дисперсионных уравнений была разработана логически разветвленная быстро работающая программа (для персонального компьютера), описание которой в деталях потребовало бы слишком большого места. Поэтому здесь приходится ограничиться лишь самым необходимым, а именно: изложением исходных положений, на которых построена программа, а также – общей схемой ее работы. Что же касается исходных положений, то к ним можно отнести следующие известные факты:

1) Корни $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ дисперсионного уравнения располагаются на многолистной римановой поверхности (ζ) дискретно и почти всегда оказываются простыми.

2) При $\kappa = 0$ конечное их число ($\leqslant 64$ в случае "трехслойной" среды) располагается (на различных листах римановой поверхности) в областях

$$|\zeta| < R_0 < \infty,$$

а остальное (неограниченное) их множество находится на бесконечности. При возрастании $\kappa > 0$ корни последовательно могут приходить в выбираемую конечную область (B), в которой производятся оценки полей.

3) В упомянутой области (B) (выбранной, например, в форме прямоугольника), ограниченной простым контуром l, общее число корней N и сумма их координат $\sum \zeta_\kappa$ (при $\kappa = \text{const}$)

$$N = \Delta\big|_{(l)} \arg \Delta(\zeta); \;\; \sum_k \zeta_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(l)} \zeta \, \frac{\Delta_\zeta(\zeta, \kappa)}{\Delta(\zeta, \kappa)} \, d\zeta \qquad (3.46)$$

могут быть определены при помощи двух теорем Коши, сформулированных в п. 14, §4, [1]. При этом производную по ζ от левой части дисперсионного уравнения

$$\Delta(\zeta, \kappa) = 0 \tag{3.47}$$

допустимо вычислять методом численного дифференцирования.

4) Значение любого корня $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ дисперсионного уравнения (3.47), определенного в точке (ζ_0, κ_0), может быть продолжено в (любую) область $\kappa > \kappa_0$ на основании конечно-разностной реализации решения задачи Коши из п. 6, §4, [1] для уравнения (4.30) из [1], т.е.

$$\frac{d\zeta}{d\kappa} = -\frac{\Delta_{\varkappa}(\zeta, \kappa)}{\Delta_{\zeta}(\zeta, \kappa)},$$

при начальных данных $\zeta = \zeta_0$ при $\kappa = \kappa_0$.

Чтобы пояснить принцип работы программы, допустим, что требуется определить корни $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ уравнения (3.47) в заданной области (B) как функции от частотного параметра $\kappa \geqslant 0$. Для определения корней выбирается некоторый (достаточно малый) шаг $\Delta\kappa > 0$ и рассматривается последовательность значений

$$\kappa_l = (l-1)\Delta\kappa, \quad (l = 1, 2, 3, \ldots). \tag{3.48}$$

На 1-ом шаге процесса при $\kappa = 0$ применением теорем Коши из (3.46) к таким частям области (B), в которых находится не более одного корня уравненя (3.47) определяется значение $\zeta = \overset{\circ}{\zeta}_n$ всех (особых) корней, находящихся в области (B). Найденные при $\kappa = 0$ значения $\overset{\circ}{\zeta}_n$ корней уточняются по Ньютону, а затем продолжаются в требуемую частотную полосу

$$0 \leqslant \kappa < \kappa_0. \tag{3.49}$$

На 2-ом шаге процесса 1-ая теорема Коши применяется при возрастающих значениях $l > 1$ и κ из (3.48) до встречи с такими значениями

$$l = l_1 > 1 \quad \text{и} \quad \kappa_1 = (l_1 - 1)\Delta\kappa, \tag{3.50}$$

при которых число корней N_2 в области (B) изменяется на единицу $(N_2 = N_1 \pm 1)$.

Если оказалось

$$N_2 = N_1 - 1, \tag{3.51}$$

что отвечает приходу из области (B) одного из корней $\zeta = \overset{\circ}{\zeta}_n(\kappa)$, которые уже были определены в полосе (3.49) на 1-ом шаге процесса, то процедура 2-го шага процесса заканчивается.

Если же при $\kappa = \kappa_1 > 0$ оказалось

$$N_2 = N_1 + 1,$$

что отвечает приходу в область (B) нового корня, то применяется еще и 2-ая теорема Коши из (3.46), приводящая к сумме всех корней из области (B) в момент $\kappa = \kappa_1$ из (3.50) в виде

$$\sum_{(2)} \zeta_k^{(2)}(\kappa_1) = \sum_{(1)} \zeta_k^{(1)}(\kappa_1) + \zeta(\kappa_1). \tag{3.52}$$

Первое слагаемое из правой части здесь обозначает известную уже сумму (всех) корней из области (B), обнаруженных на первом шаге процесса при $\kappa = 0$ и продолженных в область (3.49). Второе же слагаемое $\zeta(\kappa_1)$ из (3.52) отвечает новому корню, вошедшему в область (B) при изменении κ в промежутке $(0, \kappa_1)$. Его приближенное значение определяется из (3.52), как разность сумм, значения которых известны. Это значение уточняется по Ньютону, а затем оно продолжается (аналитически) в полосу из (3.49).

На 3-ем шаге процесса 1-ая теорема Коши из (3.36) применяется при возрастающих значениях $l > l_1$ и $\kappa > \kappa_1$ до встречи с такими значениями

$$l = l_2 > l_1 \quad \text{и} \quad \kappa_2 = (l_2 - 1)\Delta\kappa, \tag{3.53}$$

при которых число корней N_3 в области (B) изменяется на единицу и т.д.

Не касаясь здесь многочисленных деталей и "тонкостей", остается отметить, что программа, основанная на указанном алгоритме, работает вполне надежно и достаточно быстро.

§4. О численных исследованиях интерференционных волновых полей в средах, содержащих лишь один тонкий слой

1. Из результатов §1 и 2 следует, что в качественном отношении структуры математических представлений волновых полей в задачах для произвольной пачки тонких слоев, находящейся в (жестком) контакте с полупространствами, не отличается от структуры полей, отвечающих случаю однослойной пачки, рассмотренной в статье [1]. В таких задачах (при выбранных фиксированных значениях параметров полупространств, окаймляющих пачку) тождественными оказываются фазовые функции спектральных (внутренних) интегралов – представлений полей в форме метода Лэмба. Вследствие этого тождественными оказываются и системы стационарных контуров λ_0 и $l_{\gamma,\delta}$ фазовых функций, в которые деформируется исходный путь интегрирования λ указанных интегралов. Различия же в представлениях полей проистекают лишь из-за существенного усложнения структуры медленно-изменяющихся частей подынтегральных выражений внутренних спектральных интегралов, в том числе и левых частей дисперсионных уравнений среды. Последнее же может приводить к некоторому усложнению структуры и логики алгоритма определения корней дисперсионного уравнения на основе использования теоремы Коши о корнях аналитических функций. Следствием же всего этого, по-видимому, окажется известное увеличение времени расчетов, требующихся на выяснение расположения на комплексной плоскости (ζ) корней дисперсионного уравнения, на решение систем уравнений типа (1.26)–(1.28) для функциональных коэффициентов $X_n^{\pm}$ и $Y_n^{\pm}$ подынтегральных функций из (1.40)–(1.43) и др. Однако это не может отразиться на качественной стороне подходов к изучению волновых полей. Поэтому предлагаемые и используемые здесь методы количественного изучения волновых полей в "трехслойной" и "двухслойной" средах оказываются пригодными почти буквально и в случаях задач для многослойных тонкослоистых пачек.

2. Применяемые подходы к количественным исследованиям волновых интерференционных полей изложены в алгоритмической форме в §5 из [1], а также здесь в §3. При этом значительное внимание уделено изучению расположения на комплексной плоскости (ζ) корней $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ дисперсионных уравнений задач, проблемам вычисления внутренних (спектральных) интегралов, распространенных по стационарным контурам λ_0, l_γ и l_δ, а также вычислению вычетов подынтегральных функций в соответственных корнях $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ дисперсионных уравнений. Что касается вычислительных алгоритмов решения подобных проблем и численной их реализации, то их выбор производился при широком предварительном опробовании различных подходов, обсуждавшихся в §3, а также в §5 статьи [1].

В результате для расчета интерференционных волновых полей типа SV был разработан достаточно сложный в численном и логическом отношении вычислительный алгоритм на языке "Си", содержащий свыше 10^4 операторов. Он еще проходит всестороннее тестирование, при проведении которого мы пока ограничиваемся случаем одного тонкого SV слоя. Этап тестирования оказался крайне трудоемким, что связано, прежде всего, со сложностью структуры линий корней l_p и стационарных контуров λ_0 при численном вычислении спектральных функций, сочетание которых приводит часто к "нестандартным ситуациям". Трудоемкость численных исследований обусловлена также наличием в вычислительном комплексе большого числа оригинальных программ, решающих частные задачи и реализующих специальные (не всегда стандартные) математические методы, нуждающиеся как в отдельном тестировании, так и в тестировании совместно с другими элементами (функциями) программы. При этом в процессе серии опробований выяснилось, что для эффективного применения вычислительного комплекса в условиях практики было бы крайне желательно иметь возможность применять алгоритмы как в интерактивном режиме, так и в автоматическом (или в локально-автоматическом режиме). Последнее же предполагает возможность вычисления как полного волнового поля, так и физически независимых его частей, на которые поле расщепляется в нашем методе естественным путем.

Однако в настоящее время вычисление стационарных интегралов по контурам типа λ_0 и – интерференционных мод удалось автоматизировать полностью в (наиболее часто встречающихся) случаях, когда предварительное выяснение расположения линий корней l_ζ относительно контуров λ оказывается "нормальным" (т.е. достаточно простым). Случай тройственной близости точки ветвления и корня $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ дисперсионного уравнения как друг к другу, так и к точкам ζ контура λ_0, равно как и случай корней $\zeta = \zeta_p(\kappa)$, перемещающихся на конечном интервале $\Delta\kappa$ в тесной окрестности пути интегрирования λ_0 (и некоторые другие) трубуют еще вмешательства исследователя.

Подобным же образом, вычисление корней $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ дисперсионного уравнения, производящееся в отдельном программном блоке, иногда требует еще вмешательства исследователя в "непредвиденных" случаях (когда, например, корень располагается в тесной окрестности точки ветвления дисперсионного уравнения). Поэтому нашу разработку полной, логически-замкнутой программы расчетов и изучения интерференционных волновых полей мы не считаем завершенной; и работы по ее совершенствованию будут продолжены. (Заметим только, что подобный период "обкатки-становления" сложных программ следует считать обычным уделом всех программ расчета многопараметрических систем с большим числом алгоритмов и разветвленной логикой.)

3. Изложение обстоятельства, в совокупности с трудоемкостью любой обстоятельной интерпретацией рассчитываемых волновых полей, побудили нас отказаться от попыток провести развернутую иллюстрацию вычислительных материалов, полученных, в основном, в процессе рассмотрения разрозненных задач при "обкатке" программы. Поэтому было решено ограничиться здесь скупым набором случаев расчета полей, не претендующих на систематичность, но демонстрирующих все же достаточно отчетливо, во-первых, вычислительные возможности применяемых методов, во-вторых, значительные их возможности в отношении физической интерпретации рассчитываемых волновых полей и, наконец, – возможности в интерпретации волновых полей в смысле сейсморазведки.

Мы приводим здесь сначала несколько групп теоретических сейсмограмм, отвечающих профильным наблюдениям при фиксированных значениях $z = \text{const}$ и $x = x_k$, где x_k – безразмерные эпицентральные расстояния точек наблюдения поля. При этом в случае "трехслойной" модели сред рассматриваем несколько значений фазовых функций (из числа упомянутых в п. 8 §3 и делаем акцент на представлении интерференционных волновых полей в виде суммы нескольких слагаемых, имеющих достаточно четко различный физический смысл. Последнее свойство характерно для применяемого метода, так как в нем общее интерференционное поле вычисляется почленно в форме слагаемых упомянутых типов, объединяемых в сумму, представляющую полное волновое поле в среде. Такое разбиение поля на слагаемые восходит к формуле (2.30) из п. 5 §2 и ко всему, что с нею связано...

Что же касается формы изложения, то представляется целесообразным сначала приводить теоретические сейсмограммы, отвечающие конкретным схемам наблюдения и изучения поля, а затем обращаться к их комментариям и дополнениям.

4. Группа 1 (теоретических сейсмограмм).

Рассматривается "трехслойная" среда из п. 1 §3, при том же источнике $\tilde{O}$, (1.5), (1.4) с функцией $f(t)$ из рис. 3 и 4 (с максимумом спектра $\tilde{\varkappa}_0 = 5$) при обозначениях из (3.1), (3.2) и при параметрах среды из (3.2′), наконец при схеме наблюдений (3.3), выраженной в безразмерных переменных. Расстояние H_0 источника от кровли тонкого слоя $\nu = 1$ и расстояние H_2 подошвы тонкого слоя от профиля (3.3) равны

$$H_0 = H_2 = 10.$$

В пикетах κ, т.е. $z = x_\kappa$ профиля

$$x = x_\kappa = (0, 5, 10, 15, 20, 25) \tag{4.1}$$

($\kappa = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) строится полное поле

$$\vec{u} \equiv \vec{U}(x) = \sum_{q=1}^{4} \vec{U}_q(x), \tag{4.2}$$

возбуждаемое в среде источником $\tilde{O}$. В рамках формульной терминологии из п. 6 §1 полное поле преломленной (в полупространство $\nu = 2$) волны слагается в пикетах $x = x_\kappa$ профиля из четырех независимых (составных) групп волн, определяемых символами

$$(p_0, p_2),\ (p_0, s_2),\ (s_0, p_2),\ (s_0, s_2) \tag{4.3}$$

или

$$\begin{aligned} \vec{U}_1((p_0, p_2); x) \equiv \vec{U}_1(x), \vec{U}_2((p_0, s_2); x) \equiv \vec{U}_2(x),\\ \vec{U}_3((s_0, p_2); x) \equiv \vec{U}_3(x), \vec{U}_4(s_0, s_2); x) \equiv \vec{U}_4(x). \end{aligned} \tag{4.4}$$

На рис. 14 представлены сейсмограммы составляющих u_x и u_z полей полных суммарных волн из (4.2), вычисленных для каждого пикета κ профиля (4.1). Сплошные (штриховые) линии, построенные в одном масштабе, отвечают горизонтальным u_x (вертикальным u_z) составляющим суммарного поля смещений. При

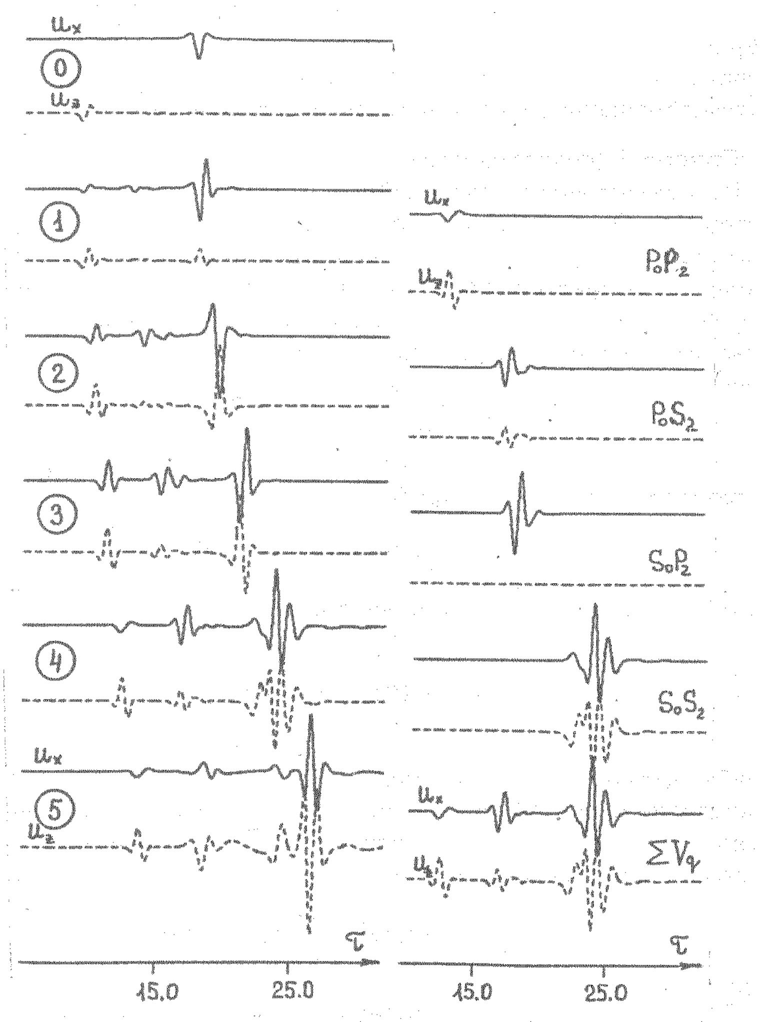

Рис. 14, 15.

этом, с целью экономии места сейсмограммы u_x и u_z приведены на одном рис. 14 в виде шести пар трасс, отвечающих всем пикетам κ.

На рис. 15 в такой же форме приведены сейсмограммы полных (составных) преломленных волн типов из (4.3), вычисленных для одного и того же пикета $x_4 = 20$. Они изображены на верхних четырех парах трасс, справа от которых приведены соответствующие символы из (4.3). А на последней (пятой) паре трасс приведены сейсмограммы сумм всех волн из (4.3), вычисленных в точках (x, τ) трассы 4. С точностью до построения кривых они совпадают с сейсмограммами, изображенными на трассах 4 из рис. 14.

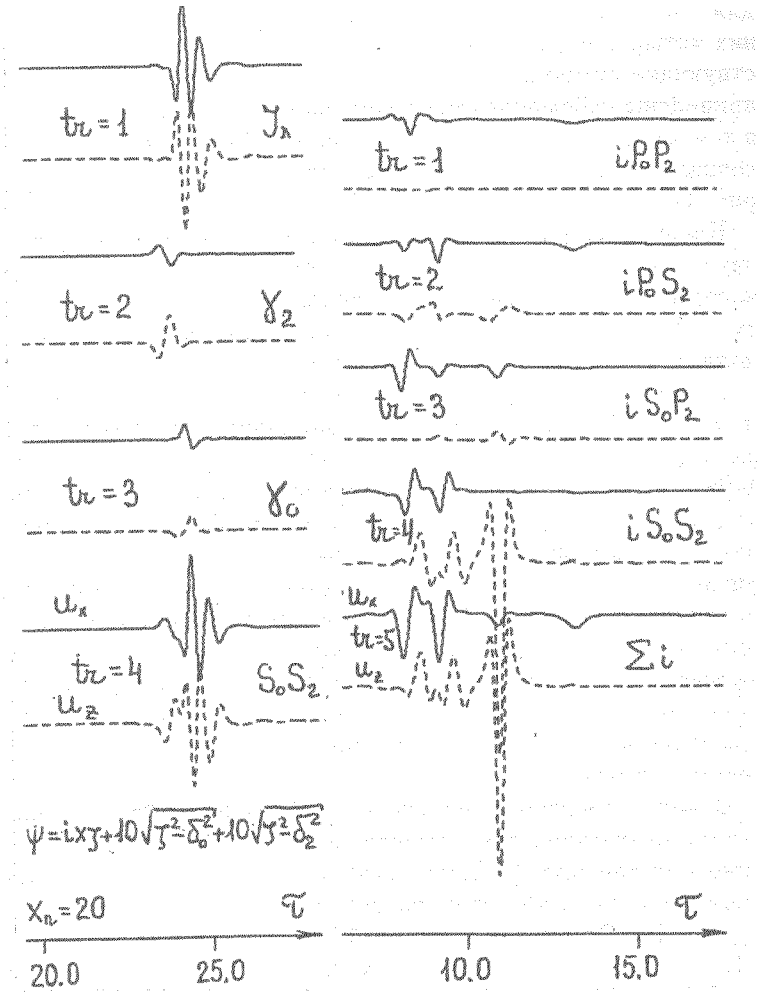

Рис. 16, 17.

Наконец на рис. 16 приведены в прежних предположениях на двух нижних (четвертых) трассах сейсмограммы u_x и u_z (составного) поля S_0S_2 из рис. 15, отвечающие пикету $x_4 = 20$, т.е. пикету 4. А на верхних трех парах (теоретических) трасс приведены поля u_x и u_z, из которых указанное поле составляется.

В рассматриваемом случае к ним относятся поля из трасс tr $= 4$, вычисляемые по спектральным интегралам из (2.30), распространенным соответственно по стационарному контуру $\lambda_0(\text{tr} = 1)$, по петле Γ_2, охватывающей разрез с вершиной в точке $\zeta = \gamma_2$ (tr $= 2$) и, наконец, по петле Γ_0, охватывающей разрез с вершиной в точке ветвления $\zeta = \gamma_0$ (tr $= 3$). По своим физическим свойствам такие поля родственны обычным неинтерференционным полям: 1) объемной преломленной волны S_0S_2; 2) головной волны Γ_2 и головной волны Γ_0. Поэтому их естественно называть интерференционными упомянутыми волнами, а их свойства следует выяснять обычными корреляционными способами, применяемыми к соответствующим теоретическим (профильным) сейсмограммам.

В числе составных частей поля S_0S_2 из рис. 16 здесь отсутствует слагаемое, отвечающее модам во всех корнях дисперсионного уравнения (3.4), пересекаемых первичным путем интегрирования λ из (1.43) при его деформации в стационарные линии λ_0, Γ_2 и Γ_0. Отсутствие на рис. 14–16 такого поля является следствием принятой при расчетах точности вычислений, в рамках которой упомянутое слагаемое оказалось пренебрежимо малым. Последнее же обусловилось большими значениями параметров x, H_0 и H_2 фазовой функции

$$\psi = ix\zeta + 10\sqrt{\zeta^2 - \delta_0^2} + 10\sqrt{\zeta^2 - \delta_2^2}$$

из (1.43), отвечающей рассматриваемой волне S_0S_2.

В заключение уместно отметить, что расчеты всех волн, входящих в состав волн типов из (4.3), требуют в среднем порядка 10 минут работы Pentiuma 300.

5. Группа 2 (теоретических сейсмограмм).

В сейсмограммах группы 1 не проявились (вследствие их малости) интерференционные моды в корнях $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ дисперсионного уравнения (3.4), пересекаемых исходными путями интегрирования λ интегралов, определяемых символами (4.3), при их деформации в стационарные линии λ_0, l_γ и l_δ из (3.20) соответствующих фазовых функций из (4.2). Как легко видеть это произошло из-за весьма больших $H_0 = H_2 = 10$ значений расстояния источника от тонкого слоя и тонкого слоя от профиля.

Чтобы убедиться в этом, был осуществлен переход к данным из (3.2), в которых произведена замена параметров $v_{p1} = 3.6$ и $v_{s1} = 1.8$ на значения

$$v_{p1} \to 3.0; \quad v_{s1} \to 1.5,$$

(второго варианта среды), усиливающая несколько волноводные свойства тонкого слоя. Это приводило к следующим значениям относительных параметров сред

$$\gamma_0 = 0.38, \quad \delta_0 = 0.75, \quad \gamma_1 = 0.5, \quad \delta_1 = 1, \quad \gamma_2 = 0.27, \quad \delta_2 = 0.54, \tag{4.5}$$

при которых как раз и производились следующие расчеты полей в случае "трехслойной" среды.

В первой группе таких расчетов, иллюстрируемых на рис. 17–19 (где по идейному смыслу эти рисунки следует рассматривать в измененном порядке: 18, 19, 17), приводятся сейсмограммы составляющих поля смещений, отвечающие значениям $H_0 = H_2 = 0.5$ расстояний источника $\tilde{O}$ и точки наблюдения A поля от границ тонкого слоя. При этом рассчитываются суммарные поля смещений (всех волн) в пикете 3 (т.е. $x_\kappa = 15$) в случае источника $\tilde{O}$, характеризуемого максимумами спектра сигнала в источнике $\tilde{\varkappa}_0 = 5$ и $\tilde{\varkappa}_0 = 10$ (см. рис. 3, 4), воспроизведенные соответственно на рис. 18 и рис. 19. (Рисунку же 17 придается "заключающий смысл" в конце п. 5.)

На рис. 18 приведены (в такой же форме иллюстраций, как на рис. 14, 15) для пикета 3 (т.е. $x_\kappa = 15$) сейсмограммы различных волн, представленных в составляющие u_x (сплошные линии) и в составляющих u_z (штриховые линии). В форме суммарного поля всех волн они воспроизведены на трассах tr 9. На каждой же паре трасс из tr 5–8 приведены сейсмограммы-слагаемые, отвечающие отдельным вкладам в суммарное поле из tr 9 спектральных интегралов (т.е. интегралов, распространенных по стационарным контурам типа $\lambda_0 + l_\gamma + l_\delta$ из (2.30)), соответствующих каждой волне-слагаемому из (4.3). А на каждой паре трасс tr 1–4 приведены сейсмограммы-слагаемые, определяющие вклады в суммарное поле от всех мод, построенных по корням $\zeta = \zeta_p(\kappa)$

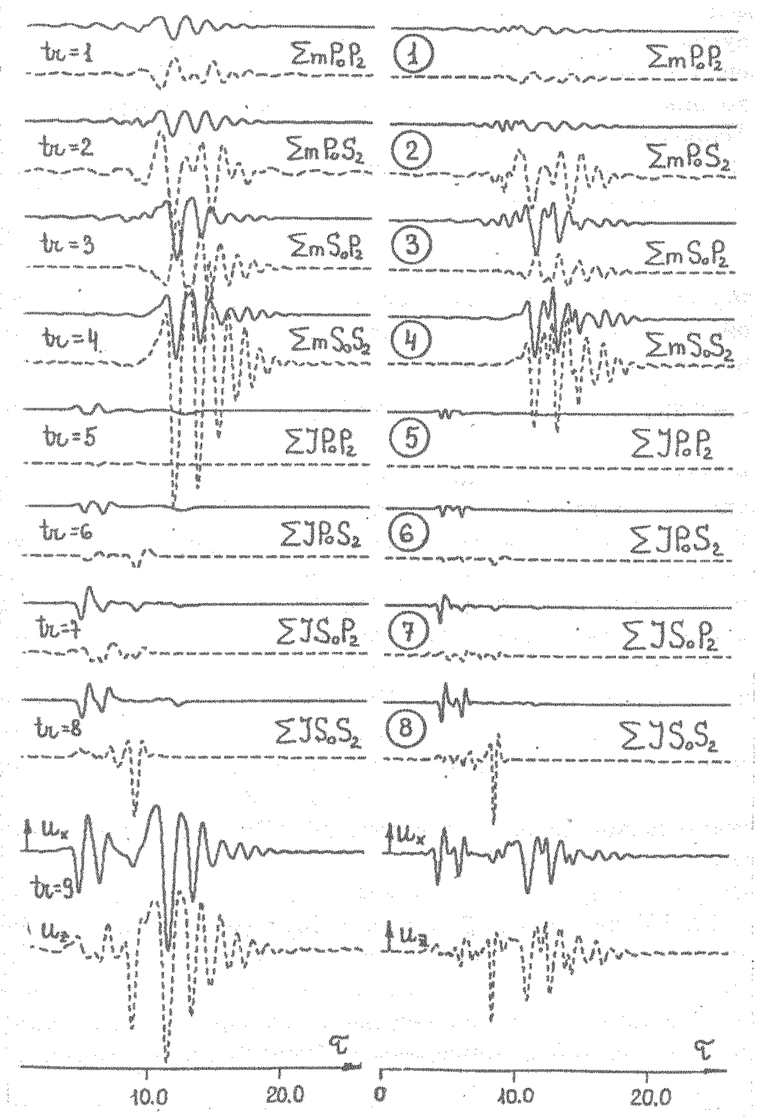

Рис. 18, 19.

дисперсионного уравнения, пересекаемых исходным контуром λ каждой волны из (4.3) при его деформации в соответствующие линии типа λ_0, l_γ и l_δ. При этом естественно, что сумма всех сейсмограмм из tr 1–8 как раз и составляет сейсмограммы из tr 9.

Подобным же образом дело обстоит и на других пикетах $x = x_\kappa$ профиля, которые не приводятся здесь лишь из-за недостатка места. Общий же обзор трасс из рис. 18 указывает на существенное преобладание (на столь малых расстояниях источника и точки регистрации поля от границ тонкого слоя) полей смещений интерференционных мод. Последние излучают энергию волн из тонкого слоя (под углами $\varphi > 0$ к оси OX) в контактирующие с ним полупространства и, как выясняется на основании "профильных по H_2" расчетов полей в случае волн типа S_0S_2, – могут распространяться от слоя (без заметного поглощения) на значительные расстояния, выражаемые в толщинах тонкого слоя.

Что же касается рис. 19, то он имеет такой же смысл, и отличается от рис. 18 лишь максимумом ($\tilde{\varkappa}_0 = 10$) спектра сигнала в источнике. Наконец, на рис. 17 (в такой же форме) приведены суммарные сейсмограммы полей, возбужденных источником с максимумом спектра сигнала $\tilde{\varkappa}_0 = 5$ в случае отсутствия в среде тонкого слоя $\nu = 1$. На первых четырех трассах здесь также даны (по отдельности) сейсмограммы неинтерференционных волн каждого из типов из (4.2). А на пятой трассе приведены суммы полей смещений волн всех типов из (4.2). По своей структуре трасса 5 оказалась интерференционной и достаточно сложной, что объясняется в большой степени низкочастотностью сигнала возбуждающего поле. Количественное изучение такого рода полей позволяет определять приближенно участки сейсмограмм ("заслоненные" интерференционными модами, как "помехами"), на которых в случае рис. 18 и 19 должны были бы регистрироваться интерференционные объемные и головные волны. Это – первый шаг к общей расшифровке (интерпретации) сложного полного волнового поля в среде.

6. Приведенные на рис. 18 и 19 сейсмограммы, состоящие, в основном, из наложения интерференционных мод, настолько сложны и запутаны (хаотичны), что разобраться в них едва ли возможно, если не опираться на некоторые (пока лишь элементарные) общие их свойства. Последние же, по-видимому, могут быть установлены на базе очевидного факта, что любая первичная мода как вычет подинтегральной функции внутреннего интеграла (из представления полей смещений повторными интегралами вида (1.39), (1.41), или же вида (2.21) и (2.22)), в некотором корне $\zeta = \zeta_0(\varkappa)$ дисперсионного уравнения, представляется выражением вида (3.33). В некоторых случаях, как, например, при оценке поля мод волны S_0S_2 с фазовой функцией из (3.31)) (при значениях вещественных параметров среды из (4.5)) среди корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения оказываются скопления-группы корней, располагающиеся в тесной окрестности вещественной оси. Для таких корней представлению моды можно придать вид неоднородной плоской волны (3.42) (см. п. 8 и 9 §3), распространяющейся под углами $\varphi > 0$ без чрезмерного затухания на значительные расстояния.

Появление таких мод в наиболее чистой форме возможно лишь в случаях, когда дисперсионные уравнения среды имеют (в областях (B_κ) из п. 2 §3) корни $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$, образующие достаточно низкочастотные скопления-группы (подобные группе 2 корней из рис. 8_4), располагающиеся в тесной близости вещественной оси комплексной плоскости (ζ). Такие моды мы обнаруживали в ряде случаев значений вещественных параметров γ и δ "трехслойной" среды. В случае параметров (4.5) рассматриваемой среды они обнаруживаются (правда, не в наиболее "яркой" форме) при наблюдении сейсмограмм волн типа S_0S_2 и S_0S_0. Однако мы не задерживаемся здесь на изложении получающихся результатов, во-первых, потому что к указанному вопросу предполагается обратиться специально и обсудить его на достаточно представительном множестве моделей "трехслойных" сред. А, во-вторых, же по той причине, что при рассмотрении обязательных иллюстраций для "двухслойной" среды аналогичный вопрос встает сам собой, причем он допускает изложение существа дела в наиболее простой и наглядной форме.

7. Обращаясь к иллюстрациям волновфых полей, возбуждаемых поверхностным нормальным воздействием (1.3), (1.4) в "двухслойных" средах из п. 7 §1, мы ограничимся рассмотрением лишь значений относительных параметров сред

$$\gamma_1 = 0.33, \quad \delta_1 = 1.0, \quad \gamma_2 = 0.6, \quad \delta_2 = 1.2 \tag{4.9}$$

в случае высокоскоростного тонкого слоя, и значений

$$\gamma_1 = 0.5, \quad \delta_1 = 1.0, \quad \gamma_2 = 0.33, \quad \delta_2 = 0.65 \tag{4.10}$$

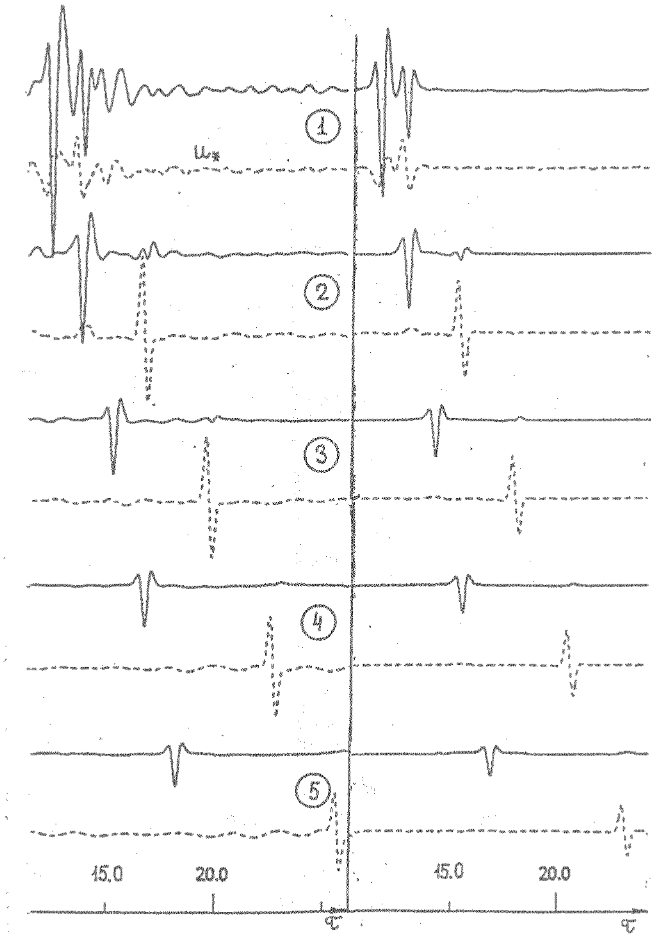

Рис. 20, 20 а.

в случае низкоскоростного (волноводного) слоя.

В качестве же примеров приведем здесь несколько сейсмограмм (рис. 20–24), которые, повидимому, можно считать типичными. При этом для подчеркивания влияния на поле сейсмограмм интерференционных волн, порожденных тонким слоем, в некоторых случаях интерференционные сейсмограммы будем сопровождать сейсмограммами, полученными в той же среде при отсутствии тонкого слоя (когда значения его параметров $\gamma_1, \delta_1, \rho_1$

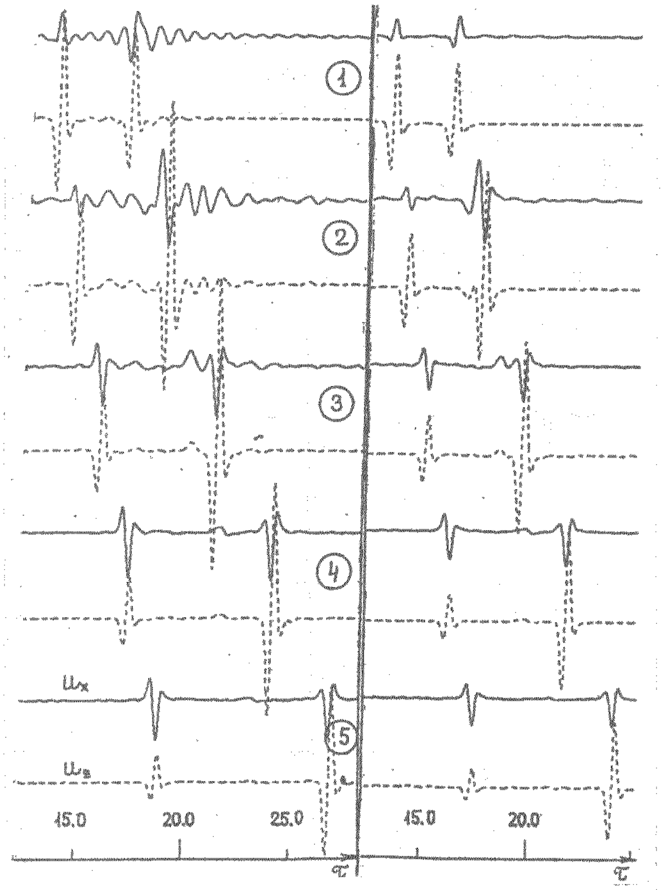

Рис. 21, 21а.

отождествляются со значениями параметров $\gamma_2, \delta_2, \rho_2$ подстилающего полупространства). Такая сейсмограмма в случае отсутствия слоя обозначается тем же номером, что и исходная интерференционная сейсмограмма, но имеющим индекс a справа.

При иллюстрациях здесь также рассматриваются профили эпицентральных расстояний

$$z = H_2, \quad x = x_\kappa = (5, 10, 15, 20, 25, 30), \tag{4.11}$$

пикеты которых обозначаются символами κ, при нескольких значениях $H_2 \geqslant 1$, указываемых на рисунках. При этом везде при-

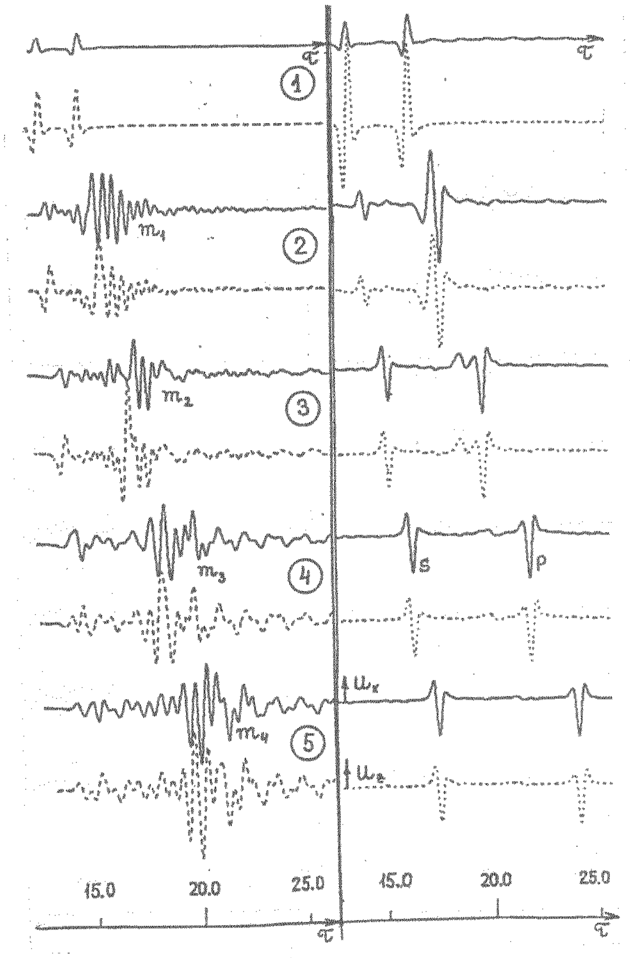

Рис. 22, 22а.

нимается случай зависимости воздействия от времени из (1.4), модуль спектра которого имеет максимум при

$$\tilde{\varkappa}_0 = 5 \tag{4.12}$$

(см. рис. 3 и 4).

Для каждого пикета наблюдений поля строятся сейсмограммы суммарных волновых полей (состоящих из продольной P- и поперечной S-частей), содержащих в себе как вклады от интегралов,

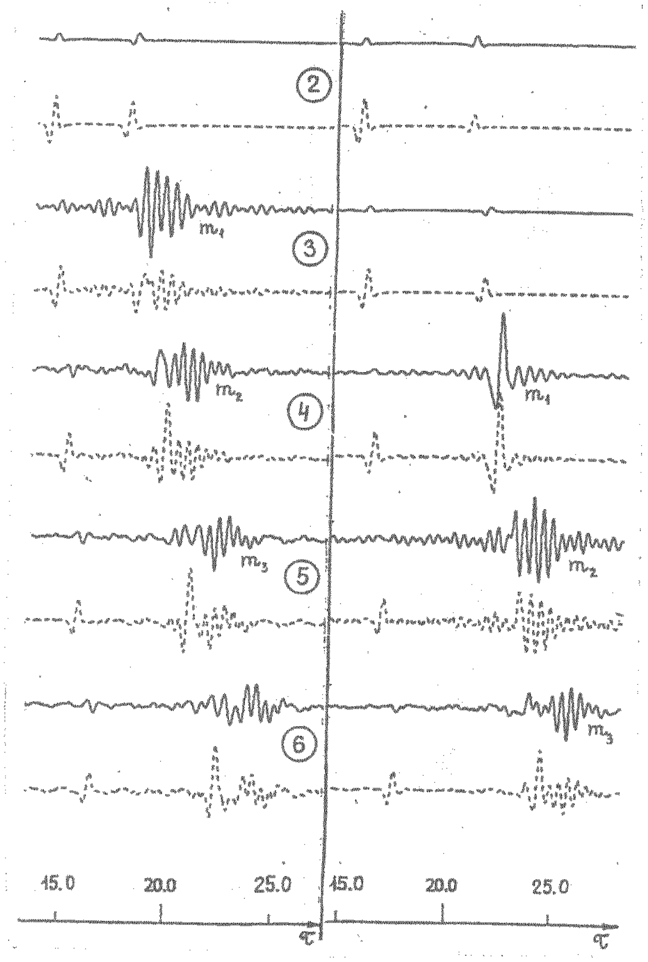

Рис. 23, 24.

распространенных по стационарным контурам λ_0, l_γ и l_δ, (порождающим интерференционные объемную и головные волны), так и вклады от вычетов во всех корнях $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионного уравнения (3.7), пересекаемых исходным контуром λ при его деформации в стационарные линии λ_0, l_γ и l_δ. При этом основной интерес здесь должно вызывать (по-видимому) качественное представление об особенностях распространения интерференционных мод относительно тонкого слоя с его срединной линией

OX. Что же касается приводимых сейсмограмм, то они страдают некоторой небрежностью формы. На них, в частности, не всегда присутствуют указатели осей составляющих полей смещений u_x и u_z, а также – повторные воспроизведения осей времени τ. Однако по существу все построения выполнены однотипно и в одном масштабе.

Рис. 20 относится к случаю высокоскоростного тонкого слоя $0 < z < 1$ в "двухслойной" среде с вещественными параметрами из (4.9) и с профилем регистрации поля, расположенным в полупространстве $z > 1$ на расстоянии $H_2 = 1$ его от границы $z = 1$ слоя. А рис. 21 отличается от рис. 20 только значением $H_2 = 10$ расстояния профиля регистрации поля от границы раздела $z = 1$ полупространства со слоем. В паре же с рис. 19 и 21 (с тем же номером, снабженным индексом a) приведены (для сопоставления) полные поля смещений в полупространстве $z > 0$, полученном описанной выше процедурой замены значений параметров $\gamma_1, \delta_1, \rho_1$ слоя на значения параметров $\gamma_2, \delta_2, \rho_2$ полупространства.

На рис. 20 и 21 обращает на себя внимание относительно малая роль интерференционных процессов в высокоскоростном тонком слое при формировании суммарного поля смещений. Правда, при переходе к более низкочастотным внешним воздействиям это влияние, конечно, возрастает.

Рис. 22, отвечающий уже случаю низкоскоростного (волноводного) тонкого слоя при параметрах сред из (4.10) и значении $H_2 = 10$, отличается от случая рис. 21 наличием настолько мощных интерференционных мод, что они практически "заслоняют" (как фоном помех) все объемные и головные интерференционные P и S волны. О расположении записей таких волн на сейсмограммах приближенно удается судить лишь по сейсмограммам из рис. 22а, отвечающим случаю отсутствия тонкого слоя.

Если при помощи поперечной фазовой функции $\tilde{\psi}_\delta(\zeta, x)$ из (3.11) построить стационарные линии λ_0 и l_γ этой функции для всех пикетов $x = x_\kappa$ из рис. 20, то при сопоставлении этих линий с линиями корней из области (B_2) $(\gamma_2 < \mathrm{Re}\,\zeta < \delta_2)$ на рис. 9_2 (в которой находится группа-(скопление) корней уравнения (3.7), располагающихся в тесной окрестности вещественной оси) нетрудно объяснить (качественно) вид интенсивных мод, помеченных на трассах пар сейсмограмм на рис. 20 символами $m_1 - m_4$.

Такие комплексные моды интенсивны и очень медленно затухают с увеличением расстояний x и H до величин в несколько десятков (толщин тонкого слоя). Поэтому в экспериментах они должны отчетливо наблюдаться. Они представляют собой чисто поперечные волны и именно вследствие этого они, вероятно, и были оставлены без внимания при изучении в слое вещественных поверхностных волн волноводного типа. Указанные волны можно назвать квази-поверхностными поперечными типа SV интерференционными модами, возбуждающимися в тонком $0 < z < 1$ низкоскоростном (волноводном) слое, контактирующим жестко с упругим полупространством $z > 1$.

8. Наконец, рис. 23 и 24 иллюстрируют распространение квази-поверхностных поперечных (типа SV) интерференционных мод в тонком волноводном слое с параметрами из (4.8) при наблюдении волн на профилях $x > 0$, удаленных от границы слоя на расстояния $H_2 = 20$ и $H_2 = 30$ в направлении оси OZ. На рис. 22–24 выбраны три параллельных профиля $O_\nu X$ $(\nu = 1, 2, 3)$ точек наблюдения (регистрации) поля, отстоящих от подошвы слоя соответственно на расстояниях $H_2 = 10$, $H_2 = 20$ и $H_2 = 30$. При этом пикеты κ наблюдения поля на профилях из рис. 23 и рис. 24 сдвинуты ("вниз") на один шаг по сравнению с пикетами из рис. 22.

Корреляционное обозрение сейсмограмм на рис. 22–24 отчетливо показывает, что волновая картина поля вне слоя связана с распространением интенсивной интерференционной модальной волны от тонкого слоя в сторону подстилающего полупространства.

Изучение деталей такого распространения требует специального исследования. В нем, по-видимому, придется отказаться (на время) от рассмотрения всего множества корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$, образующих приповерхностное скопление-группу, а изучать сначала моды, отвечающие одному из таких корней, выбираемому как наиболее характерному. При этом следует выяснить поведение поля моды в зависимости от частотного параметра $\varkappa$ корня $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$, а также от деталей пересечения этого корня исходным путем интегрирования λ при его деформации в стационарные контуры λ_0, l_γ и l_δ.

К таким исследованиям мы расчитываем обратиться уже в следующей нашей статье, где должны быть затронуты и общие вопросы физической интерпретации расчитываемых полей. Это должно положить действительное начало процессу получения физических следствий из наших исследований. Поэтому от прикладных качественных оценок здесь уместно пока воздержаться.

§5. Вместо заключения

В соответствии с замечаниями из п. 2 §4 о неполноте подбора приведенных в статье иллюстраций, представляется преждевременным обращаться к полноценным заключениям относительно главнейших аспектов обсуждаемой статьи. Многие из них, не получили еще должного освещения в выполненных численных исследованиях (относящихся к системам содержащим лишь один тонкий слой) вследствие отсутствия (при вычислениях) достаточно представительной сети вещественных параметров изучаемых сред. Некоторые же из них не рассматривались вовсе вследствие узости рамок статьи, как например любопытный случай генерации волн типа SH (через посредство волн типа SV) в задаче из §2 статьи [1] при возбуждении "трехслойной" среды сосредоточенным касательным воздействием. Поэтому всеобъемлющие заключения делать здесь еще рано. Однако на некоторые высказывания общего плана все же можно решиться.

1. Прежде всего можно утверждать, что применяемый метод расчета интерференционных волновых полей, основанный на методах контурного интегрирования и приводящий к расщеплению полей смещений на слагаемые, имеющие самостоятельный (не полностью еще выясненный) физический смысл, уже работает достаточно надежно и быстро на базе персональных компьютеров средней мощности.

Судя по повторяемости результатов независимых расчетов одних и тех же интерференционных полей, а также – по сопоставлению с результатами расчетов неинтерференционных волновых полей в средах, получаемых отождествлением параметров тонкого слоя в "трехслойной" среде с параметрами одного из полупространств, применяемая программа работает стабильно и надежно "почти всегда". Однако прямые количественные оценки точности ее работы еще не производились.

Факт представления рассчитываемых волновых полей суммой слагаемых, имеющих отчетливо-различный физический смысл, существенно облегчает сейсмическое толкование результатов расчетов. И это открывает значительные перспективы в задачах интерпретационного типа при сейсмических исследованиях.

Рассмотрение распределения линий корней $\zeta = \zeta_p(\kappa)$ на комплексной плоскости (ζ) приводит к заключению о существовании групп корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионных уравнений, имеющих малую мнимую часть $(0 < \mathrm{Im}\zeta_p \ll 1)$ и таких, что в этих группах один из радикалов $\sqrt{\zeta_p^2 - \delta_\kappa^2}$ $(\kappa = 1, 2)$, или оба таких радикала имеют малую вещественную часть $(0 < \mathrm{Re}\sqrt{\zeta_p^2 - \delta_\kappa^2} \ll 1)$, т.е. – оказываются практически чисто мнимыми.

Такие корни порождают моды, образующие необычные интерференционные группы, распространяющиеся с малым затуханием на большие расстояния (выраженные в единицах h тонкого слоя) и притом не только вдоль слоя, но и под значительным углом к его срединной плоскости. Подобные моды, имеющие мало общего с известными незатухающими модами, отвечающими группе вещественных корней дисперсионного уравнения, повидимому, еще не освещались в литературе, несмотря на очевидное их прикладное значение. Поэтому природа и свойства таких мод несомненно нуждаются в специальном обсуждении и, прежде всего, – в выяснении четких условий их существования, выраженных в соотношениях между вещественными параметрами $\gamma_\kappa, \delta_\kappa$ и ρ_κ "двухслойной" и "трехслойной" сред. После же проведения исследований в таком направлении, естественно, потребуется и выход в область слоистых пачек, состоящих (сначала) из двух и трех различных тонких слоев.

2. В заключительном разделе статьи представляется уместным задержаться коротко на общем вопросе, касающемся смысла исходных положений и идей разрабатываемого метода изучения интерференционных процессов в слоистых средах. Необходимость подобных обсуждений назревает потому, что при проникновении вглубь исследований приходится иногда покидать (в той или иной степени) исходный фундамент выбранного нами изначально подхода, в котором играло большую роль наличие в задаче больших параметров $H \gg 1$, $x \gg 1$, $\varkappa > 1$ и др. Оно открывало, в частности естественные пути в борьбе с осцилляционными затруднениями при вычислении интегралов для спектральных функций, а также приводило к представлению стационарных полей суммами слагаемых, каждому из которых удавалось придавать свой обособленный физический смысл. Последнее же оказывалось возможным, в основном, вследствие того обстоятельства, что упомянутые слагаемые удавалось представлять достаточно гладкими функциями (записями колебаний), со сходящимися "на нет" амплитудами их начальных и конечных частей. Именно подобные функции и требуются для удовлетворительного перехода от стационарных представлений полей – к их нестационарным аналогам посредством интегралов Фурье, распространными по узким частотным полосам.

По мере же уменьшения значений "больших" параметров начинают проявляться различные затруднения вычислительного характера. Прежде всего пришлось увеличивать отрезки путей интегрирования по стационарным линиям наибыстрейшего возрастания фазовых функций при оценке спектральных интегралов. Одновременно с этим уменьшилась и контрастность самих таких функций на общем фоне исследуемых полей. А это ставило вопрос и об увеличении общей точности вычислений, причем особенно в той ее части, которая оказалась связанной с учетом вкладов в волновое поле вычетов подинтегральных функций в корнях $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ дисперсионных уравнений, пересекаемых исходным путем интегрирования λ, при деформации его в стационарные линии λ_0, l_γ и l_δ фазовой функции. При этом процедура определения таких корней $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$ (с целью получения из них интерференционных мод), полностью оправданная в случае больших значений H, x и $\varkappa$, начинает терять ясность своего физического и вычислительного смысла, одновременно с потерей ясности вычислительного смысла и самих линий λ_0, l_γ и l_δ, равно как и смысла ограничивающих ими областей B_k типа областей B_k из рис. 12 и 13, в которых располагаются корни $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$, уже пересеченные исходным контуром λ.

В такой ситуации в фиксированных областях B_k (из рис. 12, 13) располагаются обычно лишь небольшие отрезки линий корня $\zeta = \zeta_p(\varkappa)$, на концевых участках которых вычет подинтегральной функции не имеет еще требующихся (относительно) малых значений. Поэтому мода, отвечающая такому корню, не может вычисляться (с достаточной точностью) прямой подстановкой упомянутого вычета под знак интеграла Фурье вида (2.39). Достаточно точное ее вычисление требует совместной подстановки под знак интеграла Фурье указанного вычета, а также – результата вычисления (совместно с вычетом) и интеграла по стационарным линиям, ограничивающим область B_k с боковых ее сторон. Об этом фактически уже упоминалось в §3. Однако такой подход к вычислениям не так легко реализовать в программе, "особенно", при автоматическом режиме ее работы.

При обсуждении возникающих здесь ситуаций возникла мысль полностью исключать из рассмотрения некоторые группы корней, попадающих в небольшие и узкие области типа областей B_k из рис. 13. Этого нетрудно добиться, если при деформации исходного пути интегрирования λ не заходить в "узкую" область B_k, а обходить ее полностью (по внешней части стационарных линий) в направлении по часовой стрелке. Такой путь следует опробовать. Однако это еще задача ближайшего будущего.

Литература

1. Г. И. Петрашень, В. В. Решетников, *Разработка инженерных подходов к изучению интерференционных волновых полей, возбуждающихся в пачках тонких упругих слоев. (I). (Построение волновых полей типа SV и обсуждение рациональных методов их количественной оценки).* в настоящем сборнике.

Reshetnikov V. V. The development of engineering approaches to the study of interference wave fields excited in packets of thin elastic layers. (II). (the construction of wave fields of the SV type and the discussion of rational methods of quantitative evaluation of them.).

The analytic-algorithmic approach to the quantitative study of wave fields in thin-layered elastic media is considered. The basic ideas of the numerical algorithm are stated. The examples of computation are presented.

С.-Петербургский
государственный
университет

Поступило 16 декабря 1998 г.