Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 254, 1998 г.

Е. Г. Голузина

О МНОЖЕСТВАХ ЗНАЧЕНИЙ СИСТЕМ $\{f(z_1),\ f'(z_1)\}$ И $\{f(z_1),\ f(z_2)\}$ В КЛАССЕ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть T – класс функций $f(z) = z + c_2z^2 + \dots$, регулярных и типично вещественных в круге $E = \{z : |z| < 1\}$, т.е. удовлетворяющих в нем условию $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) > 0$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Для класса T_R М. Робертсоном [1] и Г. М. Голузиным [3] получено интегральное представление:

$$f(z) \in T \Longleftrightarrow f(z) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{z}{1 - 2tz + z^2}\, d\alpha(t),\ \alpha(t) \in M, \tag{1}$$

где M – класс неубывающих на $[-1, 1]$ функций $\alpha(t)$, $\int_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$.

Экстремальным задачам в классе T посвящен ряд известных работ. О результатах В. Рогозинского, Г. М. Голузина, С. А. Гельфера, Ю. Е. Аленицына и Дж. Дженкинса, относящихся к исследованию множеств значений систем тейлоровских коэффициентов и оценкам этих коэффициентов, говорилось в последней работе автора [3]. В [4] на классе T была рассмотрена задача о множестве значений системы $\Phi(f, T)$ функционалов вида

$$\Phi_0^{(n)} = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0) \qquad (n = 3, 4, \dots, \alpha_0),$$

$$\Phi_k^{(n)} = \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(z_k) \quad (k = 1, 2, \dots, m;\ n = 1, 2, \dots, \alpha_k),$$

где $z_1, \dots, z_m$ – различные фиксированные точки из области $0 < |z| < 1$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$ – заданные натуральные числа. Именно, в [4] была получена характеристика множества $\Phi(f, T)$ в терминах неотрицательных и положительно определенных эрмитовых форм, а в случае $m = 1$, $\alpha_1 = 1$ описаны граничные функции множества $\Phi(f, T)$, т.е. функции, соответствующие точкам на

$\partial\Phi(f,T)$. Доказательства основывались на интегральном представлении класса T и некоторых теоремах из теории моментов в [5], обобщающих результаты Каратеодори–Тёплица и Ф. Рисса для C-функций Каратеодори. Этим же способом в [6] были решены аналогичные задачи в классе регулярных функций, обобщающих C-функции.

В настоящей работе при помощи того же подхода конкретизируются и дополняются некоторые из результатов в [4]. Именно, в классе T находятся множество D_1 значений системы $\{f(z_1), f'(z_1)\}$ и множество D_2 значений системы $\{f(z_1), f(z_2)\}$ при фиксированных z_1 и z_2 из $E\setminus\{0\}$, $z_1\neq z_2$, $\operatorname{Im} z_1\neq 0$, $\operatorname{Im} z_2\neq 0$ (теоремы 1, 2 и их следствия). Для описания граничных функций здесь оказалось удобным воспользоваться соответствующими рассуждениями Ю. Е. Аленицына при доказательствах лемм 1 и 2 в [7].

Заметим, что в случаях 1) $\operatorname{Im} z_1\neq 0$, $\operatorname{Im} z_2 = 0$, 2) $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = 0$ множество D_2 найдено в [8].

§1. Формулировки результатов

Положим

$$D_1=\{(w_1,w_1')\in\mathbb{C}^2 : w_1=f(z_1),\ w_1'=f'(z_1),\ f\in T\}$$

и обозначим

$$\zeta_1=z_1+\frac{1}{z_1},\quad \rho_1=\operatorname{Re}\zeta_1,\quad w_2=\frac{z_1^2}{1-z_1^2}w_1'.$$

Теорема 1. *В случае* $\operatorname{Im} z_1\neq 0$ D_1 – *замкнутое, выпуклое и ограниченное множество, описываемое следующей системой неравенств:*

$$\frac{\operatorname{Im}[(\zeta_1^2-4)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_1}\geqslant 1,\quad |w_1|^2+\frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}\leqslant 0, \tag{2}$$

$$\left|2\zeta_1 w_1+(4-\zeta_1^2)w_2-1\right|\leqslant\frac{\operatorname{Im}[(\zeta_1^2-4)w_1]}{\operatorname{Im}\zeta_1}-1, \tag{3}$$

$$|w_2|^2-2\operatorname{Re}(w_1^2\overline{w_2})\leqslant\left(\frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}\right)^2+2|w_1|^2\frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}. \tag{4}$$

Точкам на ∂D_1 *соответствуют функции вида*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\lambda_k z}{1 - 2t_k\, z + z^2} + \frac{\lambda_3 z}{(1+z)^2} + \frac{\lambda_4 z}{(1-z)^2}, \tag{5}$$

где параметры $\lambda_j \geqslant 0$ $(j = 1,2,3,4)$ *и* $t_k \in (-1,1)$ $(k = 1,2)$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{aligned} w_1 &= \sum_{k=1}^{2} \frac{\lambda_k}{\zeta_1 - 2t_k} + \frac{\lambda_3}{\zeta_1 + 2} + \frac{\lambda_4}{\zeta_1 - 2}, \\ w_2 &= \sum_{k=1}^{2} \frac{\lambda_k}{(\zeta_1 - 2t_k)^2} + \frac{\lambda_3}{(\zeta_1 + 2)^2} + \frac{\lambda_4}{(\zeta_1 - 2)^2}, \\ &\sum_{k=1}^{4} \lambda_k = 1. \end{aligned}$$

В случае $\operatorname{Im} z_1 = 0$ при $x + iy = f(z_1) + if'(z_1)\frac{z_1^2}{1-z_1^2}$

$$D_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{C} : y \geqslant x^2,\ y \leqslant \frac{2\rho_1 x - 1}{\rho_1^2 - 4}\right\},$$

точкам на ∂D_1 соответствуют функции

$$f(z) = \frac{z}{1 - 2tz + z^2}, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1$$

и

$$f(z) = \frac{\lambda z}{(1-z)^2} + \frac{(1-\lambda) z}{(1+z)^2}, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Известен следующий результат, принадлежащий Рогозинскому [9].

Пусть D *– множество значений* $f(z_1)$ *на классе* T *при фиксированном* $z_1 \in E$*. В случае* $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ D *представляет собой круговой сегмент, ограниченный дугой* $w = s(z_1, t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, *где* $s(z_1,t) = \frac{z_1}{1 - 2tz_1 + z_1^2}$, *и хордой, соединяющей точки* $s(z_1, 1)$, $s(z_1, -1)$.

Таким образом,

$$D \equiv \{w \in \mathbb{C} : w = f(z_1), f \in T\} = \{\Delta_1 \cap \Delta_2\},$$

где Δ_1 – круг, Δ_2 – полуплоскость, и

$$\Delta_1 = \left\{ w : \left| w + \frac{i}{2\operatorname{Im}(z_1 + \frac{1}{z_1})} \right| \leqslant \frac{1}{2|\operatorname{Im}(z_1 + \frac{1}{z_1})|} \right\},$$

$$\Delta_2 = \left\{ w : \frac{\operatorname{Im}[w_1(z_1 - \frac{1}{z_1})^2]}{\operatorname{Im}(z_1 + \frac{1}{z_1})} \geqslant 1 \right\}.$$

Пусть $T_1 = \{f(z) \in T : f(z_1) = w_1\}$, где z_1 и w_1 фиксированы, $z_1 \in E$, $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$, $w_1 \in \operatorname{Int} D$, т.е. w_1 удовлетворяет двум строгим неравенствам в (2).

Обозначим через D_1' множество значений $f'(z_1)$ на классе T_1 при фиксированном z_1, $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$. Из теоремы 1 находится множество D_1' и это множество значений оказывается круговой луночкой.

Следствие 1. $D_1' = \{\Delta_1' \cap \Delta_2'\}$, *где*

$$\Delta_j' = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| \frac{z_1^2}{1 - z_1^2} w - O_j' \right| \leqslant R_j' \right\}, \quad j = 1, 2;$$

здесь

$$O_1' = \frac{2\zeta_1 w_1 - 1}{\zeta_1^2 - 4}, \quad R_1' = \frac{1}{|\zeta_1^2 - 4|} \left[\frac{\operatorname{Im}(w_1(\zeta_1^2 - 4))}{\operatorname{Im} \zeta_1} - 1 \right],$$

$$O_2' = w_1^2, \qquad R_2' = \left| \frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im} \zeta_1} + |w_1|^2 \right|.$$

Положим

$$D_2 = \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 : w_1 = f(z_1), w_2 = f(z_2), f \in T\}.$$

Пусть $\zeta_j = z_j + \frac{1}{z_j}$, $j = 1, 2$.

Теорема 2. *D_2 – замкнутое, выпуклое и ограниченное множество, описываемое в случае $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$, $\operatorname{Im} z_2 \neq 0$ системой (2) и неравенствами*

$$|w_2|^2 \left(\frac{1}{|\zeta_2 - \overline{\zeta}_1|^2} + 2 \operatorname{Re} \frac{w_1}{\zeta_2 - \overline{\zeta}_1} - \frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im} \zeta_1} \right)$$

$$+ |w_1|^2 \left(\frac{1}{|\zeta_2 - \overline{\zeta}_1|^2} + 2 \operatorname{Re} \frac{w_2}{\zeta_1 - \overline{\zeta}_2} - \frac{\operatorname{Im} w_2}{\operatorname{Im} \zeta_2} \right)$$

$$\leqslant 2\,\mathrm{Re}\left\{w_2\left[\frac{-i\,\mathrm{Im}\,w_1}{2\,\mathrm{Im}\,\zeta_1\,\mathrm{Im}\,\zeta_2}+\frac{w_1}{|\zeta_2-\overline{\zeta}_1|^2}\right]\right\}, \tag{6}$$

$$\left|\frac{w_2(\zeta_2^2-4)-\overline{w}_1(\overline{\zeta}_1^2-4)}{\zeta_2-\overline{\zeta}_1}-1\right|^2\leqslant\prod_{k=1}^{2}\left[\frac{\mathrm{Im}(w_k(\zeta_k^2-4))}{\mathrm{Im}\,\zeta_k}-1\right]. \tag{7}$$

Точкам на ∂D_2 соответствуют функции вида (5) при следующих условиях на параметры:

$$\lambda_j\geqslant 0\ \ (j=1,2,3,4),\quad t_k\in(-1,1)\ \ (k=1,2),\quad \sum_{k=1}^{4}\lambda_k=1,$$

$$w_j=\sum_{k=1}^{2}\lambda_k(\zeta_j-2t_k)^{-1}+\lambda_3(\zeta_j+2)^{-1}+\lambda_4(\zeta_j-2)^{-1}.$$

Обозначим через $D_2(z_2)$ множество значений функционала $f(z_2)$ на классе T_1 при фиксированном z_2, $\mathrm{Im}\,z_2\neq 0$. Из теоремы 2, путем преобразований неравенств (6), (7), находим, что это множество также является круговой луночкой.

Именно, используем следующие обозначения:

$$O_1=\frac{1}{4-\zeta_2^2}\left[\overline{w}_1(4-\overline{\zeta}_1^2)+\frac{1}{\zeta_2-\overline{\zeta}_2}\left(|\zeta_1-\overline{\zeta}_2|^2\frac{\mathrm{Im}((\zeta_1^2-4)w_1)}{\mathrm{Im}\,\zeta_1}\right.\right.$$
$$\left.\left.+(\zeta_2-\zeta_1)(\overline{\zeta}_1-\zeta_2)\right)\right],$$
$$R_1=\frac{|(\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_2-\overline{\zeta}_1)|}{2|\mathrm{Im}\,\zeta_2|\,|4-\zeta_2^2|}\left[\frac{\mathrm{Im}(w_1(\zeta_1^2-4))}{\mathrm{Im}\,\zeta_1}-1\right],$$
$$O_2=\frac{B}{A},\quad R_2=\frac{C}{A},$$

где

$$A=|\zeta_2-\overline{\zeta}_1|^{-2}\bigl\{1+\mathrm{Im}\left[(\zeta_2-\zeta_1)(\zeta_1-\overline{\zeta}_2)w_1\right]/\,\mathrm{Im}\,\zeta_1\bigr\},$$
$$B=\frac{i\,\mathrm{Im}\,w_1}{2\,\mathrm{Im}\,\zeta_1\,\mathrm{Im}\,\zeta_2}+\frac{\overline{w}_1}{|\zeta_2-\overline{\zeta}_1|^2}+\frac{i|w_1|^2(\overline{\zeta}_1-\overline{\zeta}_2)}{2(\overline{\zeta}_1-\zeta_2)\,\mathrm{Im}\,\zeta_2},$$
$$C=\frac{|\zeta_1-\zeta_2|}{2|\mathrm{Im}\,\zeta_2|\,|\zeta_1-\overline{\zeta}_2|}\left||w_1|^2+\frac{\mathrm{Im}\,w_1}{\mathrm{Im}\,\zeta_1}\right|.$$

Тогда справедливо

Следствие 2. $D_2(z_2)=\{\Delta_1\cap\Delta_2\}$, *где*

$$\Delta_j=\bigl\{w\in\mathbb{C}:|w-O_j|\leqslant R_j\bigr\},\quad j=1,2.$$

§2. Доказательства

2.1. Доказательство теоремы 1. Из представления (1) для системы $\{f(z_1), f'(z_1)\}$ получаем представление

$$
\begin{aligned}
f(z_1) &= \int_{-1}^{1} (\zeta_1 - 2t)^{-1}\, d\,\alpha(t) \\
f'(z_1) &= \int_{-1}^{1} (-\zeta'(z_1)) \cdot (\zeta_1 - 2t)^{-2}\, d\,\alpha(t), \quad \alpha(t) \in M,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где испльзуются обозначения

$$
\zeta = \zeta(z) = z + \frac{1}{z}, \quad \zeta_1 = \zeta(z_1).
$$

Нетрудно показать, что D_1 – выпуклое, ограниченное и замкнутое множество.

В силу теоремы 1.3 в [10, стр. 86–87], имеем следующее утверждение.

Для справедливости представления (8), необходимо и достаточно, чтобы при выполнении для всех $t \in [-1, 1]$ неравенства

$$
\varphi(t) \equiv \operatorname{Re}\left[\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta_1 - 2t} + \alpha_2 \frac{(-\zeta'(z_1))}{(\zeta_1 - 2t)^2}\right] \geqslant 0, \tag{9}
$$

выполнялось бы и неравенство

$$
H \equiv \operatorname{Re}\left[\alpha_0 + \alpha_1 f(z_1) + \alpha_2 f'(z_1)\right] \geqslant 0, \tag{10}
$$

где α_0, α_1, α_2 – комплексные числа.

В случае $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ запишем $\varphi(t)$ в виде

$$
\varphi(t) = A_4(t) \left|\zeta_1 - 2t\right|^{-4}, \tag{11}
$$

где $A_4(t)$ –неотрицательный многочлен от t не выше 4-ой степени. По теореме Маркова–Лукача (см. [10, стр. 89]),

$$
A_4(t) = (1 - t^2)(X_0 + X_1 t)^2 + \left(\sum_{k=0}^{2} Y_k\, t^k\right)^2, \tag{12}
$$

где X_0, X_1 и Y_0, Y_1, Y_2 – вещественные числа.

Подставим (12) в (11) и запишем неравенство $\varphi(t) \geqslant 0$ в виде

$$\varphi(t) = (1-t^2)\left|\frac{X_0 + X_1 t}{(\zeta_1 - 2t)(\overline{\zeta}_1 - 2t)}\right|^2 + \left|\frac{Y_0 + Y_1 t + Y_2 t^2}{(\zeta_1 - 2t)(\overline{\zeta}_1 - 2t)}\right|^2 \tag{13}$$

$$= (1-t^2)\left|\frac{\beta_0}{\zeta_1 - 2t} + \frac{\beta_1}{\overline{\zeta}_1 - 2t}\right|^2 + \left|\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\zeta_1 - 2t} + \frac{\gamma_2}{\overline{\zeta}_1 - 2t}\right|^2 \geqslant 0,$$

где β_0, β_1 и γ_0, γ_1, γ_2 – некоторые комплексные числа, зависящие соответственно от X_0, X_1 и Y_0, Y_1, Y_2.

Заметим, что

$$\frac{1-t^2}{|\zeta_1 - 2t|^2} = -\frac{1}{4} + \frac{\beta}{\zeta_1 - 2t} + \frac{\overline{\beta}}{\overline{\zeta}_1 - 2t}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{4-\zeta_1^2}{4(\overline{\zeta}_1 - \zeta_1)}, \tag{14}$$

$$\frac{1-t^2}{(\zeta_1 - 2t)^2} = -\frac{1}{4} + \frac{\zeta_1/2}{\zeta_1 - 2t} + \frac{(4-\zeta_1^2)/4}{(\zeta_1 - 2t)^2}.$$

Поэтому из неравенства (13) и условий (9)–(10) получаем

$$H \equiv A_{00}|\beta_0|^2 + A_{11}|\beta_1|^2 + 2\operatorname{Re}(A_{00}\,\beta_0\,\overline{\beta}_1) + |\gamma_0|^2 + B_{11}|\gamma_1|^2$$
$$+B_{22}|\gamma_2|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{w}_1\,\gamma_0\,\overline{\gamma}_1) + 2\operatorname{Re}(w_1\,\gamma_0\,\overline{\gamma}_2) + 2\operatorname{Re}(w_2\,\gamma_1\,\overline{\gamma}_2) \geqslant 0, \tag{15}$$

где

$$w_1 = f(z_1), \quad w_2 = f'(z_1)\big/\big(-\zeta'(z_1)\big),$$

$$A_{00} = -\frac{1}{4} + 2\operatorname{Re}(\beta\, w_1), \quad A_{11} = A_{00},$$

$$A_{01} = -\frac{1}{4} + \frac{\zeta_1}{2}w_1 + \frac{4-\zeta_1^2}{4}\,w_2, \quad A_{10} = \overline{A}_{01},$$

$$B_{11} = B_{22} = -\frac{\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}.$$

Следовательно, для справедливости представления (8) необходима и достаточна неотрицательность эрмитовой формы в (15). Последнее равносильно (см. [11, стр. 300]) неотрицательности всех главных миноров двух матриц

$$B_1' = \begin{Vmatrix} A_{00} & A_{10} \\ A_{01} & A_{11} \end{Vmatrix}, \quad B_2' = \begin{Vmatrix} 1 & w_1 & \overline{w}_1 \\ \overline{w}_1 & B_{11} & \overline{w}_2 \\ w_1 & w_2 & B_{22} \end{Vmatrix}.$$

Далее нам потребуется

Лемма 1. *Некоторая точка* $(w_1, w_1') \in \mathbb{C}^2$ *является внутренней точкой множества* D_1 *тогда и только тогда, когда эрмитова форма* H *в* (15) *положительно определенная.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1 в [4] и мы его опускаем.

Положительная определенность эрмитовой формы в (15) равносильна (см. [11, стр. 300]) выполнению строгих неравенств

$$A_{00} > 0, \quad A_{11} \cdot A_{00} > |A_{10}|^2,$$

$$B_{11} > |w_1|^2, \quad B_{11}^2 + 2\operatorname{Re}(w_1^2\,\overline{w}_2) > |w_2|^2 + 2B_{11}|w_1|^2,$$

что, ввиду замкнутости множества D_1, доказывает первую часть теоремы 1.

Для исследования граничных функций используем леммы 1 и 2 в [8]. Пусть P – точка $(w_1, w_1') \in \mathbb{C}^2$. Имеем

$$\partial D_1 = \left\{ P \in D_1 : \operatorname{Re} L(P) = \max_{w=(w_1,w_1')\in D_1} \operatorname{Re} L(w) \right\},$$

где

$$L(w) = \alpha_0 + \alpha_1\, w_1 + \alpha_2\, w_1', \quad \alpha_0 \neq 0, \quad (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^2$$

– ненулевые векторы. В силу (8),

$$L(w) = \alpha_0 + \alpha_1 \int_{-1}^{1} \frac{d\,\alpha(t)}{\zeta_1 - 2t} + \alpha_2 \int_{-1}^{1} \frac{-\zeta'(z_1)}{(\zeta_1 - 2t)^2} d\,\alpha(t) = \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, d\,\alpha(t)$$

и

$$\max_{w\in D_1} \operatorname{Re} L(w) = \max_{\alpha\in M} \int_{-1}^{1} \varphi(t)\, d\,\alpha(t) = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} \varphi(t).$$

Функция $\varphi(t) = \frac{A_4(t)}{|\zeta_1 - 2t|^2} \not\equiv \mathrm{const}$, $A_4(t)$ – многочлен от t не выше 4-ой степени. Поэтому $\varphi(t)$ достигает абсолютного максимума на $[-1, 1]$ на конечном числе точек t_j, $j = 1, 2, \ldots, q$, $q \leqslant 2$, и, возможно, в точках -1, 1. Поэтому множеству ∂D_1 соответствуют только те функции класса T, которые получаются из (1) при кусочно-постоянных функциях $\alpha(t) \in M$ с возможными точками разрыва только t_1, t_2, -1, 1, т.е. функции (5). В случае $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ теорема 1 доказана.

Пусть теперь $\operatorname{Im} z_1 = 0$. Тогда функция

$$\varphi(t) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\rho_1 - 2t} + \frac{\alpha_2(-\zeta'(z_1))}{(\rho_1 - 2t)^2},$$

где α_0, α_1, α_2 – вещественные числа, и в силу (9)

$$\varphi(t) = \frac{A_2(t)}{(\rho_1 - 2t)^2} \geqslant 0,$$

где $A_2(t)$ – неотрицательный многочлен от t не выше 2-ой степени. По теореме Маркова–Лукача,

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (1 - t^2)\frac{X_0^2}{(\rho_1 - 2t)^2} + \frac{(Y_0 + Y_1 t)^2}{(\rho_1 - 2t)^2} \\ &= (1 - t^2)\frac{X_0^2}{(\rho_1 - 2t)^2} + \left(\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\rho_1 - 2t}\right)^2,\end{aligned}$$

где X_0 и γ_0, γ_1 – некоторые вещественные числа.

Соответствующая форма H имеет вид

$$H = \left(-\frac{1}{4} + \frac{\rho_1\, w_1}{2} + \frac{(4 - \rho_1^2)w_2}{4}\right)X_0^2 + \gamma_0^2 + \gamma_1^2\, w_2 + 2\gamma_0\,\gamma_1\, w_1. \quad (16)$$

Неотрицательность квадратичной формы (16) равносильна (см. [11, стр. 278]) выполнению двух неравенств

$$(\rho_1^2 - 4)w_2 \leqslant 2\rho_1\, w_1 - 1, \quad w_2 \geqslant w_1^2.$$

Теорема 1 доказана.

2.2. Доказательство теоремы 2. Для системы функционалов $\{f(z_1), f(z_2)\}$ из представления (1) получаем представление

$$f(z_j) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\zeta_j - 2t}, \quad \alpha(t) \in M, \quad j = 1, 2, \quad \zeta_j = z_j + z_j^{-1}. \qquad (17)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны использованным при доказательстве теоремы 1. Для представления (17) условия (9)–(10) заменяются на следующие:

$$\varphi(t) \equiv \operatorname{Re}\left[\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta_1 - 2t} + \frac{\alpha_2}{\zeta_2 - 2t}\right] \geqslant 0, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \qquad (18)$$

$$H \equiv \operatorname{Re}\left[\alpha_0 + \alpha_1 f(z_1) + \alpha_2 f(z_2)\right] \geqslant 0. \tag{19}$$

Так как $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$, $\operatorname{Im} z_2 \neq 0$, то функцию $\varphi(t)$ запишем в виде

$$\varphi(t) = \frac{A_4(t)}{|\zeta_1 - 2t|^2\,|\zeta_2 - 2t|^2}. \tag{20}$$

Используя представление (12), из неравенства (18) получаем

$$\varphi(t) = (1 - t^2)\left|\frac{\beta_0}{\zeta_1 - 2t} + \frac{\beta_1}{\zeta_2 - 2t}\right|^2 + \left|\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{\zeta_1 - 2t} + \frac{\gamma_2}{\zeta_2 - 2t}\right|^2 \geqslant 0,$$

откуда в силу условий (18)–(19) следует

$$\begin{gathered} H \equiv \left[\frac{\operatorname{Im}(w_1(\zeta_1^2 - 4))}{\operatorname{Im}\zeta_1} - 1\right]|\beta_0|^2 + \left[\frac{\operatorname{Im}(w_2(\zeta_2^2 - 4))}{\operatorname{Im}\zeta_2} - 1\right]|\beta_1|^2 \\ +2\operatorname{Re}\left[\left(\frac{(4 - \zeta_1^2)w_1 - (4 - \overline{\zeta}_2^2)\overline{w}_2}{\overline{\zeta}_2 - \zeta_1} - 1\right)\beta_0\,\overline{\beta}_1\right] \\ +|\gamma_0|^2 + \left(\frac{-\operatorname{Im} w_1}{\operatorname{Im}\zeta_1}\right)|\gamma_1|^2 + \left(\frac{-\operatorname{Im} w_2}{\operatorname{Im}\zeta_2}\right)|\gamma_2|^2 \\ +2\operatorname{Re}\left(w_1\,\gamma_0\,\overline{\gamma}_1\right) + 2\operatorname{Re}\left(w_2\,\gamma_0\,\overline{\gamma}_2\right) + 2\operatorname{Re}\left(\frac{\overline{w}_1 - w_2}{\zeta_2 - \overline{\zeta}_1}\gamma_1\,\overline{\gamma}_2\right) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{21}$$

Следовательно, для справедливости представления (17), необходима и достаточна неотрицательность эрмитовой формы в (21).

Используя схему доказательства леммы 1 в [4], получим следующий аналог леммы 1.

Лемма 2. *Для того, чтобы некоторая точка* $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2$ *была внутренней точкой множества* D_2*, необходимо и достаточно, чтобы эрмитова форма в* (21) *была положительно определенной.*

Положительная определенность формы H в (21) равносильна выполнению строгих неравенств в (2) и (6), (7). Этим, в силу замкнутости множества D_2, доказана первая часть утверждения теоремы 2.

Так как функция $\varphi(t)$ здесь имеет вид (20), где $A_4(t)$ – многочлен от t не выше 4-й степени, то те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1, приводят к утверждению о граничных функциях множества D_2. Теорема 2 доказана.

Литература

1. M. S. Robertson, *On the coefficients of typically real functions,* Bull. Amer. Math. Soc. **41**, No. 8 (1935), 565–572.
2. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях,* Мат. сб. **27** (69), No. 2 (1950), 201–218.
3. Е. Г. Голузина, *О множестве значений $f(z_0)$ в одном классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 46–55.
4. Е. Г. Голузина, *Об областях значений некоторых систем функционалов в классе типично вещественных функций,* Вестн. ЛГУ No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1965), 45–62.
5. Н. Ахиезер, М. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов,* Харьков, 1938.
6. В. А. Андреева, Н. А. Лебедев, А. В. Стовбун, *Об областях значений некоторых систем функционалов в некоторых классах регулярных функций,* Вестн ЛГУ No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1961), 8–22.
7. Ю. Е. Аленицын, *Об областях изменения систем коэффициентов функций, представимых суммой интегралов Стилтьеса,* Вестник ЛГУ No. 7, сер. мат., мех. и астр., вып. 2 (1962), 25–41.
8. Е. Г. Голузина, *О множестве значений одной системы функционалов в классе типично вещественных функций,* Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 69–79.
9. W. Rogosinski, *Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen,* Math. Z. **35**, No. 1 (1932), 93–121.
10. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи,* М., 1973.
11. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц,* 3-ье изд., М., 1967.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 5 ноября 1998 г.